

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТУСА
КАФЕДРА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЇ ТА ПРИКЛАДНОЇ ХІМІЇ

Ю. В. Рассохіна

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання індивідуальних завдань за темою
**«НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ
ТА ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ.
ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ»**
з дисципліни «Вища математика»
для здобувачів денної форми навчання
спеціальностей 091 Біологія та біохімія, 101 Екологія, 102 Хімія

Вінниця
2025

УДК 517.3(072)

М 545

*Затверджено на засіданні Вченої ради факультету
хімії, біології і біотехнологій ДонНУ імені Василя Стуса
(протокол № 2 від 19 грудня 2024 р.)*

Укладач:

Рассохіна Ю. В., доктор фізико-математичних наук, ст. наук. співроб., професор понад два роки, доцент кафедри фундаментальної та прикладної хімії ДонНУ імені Василя Стуса.

Рецензент:

Луценко А. В., доктор філософії з математики, завідувач кафедри, старший викладач кафедри прикладної математики та кібербезпеки ДонНУ імені Василя Стуса.

М 545 Методичні вказівки до виконання індивідуальних завдань за темою «Невизначений інтеграл функції однієї змінної та основні методи інтегрування. Визначений інтеграл. Невласні інтеграли» з дисципліни «Вища математика»: для здобувачів денної форми навчання спеціальностей 091 Біологія та біохімія, 101 Екологія, 102 Хімія / уклад. Ю. В. Рассохіна. Вінниця: ДонНУ імені Василя Стуса, 2025. 72 с.

Методичні вказівки розроблені на основі програми курсу Вища математика, що викладається студентам 1–2 курсів нематематичних спеціальностей (хімія, біологія та біохімія, екологія). Містять короткі теоретичні відомості, основні методи і приклади розв'язання типових задач з інтегрального числення функції однієї змінної. Також методичні вказівки містять завдання для аудиторних занять, завдання для самостійної роботи і варіанти індивідуальних завдань, які охоплюють усі основні види і методи інтегрування функції однієї змінної.

УДК 517.3(072)

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
Історичні відомості про інтегральне числення	4
1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ	7
1.1. Означення невизначеного інтеграла. Основні властивості невизначеного інтегралу	7
1.2. Основні методи інтегрування.....	11
1.2.1. Метод безпосереднього інтегрування	11
1.2.2. Метод заміни змінної	11
1.2.3. Метод інтегрування частинами.....	14
1.3. Інтегрування раціональних функцій. Інтегрування деяких ірраціональних та деяких трансцендентних функцій	17
1.3.1. Інтегрування раціональних функцій	17
1.3.2. Інтегрування раціональних дробів	20
1.4. Інтегрування ірраціональних виразів	25
<i>Завдання для практичних занять та самостійної роботи</i>	<i>33</i>
2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ.....	36
2.1. Визначений інтеграл: інтегральні суми Рімана, основні властивості	36
2.2. Інтеграл із змінною верхньою межею. Формула Ньютона–Лейбніца	41
2.2.1. Методи обчислення визначених інтегралів	42
2.2.2. Застосування визначеного інтеграла	44
<i>Завдання для практичних занять та самостійної роботи</i>	<i>48</i>
3. НЕВЛАСНИЙ ІНТЕГРАЛ.....	52
3.1. Невласні інтеграли з нескінченими межами інтегрування (невласні інтеграли 1-го роду)	52
3.1.1. Ознаки збіжності невластного інтеграла 1-го роду	56
3.2. Невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли 2-го роду)	59
3.2.1. Ознаки збіжності невластного інтеграла другого роду	62
3.3. Головне значення за Коші невластних інтегралів	66
<i>Завдання для практичних занять та самостійної роботи</i>	<i>67</i>
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	71

ВСТУП

Дисципліна «Вища математика» спрямована на формування у студентів теоретичних знань та вироблення практичних навичок застосування математичного апарату, який допомагає аналізувати, моделювати і вирішувати прикладні завдання в галузі майже всіх природничих наук, інформаційних технологій, інженерії тощо.

Методичні вказівки розроблені як допоміжний навчальний посібник для проведення практичних занять в аудиторії та виконання самостійних і контрольних робіт з інтегрального числення (як частини курсу математичного аналізу) для студентів 1–2 курсів навчання нематематичних спеціальностей, у тому числі тих, що навчаються за індивідуальним навчальним графіком.

Запропонована методична розробка складається з базового теоретичного матеріалу, прикладів розв’язання задач і завдань на практичні заняття. Кожне практичне заняття починається з контрольних питань, відповіді на які є необхідним мінімумом для успішного засвоєння матеріалу. Далі, згідно з розглядуваною темою, наведені приклади розв’язання задач із детальними поясненнями, а також завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів і завдання для контролю засвоєння навчального матеріалу.

Історичні відомості про інтегральне числення

Інтеграл – один з основних складників математичного аналізу. Достатньо проаналізувати будь-який підручник, що пов’язаний із природничими або технічними науками, і ви зіткнетесь із визначенням та застосуванням інтегралу. Здебільшого ми маємо змогу спостерігати за тим, як увійшли до вжитку терміни «інтегральна схема», «економічна інтеграція», які прямо не стосуються інтеграла, але смислове навантаження зберігають і широко використовуються в літературі. Тому для того, щоб досконало розібратися, як правильно застосовувати інтеграл, звернімося до його історії виникнення та розвитку.

Інтеграція простежується ще в Давньому Єгипті, приблизно у 1800 р. до н. е., Єгипетський математичний папірус демонструє знання формули об’єму зрізаної піраміди. Першим відомим методом для розрахунку інтегралів є метод вичерпування Евдокса (приблизно 370 р. до н. е.), який намагався знайти площі і об’єми, розриваючи їх на нескінченну кількість частин, для яких площа або об’єм уже відомі. Цей метод був підхоплений і розвинутий Архімедом та використовувався для розрахунку площ парабол і наближеного розрахунку площі кола. Аналогічні методи були розроблені незалежно в Китаї у 3 ст. н. е. Лю Хуейємом, який використовував їх для знаходження площі круга. Цей метод був згодом використаний Дзю Чонгши для знаходження об’єму сфери.

Фундаментальним внеском Евдокса в математику є *метод вичерпування*, що отримав таку назву в XVII ст. і застосовувався стародавніми математиками під час доведення теорем, пов’язаних з обчисленням площ, об’ємів та інших величин.

Він вважається першим варіантом теорії границь. Архімед удосконалив метод вичерпування Евдокса і успішно користувався ним для доведення багатьох теорем. Так були закладені початки інтегральних методів. Дуже важливим для становлення інтегрального числення було удосконалення Архімедом ідеї Демокріта про розбиття плоских фігур на елементарні смуги, що «заповнюють» фігури, і тіла на шари, що заповнюють їх. Таких елементарних частин могла бути нескінченна множина або скінченне число. Цими діями Архімед передував ідеям Кеплера і Кавальєрі у визначенні числових характеристик різних геометричних об'єктів.

Наступними, хто зробив неабиякий вклад у застосування інтеграла, стали Готфрід Вільгельм Лейбніц та Ісаак Ньютон. У 1708 р. спалахнув сумнозвісний спір Лейбніца з Ньютоном про науковий пріоритет відкриття **диференціального числення**. Відомо, що Лейбніц і Ньютон працювали над диференціальним численням. Відомо також, що Ньютон створив свою версію математичного аналізу, «методу флюксій», хоч і опублікував свої результати лише багато років потому. Лейбніц першим опублікував числення нескінченно малих і розробив символіку, у тому числі і для інтегрального числення $\int$, яка виявилася настільки зручною, що її використовують і сьогодні. Тобто, говорячи сучасною мовою, історично спочатку було введено поняття визначеного інтеграла.

Отже, **формула Ньютона–Лейбніца** дає співвідношення між операціями обчислення **визначеного інтеграла** і обчислення **первісної**. Формула Ньютона–Лейбніца для визначеного інтеграла – це основна формула інтегрального числення.

Після Ньютона і Лейбніца розвиток ідеї інтеграла пішов у двох напрямках. Перший напрям – це інтеграл, який трактувався як границя деякої суми, тобто **визначений інтеграл**, що застосовувався під час розв'язання задач із прикладної математики, механіки, фізики, проник у технічні науки і став використовуватися практично у всіх галузях природничих наук. Другий напрям – це інтеграл як сімейство **первісних**, тобто **невизначений інтеграл**, що своїм розвитком викликав виникнення абсолютно нового розділу математичного аналізу – *методів інтегрування функцій*. Клас інтегровних функцій весь час поповнювався; найважливішим застосуванням **невизначеного інтеграла** є інтегрування диференціальних рівнянь, які є могутнім апаратом і складником багатьох наук.

Незважаючи на стрімкий розвиток використання цієї формули, вчені зіштовхнулися з деякими проблемами. Обчислення деяких інтегралів функцій однієї змінної за формулою Ньютона–Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

містило в собі деякі парадокси. Першим на це звернув увагу Д'Аламбер у 1768 р., який зазначив, що формулу Ньютона–Лейбніца не можна використовувати під час обчислення інтегралів вигляду:

$$\int_a^b \frac{dx}{x^m},$$

коли підінтегральна функція на проміжку інтегрування перетворюється в нескінченність. Інтеграли такого типу отримали назву **невласних інтегралів**. До **невласних інтегралів** віднесли також інтеграли на нескінченних проміжках інтегрування:

$$\int_a^\infty f(x)dx.$$

Альтернативний спосіб вирішення цієї проблеми запропонував Огюстен Луї Коші. Коші ввів невизначений інтеграл як окремий випадок визначеного при *змінній верхній границі*. Він довів неперервність такого інтеграла за верхньою межею і теорему про те, що його похідна за верхньою межею дорівнює підінтегральній функції $f(x)$. Коші довів також справедливність формули Ньютона–Лейбніца. Він висловив положення, пов'язані з диференціюванням і *інтегруванням за параметром*.

Здавалося б, усі варіанти використання та вдосконалення як визначеного, так і невизначеного інтегралу розглянуті та широко використовувалися математиками того часу, але все в нашому житті потребує вдосконалення та інтерпретації. Так, у 1912 р. з'явилося узагальнення інтеграла Лебега – інтеграл А. Данжуа (1884–1973), який стимулював нові дослідження. У 1930 р. А. І. Колмогоров опублікував роботу, в якій охопив усі інтеграли як границі різних інтегральних сум. Зокрема, інтеграл Колмогорова знайшов застосування в математичній фізиці, у математичному обґрунтуванні квантової механіки.

У розвиток поняття інтеграла, окрім Колмогорова, зробили значний внесок і інші математики, які зробили відкриття першочергової важливості. Це П. Л. Чебишов (1821–1894), А. А. Марков (1856–1922), О. М. Ляпунов (1857–1918), М. М. Лузін (1883–1950), О. Я. Хінчін (1894–1959). Отже, розглядаючи основні етапи розвитку інтегралу і інтегрального числення взагалі та визначивши шлях його формування як одного із найважливіших понять математичного аналізу, вкотре переконуємося, що інтеграл є базовим поняттям сучасної науки. Поняття інтеграла ще багато років тому дало змогу вченим розвивати математику як цілісну науку, обчислювати необхідні поверхні, допомогти зародженню інноваційних методів обчислення та вдосконалення вже відомих шляхів вирішення багатьох питань, пов'язаних не тільки з математикою, але й з іншими галузями природничих і технічних наук.

1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Означення невизначеного інтеграла. Основні властивості невизначеного інтеграла

Поняття невизначеного інтеграла безпосередньо пов'язане з диференціальним численням. Нагадаємо, що основним завданням диференціального числення є знаходження похідної $f'(x)$ заданої функції $f(x)$. Одним з фізичних трактувань цієї задачі є визначення швидкості руху за функцією, яка задає пройдений шлях за час руху. З практичного погляду природною є обернена задача, а саме визначення пройденого шляху за відомою швидкістю руху як функцією часу. Більш формально – остання задача є знаходженням функції $f(x)$ за її відомою похідною $f'(x)$. Розв'язується ця задача за допомогою **невизначеного інтеграла**.

Згадаємо, що кожна функція однієї змінної задана на якійсь підмножині з множини дійсних чисел, тобто на проміжку або інтервалі. Літерою D позначимо один з наступних числових проміжків дійсної прямої $\mathbb{R}$: $[a; b]$, $(a; b)$, $[a; b)$, $(a; b]$, $(-\infty; b]$, $(-\infty; b)$, $(a; +\infty)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; +\infty)$.

Def. 1. Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$ на числовому проміжку D , якщо $F(x)$ диференційовна на D і $F'(x) = f(x)$, для всіх $x \in D$.

Операцію відшукування первісної $F(x)$ для функції $f(x)$ називають **інтегруванням**.

Наприклад, для функції $f(x) = \cos x$ первісною є $F(x) = \sin x$, оскільки $(\sin x)' = \cos x$. Також для функції $f(x) = x^2$ первісною є $F(x) = \frac{x^3}{3}$, оскільки $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$.

Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку D , то функція $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ також буде первісною. І навпаки, кожна первісна функції $f(x)$ на D може бути представлена у вигляді $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$. Дійсно, похідна $(F(x) + C)' = f(x)$, $C \in \mathbb{R}$.

Def. 2. Сукупність $\{F(x) + C\}$ всіх первісних функції $f(x)$ в інтервалі D називають **невизначеним інтегралом** від функції $f(x)$ і позначають:

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \quad (1.1)$$

Вираз $f(x)dx$ називають **підінтегральним виразом**, $f(x)$ – **підінтегральною функцією**, x – **змінною інтегрування**, $C \in \mathbb{R}$ – **сталюю інтегрування**. Згадаємо, що $f(x)dx$ є диференціалом деякої функції, тобто $f(x)dx = F'(x)dx = dF$.

У курсі математичного аналізу доводиться теорема, що будь-яка неперервна функція $f(x)$ має безліч первісних. Звідси, **основна задача інтегрального числення** полягає у тому, щоб знайти функцію за виразом її диференціала.

Підкреслимо роль співвідношення $\int dF = F(x) + C$. Інакше кажучи, інтегрування треба трактувати як операцію обертання відносно до операції знаходження диференціала. Дійсно, використовуючи таблицю диференціалів, а також визначення, які наведені вище, легко одержати таблицю невизначених інтегралів.

Підсумуємо сказане у вигляді двох теорем.

Теорема 1. Якщо $F(x)$ є первісна функції $f(x)$ на проміжку D , то будь-яка інша первісна функції $f(x)$ відрізняється від $F(x)$ на величину сталого доданка, тобто може бути подана у вигляді $F(x) + C$, де C – довільна стала.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку D , то для цієї функції завжди існує первісна.

Основні властивості невизначеного інтеграла такі:

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x). \quad (1.2)$$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx. \quad (1.3)$$

3. Інтеграл від диференціалу деякої функції дорівнює самій функції плюс константа:

$$\int dF(x) = F(x) + C. \quad (1.4)$$

4. Невизначений інтеграл від лінійної комбінації функцій дорівнює лінійній комбінації інтегралів (**лінійність**):

$$\int (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)) dx = \alpha_1 \int f_1(x) dx + \alpha_2 \int f_2(x) dx, \quad (1.5)$$

де сталі α_1 та α_2 не дорівнюють нулю одночасно ($\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$).

5. Будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд, якщо змінну інтегрування замінити будь-якою диференційовною функцією цієї змінної (**інваріантність формул інтегрування**), тобто якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то:

$$\int f(u) dx = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C. \quad (1.6)$$

Цю властивість можна записати у вигляді: $\int dF(u)dx = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C$. Підкреслимо роль співвідношення $\int dF(x) = F(x) + C$. Типовим прикладом є інтеграл вигляду:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int d(\tan x) = \tan x + C, C = \text{const.}$$

Звідси випливають, зокрема, наступні формули, які доповнюють основну таблицю інтегралів:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C, \quad (1.7)$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C, \quad (1.8)$$

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + C, \quad (1.9)$$

$$\int f(x+b) dx = F(x+b) + C, \quad (1.10)$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C. \quad (1.11)$$

З геометричного погляду невизначений інтеграл є **однопараметричною сукупністю кривих**:

$$y(x) = F(x) + C,$$

де C – параметр, що мають спільну властивість: усі дотичні до кривих у точках з абсцисами $x = x_0$ паралельні між собою.

Криві сукупності $\{F(x) + C\}$ називають **інтегральними кривими**. Вони не перетинають одна одну і не дотикаються одна до одної. Через кожну точку площини проходить лише одна інтегральна крива (рис. 1.1).

Подамо таблицю основних невизначених інтегралів (тут літера u може позначати як незалежну змінну ($u = x$), так і функцію від незалежної змінної ($u = u(x)$)).

Таблиця 1 – Невизначені інтеграли від елементарних функцій

$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int \text{sh } u du = \text{ch } u + C$
$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$	$\int \text{ch } u du = \text{sh } u + C$

$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$	$\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$
$\int e^u du = e^u + C$	$\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$
$\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$
$\int \cos u du = \sin u + C$	$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$
$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C$
$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$
$\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right + C$	$\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + C$
$\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$	$\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C$
$\int \sqrt{u^2 + a^2} du =$ $= \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} +$ $+ \frac{a^2}{2} \ln \left u + \sqrt{u^2 + a^2} \right + C$	$\int \sqrt{a^2 - u^2} du =$ $= \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} +$ $+ \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C$

Зрозуміло, що:

$$\int dx = x + C;$$

$$\int d(u(x)) = u(x) + C.$$

У справедливості цих формул можна впевнитися, якщо взяти похідні від первісних.

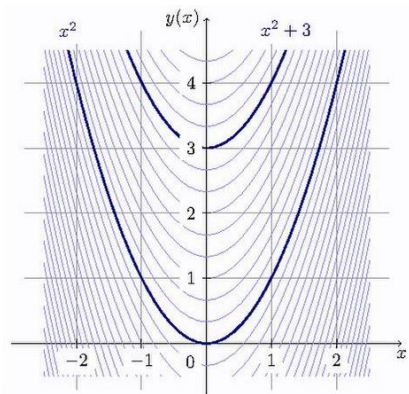


Рис. 1.1. Інтегральні криві

1.2. Основні методи інтегрування

1.2.1. Метод безпосереднього інтегрування

Метод безпосереднього інтегрування полягає у **використанні таблиці інтегралів**, властивостей лінійності та інваріантності формул невизначеного інтеграла. Наприклад, під час інтегрування даної функції використовується властивість лінійності і таблиця інтегралів елементарних функцій:

$$\begin{aligned}\int \left(4x^2 - \frac{3}{x^2 + 9}\right) dx &= 4 \int x^2 dx - 3 \int \frac{dx}{x^2 + 3^2} = \frac{4}{3}x^3 - 3 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C = \\ &= \frac{4}{3}x^3 - \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C.\end{aligned}$$

Ще один приклад:

$$\int (x+1)^{999} dx = \int (x+1)^{999} d(x+1) = \frac{(x+1)^{1000}}{1000} + C.$$

Використання формули бінома Ньютона для розкладання підінтегральної функції тут не потрібне. Використовуючи властивість лінійності (1.10) та першу формулу з таблиці інтегралів, легко отримаємо відповідь.

1.2.2. Метод заміни змінної

Метод інтегрування заміною змінної полягає у введенні нової змінної інтегрування (підстановки). Водночас заданий інтеграл зводиться до нового інтегралу, який є простішим за той, що шукається. Тобто мета цього методу полягає в отриманні більш простого інтеграла, табличного або такого, спосіб обчислення якого нам відомий. Вибір вдалої формули для заміни змінної має велике значення. Але порадити одне загальне правило для вибору вдалої підстановки неможливо. Вміння обрати функцію $\varphi(x)$ так, щоб обчислення інтеграла спростилося, досягається великою кількістю вправ.

Нехай функції $f(x)$ та $\varphi(t)$ задано відповідно в інтервалах $(a; b)$ та $(\alpha; \beta)$, причому функція $\varphi(t)$ відображає проміжок $(\alpha; \beta)$ на $(a; b)$.

Теорема 3 (про заміну змінної). Якщо функція $f(x)$ неперервна в інтервалі $(a; b)$, функція $\varphi(t)$ неперервно диференційовна і строго монотонна в інтервалі $(\alpha; \beta)$, причому $\varphi'(t) \neq 0$, то наявна формула інтегрування заміною змінної:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad (1.12)$$

де у праву частину треба підставити $t = \varphi^{-1}(x)$.

Цю теорему застосовують одним із двох способів. У першому способі йдеться про «**введення функції під знак диференціала**»:

$$\varphi'(x)dx = d(\varphi(x)),$$

а в другому – про «**виведення функції з-під знаку диференціала**»:

$$dx = \varphi'(t)dt.$$

Метод інтегрування введенням під знак диференціала ґрунтується на формулі:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C. \quad (1.13)$$

Тобто під час введення функції під знак диференціала використовується перетворення: $f'(x)dx = d(f(x)) = df$. Деякі типові випадки таких перетворень наведені у табл. 2.

Таблиця 2 – Деякі типові перетворення (операція внесення під знак диференціала)

$x dx = \frac{1}{2} d(x^2)$	$\frac{dx}{x} = d(\ln x)$
$\cos x dx = d(\sin x)$	$\sin x dx = -d(\cos x)$
$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$	$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$
$\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x)$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\operatorname{arcsin} x)$

Під знак диференціала можна вводити сталий множник, змінну інтегрування у будь-якому степені, а також різноманітні функції. Водночас формули таблиці інтегралів узагальнюються завдяки тому, що інтегрування відбувається не за x , а за допоміжною змінною інтегрування $z = \varphi(x)$ (використовується теорема про інваріантність формул інтегрування).

Наприклад, перша формула таблиці інтегралів набуває вигляду:

$$\int (\varphi(x))^n \varphi'(x) dx = \int (\varphi(x))^n d(\varphi(x)) = \int z^n dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(\varphi(x))^{n+1}}{n+1} + C.$$

Аналогічно можна записати усі формули таблиці інтегралів. Радимо зробити цю корисну роботу самостійно. Конкретне значення функції $\varphi(x)$ може бути будь-яким. Наприклад:

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Ще один приклад:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{3-5x} dx &= \int (3-5x)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{5} \int (3-5x)^{\frac{1}{2}} d(3-5x) = \\ &= -\frac{1}{5} \cdot \frac{(3-5x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{2}{15} (3-5x)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

У цьому прикладі використана операція внесення функції під знак диференціала, за якою $d(3-5x) = -5dx$, і табличний інтеграл від степеневі функції. Можна також безпосередньо скористатися формулою (1.11). Аналогічний результат отримаємо, якщо скористаємося підстановкою $z = 3-5x$, звідси $dz = -5dx$, $dx = -\frac{1}{5}dz$. Тобто способів звести підінтегральний вираз до табличного інтеграла існує мінімум три.

Наступний приклад:

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} dx.$$

У цьому прикладі можна помітити, що $d(\cos x - \sin x) = (-\sin x - \cos x)dx = -(\sin x + \cos x)dx$, тоді, використовуючи формулу з таблиці інтегралів, отримаємо:

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} dx = - \int \frac{d(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} = -\ln|\cos x - \sin x| + C.$$

Наступний приклад:

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-8x^2}} dx.$$

Зазначимо, що $(3-8x^2)' = -16x$, $d(3-8x^2) = -16x dx$, тобто у чисельнику нашої підінтегральної функції з точністю до множника (-16) маємо похідну підкореневого виразу знаменника. З формули (1.8) випливає:

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-8x^2}} dx = -\frac{1}{16} \int \frac{d(3-8x^2)}{\sqrt{3-8x^2}} = -\frac{1}{16} \cdot 2\sqrt{3-8x^2} + C = -\frac{1}{8} \sqrt{3-8x^2} + C.$$

Підведення під знак диференціала вимагає певних навичок. На практиці не завжди легко визначити, яку саме функцію вносити під знак диференціала, особливо якщо підінтегральний вираз доволі складний.

1.2.3. Метод інтегрування частинами

Метою методу інтегрування частинами є перехід від складнішого інтеграла $\int u dv$ до простішого («нескладнішого») інтеграла $\int v du$. Наприклад, цей метод використовують для знаходження таких інтегралів:

$$\int (3x - 1)e^{2x} dx, \int x \operatorname{arctg} x dx, \int \cos 2x \cdot e^{3x} dx.$$

Теорема 4 (про інтегрування частинами). Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ неперервно диференційовні в інтервалі $(a; b)$, то в цьому проміжку наявна формула інтегрування частинами:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (1.14)$$

Зауваження:

1. Щоб перейти від функції u до її диференціала du , функцію u диференціюють, тоді її диференціал дорівнює $du = u'(x)dx$. Щоб перейти від диференціала dv до функції v , диференціал dv інтегрують. Зазвичай інтеграл для функції v є табличним.

2. Знаходячи функцію v за її диференціалом dv , можна брати будь-яке значення сталої C , оскільки в остаточний результат вона не входить. Тому для зручності покладають $C = 0$.

Розглянемо основні типи інтегралів, до яких застосовують метод інтегрування частинами.

1. Інтеграли вигляду:

$$\int P_n(x) e^{ax} dx, \int P_n(x) \cos bx dx, \int P_n(x) \sin bx dx,$$

де $P_n(x)$ – поліном степеня n . Щоб знайти інтеграли 1-го типу, покладають $u(x) = P_n(x)$ і застосовують формулу інтегрування частинами n разів, кожного разу понижуючи степінь на одиницю, після чого інтеграл зводиться до табличного інтегралу.

Розглянемо приклади обчислення таких невизначених інтегралів.

Обчислити невизначений інтеграл $\int e^{-x/3} x^3 dx$. У цьому прикладі степінь полінома дорівнює $n = 3$, тому процедура інтегрування частинами виконується тричі. Маємо:

$$\begin{aligned}
\int e^{-x/3} x^3 dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^3; du = 3x^2 dx \\ dv = e^{-x/3} dx; v = \int e^{-x/3} dx = -3e^{-x/3} \end{array} \right| = \\
&= -3e^{-x/3} x^3 + 9 \int e^{-x/3} x^2 dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2; du = 2x dx \\ dv = e^{-x/3} dx; v = \int e^{-x/3} dx = -3e^{-x/3} \end{array} \right| = \\
&= -3e^{-x/3} x^3 + 9 \left(-3e^{-x/3} x^2 + 6 \int e^{-x/3} \cdot x dx \right) = \\
&= \left| \begin{array}{l} u = x; du = dx \\ dv = e^{-x/3} dx; v = \int e^{-x/3} dx = -3e^{-x/3} \end{array} \right| = \\
&= 3e^{-x/3} x^3 + 9 \left(-3e^{-x/3} x^2 + 6 \left(-3e^{-x/3} x + 3 \int e^{-x/3} dx \right) \right) + C = \\
&= 3e^{-x/3} x^3 + 9 \left(-3e^{-x/3} x^2 + 6(-3e^{-x/3} x - 9e^{-x/3}) \right) + C = \\
&= 3e^{-x/3} (x^3 - 9x^2 - 54x - 162) + C.
\end{aligned}$$

Приклад із тригонометричною функцією:

$$\begin{aligned}
\int (3 - 4x) \cos 2x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = 3 - 4x; du = -4dx \\ dv = \cos 2x dx; v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{2} (3 - 4x) \sin 2x + 2 \int \sin 2x dx = \frac{1}{2} (3 - 4x) \sin 2x - \cos 2x + C.
\end{aligned}$$

У цій задачі підінтегральна функція містить поліном першого степеня $n = 1$, тому формула інтегрування частинами застосовується тільки один раз.

2. Інтеграли вигляду:

$$\begin{aligned}
&\int P_n(x) \ln x dx, \int P_n(x) \arcsin x dx, \int P_n(x) \arccos x dx, \\
&\int P_n(x) \operatorname{arctg} x dx, \int P_n(x) \operatorname{arcctg} x dx,
\end{aligned}$$

де $P_n(x)$ – поліном степеня n . Щоб знайти інтеграли 2-го типу, покладають за $u(x)$ функцію при $P_n(x)$, тобто $u(x) = \ln x$, $u(x) = \arcsin x$ і т. ін.

Розглянемо два приклади. Проінтегрувати функцію $f(x) = x \ln x$:

$$\begin{aligned} \int x \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x; du = \frac{dx}{x}; \\ dv = x dx; v = \frac{x^2}{2}; \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

Наступний приклад:

$$\begin{aligned} \int \arctan 3x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arctan 3x; du = \frac{3}{1+9x^2} dx; \\ dv = dx; v = x; \end{array} \right| = \\ &= x \arctan 3x - \int \frac{3x}{1+9x^2} dx, \end{aligned}$$

далі робимо заміну змінної $t = 1 + 9x^2$ або операцію внесення під знак диференціала – результат від цього не залежить. Зазначимо, що $d(1 + 9x^2) = 18x dx$, тому отримаємо відповідь:

$$\begin{aligned} x \arctan 3x - \frac{1}{6} \int \frac{6 \cdot 3x}{1+9x^2} dx &= x \arctan 3x - \frac{1}{6} \int \frac{d(1+9x^2)}{1+9x^2} = \\ &= x \arctan 3x - \frac{1}{6} \ln|1+9x^2| + C. \end{aligned}$$

3. Інтеграли вигляду:

$$\begin{aligned} &\int \sqrt{a^2 - x^2} dx, \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx, \\ &\int e^{ax} \cos(bx) dx, \int \cos(\ln x) dx, \int e^{ax} \sin(bx) dx, \int \sin(\ln x) dx. \end{aligned}$$

Щоб знайти інтеграли 3-го типу з радикалами, обирають $u(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, $u(x) = \sqrt{x^2 \pm a^2}$, інтегрують частинами, перетворюють отриманий інтеграл і розв'язують лінійне рівняння щодо інтеграла, який шукається. Щоб знайти інтеграли 3-го типу із тригонометричними функціями, обирають, наприклад, $u(x) = e^{ax}$, двічі інтегрують частинами і розв'язують лінійне рівняння щодо інтеграла, який шукається. Інтеграли такого типу ще називають **повторними**.

Наприклад:

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx &= \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{x^2 \pm a^2}; du = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}; \\ dv = dx; v = x; \end{array} \right| = x \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \\
 &= x \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \frac{((x^2 \pm a^2) \mp a^2) dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \\
 &= x \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx \pm a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \\
 &= x \sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx \pm a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right|.
 \end{aligned}$$

Перенесемо невідомий інтеграл у ліву частину і остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned}
 2 \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx &= x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right|, \\
 \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx &= \frac{1}{2} \left(x \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \right) + C.
 \end{aligned}$$

Аналогічно можна отримати (доведіть це самостійно), що:

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)).$$

До того ж метод інтегрування частинами також можна використати під час знаходження інтегралів вигляду:

$$\int \frac{x dx}{\cos^2 \alpha x}; \int \frac{x dx}{\sin^2 \alpha x}; \int \frac{x \sin \alpha x dx}{\cos^3 \alpha x}; \int \frac{x \cos \alpha x dx}{\sin^3 \alpha x}.$$

У всіх цих випадках доцільно обирати $u = x$.

1.3. Інтегрування раціональних функцій. Інтегрування деяких ірраціональних та деяких трансцендентних функцій

1.3.1. Інтегрування раціональних функцій

Найпростішою цілою **раціональною функцією** є **поліном** n -го порядку, тобто функція вигляду:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

Коренем полінома $P_n(x)$ називають таке значення x_i (загалом кажучи, комплексне) змінної x , для якого поліном дорівнює нулю, тобто:

$$P_n(x_i) = 0.$$

Кожен поліном $P_n(x)$ з дійсними коефіцієнтами єдиним способом можна розкласти на дійсні множники вигляду:

$$x - x_i \text{ і } x^2 + px + q,$$

де $x_i, i = 1, 2, \dots, t, t \leq n$, – дійсні корені полінома, p, q – також дійсні числа, причому квадратичні множники не мають дійсних коренів і, отже, є нерозкладними на дійсні лінійні множники.

Об'єднуючи однакові множники, поліном $P_n(x)$ можна записати як добуток:

$$P_n(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_k)^{\alpha_k} (x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1} (x^2 + p_2x + q_2)^{\mu_2} \dots (x^2 + p_lx + q_l)^{\mu_l},$$

де $\alpha_i, \mu_j \in \mathbb{N}, i = 1..k, j = 1..l, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k + 2\mu_1 + 2\mu_2 + \dots + 2\mu_l = n$.

Корінь α_i полінома називають **простим**, якщо $\alpha_i = 1$ і **кратним**, якщо $\alpha_i > 1$; число α_i називають **кратністю кореня**.

Раціональною функцією (раціональним дробом) називають відношення поліномів:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}. \quad (1.15)$$

Якщо степінь полінома в чисельнику менший за степінь полінома у знаменнику $n < m$, то дріб називають **правильним**. Якщо ж степінь полінома у знаменнику не перевищує степінь полінома у знаменнику ($n \geq m$), то дріб називають **неправильним**.

Будь-який **неправильний** раціональний дріб можна подати як суму полінома (цілої частини) і правильного раціонального дробу:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{\tilde{P}(x)}{Q_m(x)}, \quad (1.16)$$

де $R_{n-m}(x)$ – ціла частина дробу, $\tilde{P}(x)$ – остача від ділення $P_n(x)$ на $Q_m(x)$.

Елементарним дробом називають правильний раціональний дріб одного з чотирьох типів:

$$1) \frac{A}{x - a};$$

$$2) \frac{A}{(x - a)^n}, n \geq 2;$$

$$3) \frac{Mx + N}{x^2 + px + q};$$

$$4) \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}, n \geq 2.$$

Тут A, a, p, q, M, N – дійсні числа, а квадратний тричлен не має дійсних коренів, тобто $p^2 - 4q < 0$.

Елементарні дроби 1-го та 2-го типів інтегрують безпосередньо за допомогою основних правил інтегрального числення:

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{x-a} dx &= A \int \frac{dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln|x-a| + C, \\ \int \frac{A}{(x-a)^n} dx &= A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = A \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C. \end{aligned}$$

Інтеграл від елементарного дробу 3-го типу зводиться до табличних інтегралів вилученням у чисельнику диференціала знаменника. А саме:

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \left| \begin{array}{l} d(x^2 + px + q) = (2x + p)dx \\ Mx + N = \frac{M}{2}(2x + p) + N - \frac{Mp}{2} \end{array} \right| = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{x^2 + px + q} dx + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \\ &= \frac{M}{2} \ln|x^2 + px + q| + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C. \end{aligned}$$

Інтеграл 4-го типу заміною $t = x + \frac{p}{2}$ зводиться до інтеграла:

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n},$$

який можна знайти за рекурентною формулою (що отримана за методом інтегрування частинами):

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left((2n-3)I_{n-1} + \frac{t}{(t^2 + a^2)^{n-1}} \right), n = 2, 3 \dots$$

Наприклад:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C, \\ I_2 &= \frac{1}{2a^2} \left(I_1 + \frac{t}{t^2 + a^2} \right) = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + \frac{1}{2a^2} \frac{t}{t^2 + a^2}. \end{aligned}$$

1.3.2. Інтегрування раціональних дробів

Правильний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ($n < m$) можна єдиним способом розкласти на суму елементарних дробів:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = & \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \\ & \dots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_{k1}}{x - x_k} + \frac{A_{k2}}{(x - x_k)^2} + \\ & \dots + \frac{A_{k\alpha_k}}{(x - x_k)^{\alpha_k}} + \frac{M_{11}x + N_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \\ & \dots + \frac{M_{1\mu_1}x + N_{1\mu_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1}} + \dots + \frac{M_{l1}x + N_{l1}}{x^2 + p_lx + q_l} + \dots \\ & + \frac{M_{l\mu_l}x + N_{l\mu_l}}{(x^2 + p_lx + q_l)^{\mu_l}}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

У цьому розкладі числа $A_{11}, \dots, A_{1\alpha_1}, \dots, A_{k1}, \dots, A_{k\alpha_k}, M_{11}, N_{11}, \dots, M_{1\mu_1}, N_{1\mu_1}, \dots, M_{l1}, N_{l1}, \dots, M_{l\mu_l}, N_{l\mu_l}$ – деякі дійсні сталі, невизначені коефіцієнти, частина яких може дорівнювати нулю. Їх загальна кількість дорівнює степеню полінома у знаменнику, тобто m .

Отже, невизначений інтеграл від будь-якої раціональної функції завжди виражається через скінченну кількість **елементарних дробів**.

Метод невизначених коефіцієнтів

Щоб знайти невизначені коефіцієнти розкладу (1.17), праву частину рівності зводять до спільного знаменника і прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях x у чисельниках лівої та правої частин. Тобто отримують систему лінійних алгебраїчних рівнянь, з яких і знаходять невизначені коефіцієнти. Наприклад, для наступного дробу шукаємо розкладання на елементарні дробу у вигляді:

$$\frac{x}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 4}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь, з якої вже розрахуємо коефіцієнти:

$$A = \frac{1}{6}; \quad B = -\frac{1}{6}; \quad C = \frac{1}{3}.$$

Інтеграл від такої функції зводиться до суми інтегралів від елементарних дробів виду 1 і 3. Наведемо ще один приклад. Треба знайти інтеграл від раціонального дробу:

$$\int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2(x+1)^2} dx.$$

Розкладаємо підінтегральну функцію на суму елементарних дробів відповідно до (1.17):

$$\frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2},$$

зводимо вираз до загального знаменника і прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x лівої і правої частин рівності:

$$\begin{aligned} & A(x-3)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x-3)^2(x+1) + D(x-3)^2 = \\ & = A(x-3)(x^2 + 2x + 1) + B(x^2 + 2x + 1) + C(x^2 - 6x + 9)(x+1) + D(x^2 - 6x + 9) = \\ & = A(x^3 - x^2 - 5x - 3) + B(x^2 + 2x + 1) + C(x^3 - 5x^2 + 3x + 9) + D(x^2 - 6x + 9) = \\ & = (A+C)x^3 + (-A+B-5C+D)x^2 + (-5A+2B+3C-6D)x - 3A+B+9C+9D = \\ & = 5x^2 + 6x + 9, \end{aligned}$$

після чого складаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} A+C=0; \\ -A+B-5C+D=5; \\ -5A+2B+3C-6D=6; \\ -3A+B+9C+9D=9; \end{cases} \begin{cases} A=-C; \\ B-4C+D=5; \\ 2B+8C-6D=6; \\ B+12C+9D=9; \end{cases} \begin{cases} A=-C; \\ B-4C+D=5; \\ 2B+8C-6D=6; \\ 16C+8D=4; \end{cases} \begin{cases} A=-C; \\ B-4C+D=5; \\ 2B+8C-6D=6; \\ 4C+2D=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-C; \\ B-1+3D=5; \\ 2B+2-10D=6; \\ 4C=1-2D; \end{cases} \begin{cases} A=-C; \\ B+3D=6; \\ B-5D=2; \\ 4C=1-2D; \end{cases} \begin{cases} A=-C=0; \\ B=6-1.5=4.5; \\ D=0.5; \\ C=\frac{1-1}{4}=0. \end{cases}$$

Тоді у підсумку отримаємо невизначений інтеграл від раціонального дробу:

$$\int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2(x+1)^2} dx = 4.5 \int \frac{dx}{(x-3)^2} + 0.5 \int \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{4.5}{x-3} - \frac{0.5}{x+1} + C.$$

Інтеграл від раціональної функції виду $R(\sin x, \cos x)$

Розглянемо нетабличний інтеграл вигляду $R(\sin x, \cos x)$, де підінтегральна функція є **раціональною функцією** від $\sin x$ і $\cos x$. Знайти його можна різними способами, іноді буває достатньо перетворити підінтегральний вираз, використовуючи відомі тригонометричні формули, застосувати методи підведення множника під знак диференціала, заміни змінної або інтегрування частинами тощо.

Для обчислення інтегралів вигляду $\int R(\sin x, \cos x) dx$ існує загальна універсальна схема обчислення, яка ґрунтується на **універсальній тригонометричній підстановці**:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, x \in (-\pi; \pi).$$

Цією підстановкою перетворюють в інтеграл від раціональної функції змінної t , який завжди виражається в елементарних функціях. Запишемо $\sin x$, $\cos x$ і dx через нову змінну t :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; x = 2 \operatorname{arctg} t; dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

За допомогою універсальної підстановки зручно обчислювати інтеграли вигляду:

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c}.$$

Зворотні перетворення можна виконувати з використанням відомих тригонометричних тотожностей:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

Крім універсальної підстановки, є ще три окремі випадки:

- 1) якщо підінтегральна функція **непарна щодо $\sin x$** , то застосовують підстановку $t = \cos x$, $x \in [0; \pi]$;
- 2) якщо підінтегральна функція **непарна щодо $\cos x$** , то застосовують підстановку $t = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
- 3) якщо підінтегральна функція **парна щодо $\sin x$, $\cos x$** , то застосовують підстановку $t = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{3+5 \cos x-4 \sin x}$. Підінтегральна функція раціонально залежить від функцій $\sin x$ і $\cos x$. Застосувавши універсальну підстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, отримаємо інтеграл, який зводиться до табличного:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3+5 \cos x-4 \sin x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+5 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}-4 \cdot \frac{2t}{1+t^2}} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{3(1+t^2)+5(1-t^2)-8t} = 2 \int \frac{dt}{-2t^2-8t+8} = - \int \frac{dt}{t^2+4t-4} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4 - 8} = - \int \frac{dt}{(t+2)^2 - 8} = - \int \frac{d(t+2)}{(t+2)^2 - (\sqrt{8})^2} = \\
&= - \frac{1}{2\sqrt{8}} \ln \left| \frac{t+2-\sqrt{8}}{t+2+\sqrt{8}} \right| + C = - \frac{1}{2\sqrt{8}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 - \sqrt{8}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 + \sqrt{8}} \right| + C.
\end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \frac{\sin x dx}{3 - \cos^2 x}$. Підінтегральна функція непарна щодо $\sin x$, тому застосовуємо підстановку $t = \cos x$, або, що те ж саме, вносимо функцію $\sin x$ під знак диференціала. Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x dx}{3 - \cos^2 x} &= - \int \frac{d(\cos x)}{3 - \cos^2 x} = \{\text{заміна: } t = \cos x\} = - \int \frac{dt}{3 - t^2} = \int \frac{dt}{t^2 - 3} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{3}}{t + \sqrt{3}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\cos x - \sqrt{3}}{\cos x + \sqrt{3}} \right| + C.
\end{aligned}$$

У разі підстановки $t = \operatorname{tg} x$ для випадку 3 будемо мати наступні заміни для функцій:

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + t^2}; \quad x = \operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{dt}{1 + t^2}.$$

Приклад 3

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{2 - \sin^2 x} &= \left\{ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x; \quad dx = \frac{dt}{1 + t^2}; \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{1}{2 - \frac{t^2}{1 + t^2}} \cdot \frac{dt}{1 + t^2} = \\
&= \int \frac{dt}{2(1 + t^2) - t^2} = \int \frac{dt}{t^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctan} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctan} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) + C.
\end{aligned}$$

Інтеграли вигляду $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$

Інтеграли з добутком тригонометричних функцій у деяких степенях беруться за такою схемою:

– Якщо хоча б одне з чисел m або n – **непарне**, то відокремлюють від непарного степеня один співмножник і виражають за допомогою формули $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ парний степінь, що залишився.

– Якщо ж обидва m та n – **парні числа**, то степені понижують, переходячи до подвійного аргумента за допомогою відомих тригонометричних формул:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}; \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Типовими прикладами використання такої заміни є інтеграли від функцій $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ (розберіть їх самостійно). Розглянемо більш складні приклади.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x}$. Функція $\cos x$ у підінтегральному виразі має непарний степінь $n = 3$, тому її і вносимо під знак диференціалу і після заміни змінної та почленного ділення отримаємо табличні інтеграли від степеневих функцій:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^4 x} &= \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x dx}{\sin^4 x} = \int \frac{\cos^2 x \cdot d(\sin x)}{\sin^4 x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x) \cdot d(\sin x)}{\sin^4 x} = \\ &= \{ \text{заміна: } t = \sin x \} = \int \frac{(1 - t^2) \cdot dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{-3t^3} + \frac{1}{t} + C = \\ &= -\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C. \end{aligned}$$

Приклад 2

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \\ &= \frac{1}{16} \left(x - \frac{1}{4} \sin 4x \right) + \frac{1}{16} \cdot \frac{\sin^3 2x}{3} + C = \\ &= \frac{x}{16} - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \end{aligned}$$

Інтеграли вигляду $\int \operatorname{tg}^n x dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x dx$

Для знаходження інтегралів цього типу використовують такі тригонометричні тотожності і рекурентні формули:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} - 1; \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1, \\ \operatorname{tg}^n x &= \operatorname{tg}^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right); \operatorname{ctg}^n x = \operatorname{ctg}^{n-2} x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right). \end{aligned}$$

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx$.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^4 x \, dx &= \int \operatorname{tg}^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx - \int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^2 x \, d(\operatorname{tg} x) - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C. \end{aligned}$$

Тут використана операція підведення під знак диференціала: $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$.

Інтеграли від добутку тригонометричних функцій

Інтеграли від добутку тригонометричних функцій вигляду $\int \sin ax \sin bx \, dx$, $\int \cos ax \cos bx \, dx$, $\int \sin ax \cos bx \, dx$ обчислюють розкладанням підінтегральної функції в суму або різницю за формулами:

$$\begin{aligned} \sin ax \sin bx &= \frac{1}{2} (\cos(a-b)x - \cos(a+b)x), \\ \cos ax \cos bx &= \frac{1}{2} (\cos(a-b)x + \cos(a+b)x), \\ \sin ax \cos bx &= \frac{1}{2} (\sin(a+b)x + \sin(a-b)x). \end{aligned}$$

Приклад 2.

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \cos x \, dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 4x + \sin 2x) dx = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) + C = \\ &= -\frac{1}{8} (\cos 4x + 2 \cos 2x) + C. \end{aligned}$$

1.4. Інтегрування ірраціональних виразів *Дробово-лінійна підстановка.*

Розглядаються інтеграли вигляду

$$\int R \left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, x^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx,$$

де $m_1, n_1, \dots, m_k, n_k \in \mathbb{Z}$, $R(x)$ – раціональна функція. Такі інтеграли зводять до інтегралів від раціональних функцій заміною:

$$x = t^s,$$

де s – найменший спільний знаменник (*наименьшее спільное кратное*) дробів $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$.

Інтеграли вигляду:

$$\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_k}{n_k}} \right) dx$$

зводять до інтегралів від раціональної функції заміною:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s,$$

s – найменший спільний знаменник (*наименьшее спільне кратне*) з множини чисел $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$. Ця підстановка перетворює вихідний інтеграл в інтеграл від раціональної функції змінної t .

Інтеграли від ірраціональних функцій не завжди виражаються через елементарні функції. Наприклад, *еліптичні інтеграли 1-го та 2-го роду* не інтегруються в елементарних функціях:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, 0 < k < 1.$$

Приклади:

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}.$$

Тут $n_1 = 3, n_2 = 2$, тому НСК буде $s = 6$. Застосовуємо підстановку $2x+1 = t^6$. Звідси $(2x+1)^{\frac{2}{3}} = t^{6 \cdot \frac{2}{3}} = t^4$, $\sqrt{2x+1} = t^3$ і:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}} &= \left| \begin{array}{l} 2x+1 = t^6; 2dx = 6t^5 dt; \\ dx = 3t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{3t^5 dt}{t^4 - t^3} = 3 \int \frac{t^2 dt}{t-1} = \\ &= 3 \int \frac{((t^2-1)+1)dt}{t-1} = 3 \int \frac{((t-1)(t+1)+1)dt}{t-1} = 3 \int (t+1)dt + 3 \int \frac{dt}{t-1} = \\ &= 3 \cdot \frac{(t+1)^2}{2} + 3 \cdot \ln|t-1| + C. \end{aligned}$$

$$2) \int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx.$$

Тут $s = 2$, тому $2x-1 = t^2$. Використовуємо заміну $t = \sqrt{2x-1}$, тоді:

$$t = \sqrt{2x-1}; x = \frac{t^2+1}{2}; dx = t dt; x-1 = \frac{t^2+1}{2} - 1 = \frac{t^2-1}{2}.$$

Підставляємо все в наш інтеграл і отримуємо:

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx &= \int \frac{\frac{t^2-1}{2}}{t} \cdot t dt = \frac{1}{2} \int (t^2-1) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{t^3}{3} - t \right) + C = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2x-1} \cdot (2x-1)}{3} - \sqrt{2x-1} \right) + C = \frac{1}{2} \sqrt{2x-1} \left(\frac{2x-1}{3} - 1 \right) + C = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{2x-1} (x-2).\end{aligned}$$

Інтеграли вигляду $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$

Під інтегралом стоїть дробово-раціональна функція від x і кореня $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

1) Інтеграл виду:

$$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

обчислюють вилученням у чисельнику диференціала від підкореневого виразу і, за потреби, вилученням повного квадрата під коренем.

Наприклад:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 + 2x + 2; dt = (2x+2)dx; \\ 3x-1 = \frac{3}{2}(2x+2) - 1 - 3 = \frac{3}{2}(2x+2) - 4; \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2) - 4}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} - 4 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \\ &= \frac{3}{2} \frac{\sqrt{t}}{\frac{1}{2}} - 4 \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+1}} = \\ &= 3\sqrt{x^2+2x+2} - 4 \ln |x+1 + \sqrt{(x+1)^2+1}| + C.\end{aligned}$$

Тут використано виділення повного квадрата $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$.

2) Інтеграл вигляду:

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

зводять до попереднього типу заміною:

$$x - \alpha = \frac{1}{t}.$$

3) Тригонометричні підстановки. Інтеграли вигляду:

$$\int R \begin{pmatrix} x, \sqrt{a^2 - x^2} \\ x, \sqrt{x^2 - a^2} \\ x, \sqrt{x^2 + a^2} \end{pmatrix} dx.$$

У цьому випадку використовуються такі тригонометричні підстановки, які дають змогу позбутися ірраціональності у підінтегральній функції:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a \sin t \text{ або } x = a \cos t; \\ x = \frac{a}{\sin t} \text{ або } x = \frac{a}{\cos t}; \\ x = a \operatorname{tg} t \text{ або } x = a \operatorname{ctg} t. \end{array} \right.$$

Тригонометричні підстановки найефективніші в обчисленні **визначених інтегралів**, де не потрібно вертатися до старої змінної.

Розглянемо ряд прикладів. Обчислити невизначений інтеграл:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{9 - x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \sin t; dx = 3 \cos t dt; \\ \sqrt{9 - x^2} = 3 \cos t \end{array} \right\} = \int 3^2 \cos^2 t dt = \\ &= 9 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{9}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

Для того, щоб повернутися до початкової змінної, необхідно змінну t виразити через x :

$$t = \arcsin \frac{x}{3},$$

тоді:

$$\begin{aligned} \sin 2t &= 2 \sin t \cos t = 2 \cdot \frac{x}{3} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{2x}{9} \sqrt{9 - x^2}, \\ \int \sqrt{9 - x^2} dx &= \frac{9}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) + C = \frac{9}{2} \left(\arcsin \frac{x}{3} + \frac{x}{9} \sqrt{9 - x^2} \right) + C = \\ &= \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + \frac{x}{2} \sqrt{9 - x^2} + C. \end{aligned}$$

Розглянемо приклад на іншу тригонометричну підстановку:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{5}{\cos t}; dx = \frac{5 \sin t}{\cos^2 t} dt; \\ \sqrt{x^2 - 25} = \sqrt{\frac{25}{\cos^2 t} - 25} = 5 \sqrt{\frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t}} = 5 \frac{\sin t}{\cos t} \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int 5 \frac{\sin t}{\cos t} \cdot \frac{\cos^2 t}{25} \cdot \frac{5 \sin t}{\cos^2 t} dt = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt = \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t} dt = \\
&= \int \frac{dt}{\cos t} - \int \cos t dt = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \sin t + C.
\end{aligned}$$

Під час інтегрування скористалися таблицею 1 інтегралів з розділу 1.1. Відповідь необхідно записати, повернувшись до початкової змінної. Для цього виконаємо перетворення:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{5}{\cos t} \Rightarrow t = \arccos \frac{5}{x}, \\
\sin t &= \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{x} \right)^2} = \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}, \\
\operatorname{tg} \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2} + 1}{1 - \operatorname{tg} \frac{t}{2}}; \operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{\sin t}{1 + \cos t} = \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{5}{x}} = \\
&= \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x + 5}; \\
\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2} + 1}{1 - \operatorname{tg} \frac{t}{2}} &= \frac{\frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x + 5} + 1}{1 - \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x + 5}} = \frac{\sqrt{x^2 - 25} + x + 5}{x + 5 - \sqrt{x^2 - 25}},
\end{aligned}$$

звідси остаточно отримаємо відповідь:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x^2} dx = \ln \left| \frac{x + 5 + \sqrt{x^2 - 25}}{x + 5 - \sqrt{x^2 - 25}} \right| - \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} + C.$$

У наступному прикладі використовується підстановка через тангенс:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{(2 + x^2)^3}} &= \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{2} \operatorname{tg} t; dx = \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 t} dt; \\ t = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}; 2 + x^2 = 2(1 + \operatorname{tg}^2 t) = \frac{2}{\cos^2 t} \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{\cos^2 t} dt}{\sqrt{\left(\frac{2}{\cos^2 t} \right)^3}} = \\
&= \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + C = \frac{1}{2} \frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}} + C \\
&= \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{2 + x^2}} + C.
\end{aligned}$$

Інтегрування диференціального бінома (теорема Чебишова)

Теорема Чебишова. Інтеграли виду:

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx \quad (m, n, p \in \mathbb{Q}; a, b \in \mathbb{R})$$

від диференціального бінома виражаються через елементарні функції лише у трьох випадках:

- 1) якщо $p \in \mathbb{Z}$, то застосовують підстановку $x = t^s$, де s – найменший спільний знаменник дробів m та n ;
- 2) якщо $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, то застосовують підстановку $a + bx^n = t^s$, де s – найменший спільний знаменник дробу $p = \frac{k}{s}$ (інакше кажучи, знаменник числа p);
- 3) якщо $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, то застосовують підстановку $ax^{-n} + b = t^s$, де s – найменший спільний знаменник дробу $p = \frac{k}{s}$ (інакше кажучи, знаменник числа p).

Якщо ж $n = 1$, тоді всі ці випадки еквівалентні таким:

- 1) p – ціле, $p \in \mathbb{Z}$;
- 2) m – ціле, $m \in \mathbb{Z}$;
- 3) $m + p$ – ціле, $m + p \in \mathbb{Z}$.

У решті випадків інтеграли від диференціального бінома *не виражаються через елементарні функції*.

Розглянемо приклади обчислення інтегралів від диференціальних біномів.

$$1) \int x^{-1} \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3} dx.$$

У цьому випадку $m = -1$, $n = \frac{1}{3}$, $p = -3$, тобто p – ціле. Отже, ми маємо справу з першим випадком; отже, $x = t^3$, $dx = 3t^2 dt$, звідси:

$$\int x^{-1} \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3} dx = 3 \int t^{-3} (1 + t)^{-3} t^2 dt = 3 \int \frac{dt}{t(1 + t)^3}.$$

Отримали правильний дріб, який розкладаємо на суму найпростіших дробів (див. вище методику інтегрування дробів):

$$\begin{aligned} \frac{1}{t(1+t)^3} &= \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{(1+t)^2} + \frac{D}{(1+t)^3}, \\ 1 &= A(1+t)^3 + Bt(1+t)^2 + Ct(1+t) + Dt. \end{aligned}$$

Для визначення A, B, C, D скористаємося способом порівняння коефіцієнтів і отримаємо в результаті:

$$\begin{cases} t^3 \\ t^2 \\ t^1 \\ t^0 \end{cases} \begin{cases} A + B = 0 \\ 3A + 2B + C = 0 \\ 3A + B + C + D = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1; \\ B = -1; \\ C = -1; \\ D = -1. \end{cases}$$

$$\frac{1}{t(1+t)^3} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^3}.$$

Інтегруємо нашу функцію, використовуючи властивість лінійності, і отримаємо відповідь:

$$\begin{aligned} \int x^{-1} \left(1 + x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3} dx &= 3 \int \frac{dt}{t(1+t)^3} = \\ &= 3 \left(\int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{(1+t)^2} - \int \frac{dt}{(1+t)^3} \right) = \\ &= 3 \left(\ln|t| - \ln|t+1| + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{2(1+t)^2} \right) + C = \\ &= 3 \left(\ln \left| \frac{t}{t+1} \right| + \frac{2t+3}{2(1+t)^2} \right) + C = \{t = \sqrt[3]{x}\} = \\ &= 3 \left(\ln \left| \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1} \right| + \frac{2\sqrt[3]{x}+3}{2(1+\sqrt[3]{x})^2} \right) + C. \end{aligned}$$

$$2) \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

У цьому випадку $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$, $\frac{m+1}{n} = 2$, тобто наявний другий випадок; отже, застосуємо підстановку: $1 + \sqrt[4]{x} = t^3$, звідси $x = (t^3 - 1)^4$, $dx = 4(t^3 - 1)^3 \cdot 3t^2 dt = 12t^2(t^3 - 1)^3 dt$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{t}{(t^3-1)^2} 12t^2(t^3-1)^3 dt = 12 \int t^3(t^3-1) dt = \\ &= 12 \int (t^6 - t^3) dt = 12 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) + C = \\ &= \frac{12}{7} \left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} \right)^7 + 3 \left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} \right)^4 + C. \end{aligned}$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}.$$

У цьому прикладі $m = -\frac{3}{2}$, $n = \frac{3}{4}$, $p = -\frac{1}{3}$. Тоді $\frac{m+1}{n} + p = -1$. Маємо третій випадок, тоді, згідно з формулами, позначимо $1 + x^{-\frac{3}{4}} = t^3$, звідси:

$$x = (t^3 - 1)^{-\frac{4}{3}}, dx = -\frac{4}{3}(t^3 - 1)^{-\frac{7}{3}} \cdot 3t^2 dt = -4(t^3 - 1)^{-\frac{7}{3}} \cdot t^2 dt,$$

і

$$1 + x^{\frac{3}{4}} = 1 + (t^3 - 1)^{-\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}} = 1 + (t^3 - 1)^{-1} = 1 + \frac{1}{t^3 - 1} = \frac{t^3}{t^3 - 1};$$

$$x^{\frac{3}{2}} = (t^3 - 1)^{-\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2}} = (t^3 - 1)^{-2}.$$

Повертаємо до початкового інтегралу, отримаємо:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x^3}}} = -4 \int \frac{(t^3 - 1)^{-\frac{7}{3}} \cdot t^2 dt}{(t^3 - 1)^{-2} \cdot \frac{t}{\sqrt[3]{t^3 - 1}}} = -4 \int t dt = -4 \cdot \frac{t^2}{2} + C =$$

$$= -2t^2 + C = \left\{ t = \sqrt[3]{1 + x^{-\frac{3}{4}}} \right\} = -2 \left(1 + x^{-\frac{3}{4}} \right)^{\frac{2}{3}} + C.$$

Контрольні запитання за темою

1. Що називається первісною та невизначеним інтегралом?
2. Які властивості невизначеного інтеграла вам відомі?
3. Запишіть первісні основних елементарних функцій.
4. Які методи знаходження невизначених інтегралів існують? Поясніть їх застосування на прикладах. Які випадки інтегрування функцій, що містять квадратний тричлен, можна вказати? Наведіть приклади знаходження інтегралів.
5. Які раціональні дроби належать до правильних і неправильних? Наведіть приклади.
6. У чому полягає сутність методу невизначених коефіцієнтів? Наведіть приклади.
7. Які випадки інтегрування тригонометричних функцій можна вказати? Наведіть приклади знаходження інтегралів.
8. Які випадки інтегрування ірраціональних функцій можна вказати? Наведіть приклади знаходження інтегралів.

Завдання для практичних занять та самостійної роботи

Завдання 1.1. Задачі на безпосереднє інтегрування і запам'ятовування таблиці інтегралів

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $\int \left(4x^3 + \frac{1}{x^2} - 5 \right) dx;$ | 6. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx;$ | 11. $\int \frac{dx}{1+9x^2} ;$ |
| 2. $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x} \right) dx;$ | 7. $\int \frac{\cos 8x + \cos 6x}{\cos 7x} dx;$ | 12. $\int \frac{dx}{x^2 - 4} ;$ |
| 3. $\int \frac{3x^2 - 2}{x^3} dx;$ | 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}};$ | 13. $\int \frac{dx}{5 - x^2} ;$ |
| 4. $\int 5^x e^x dx;$ | 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}};$ | 14. $\int \frac{dx}{9x^2 - 1} ;$ |
| 5. $\int (e^{2x} + 7x^3 e^x) e^{-x} dx;$ | 10. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5}};$ | 15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4x^2}}.$ |

Завдання 1.2. Задачі на заміну змінної у невизначеному інтегралі

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 + 3x^2}};$ | 6. $\int \frac{a^x dx}{a^{2x} - 9};$ | 11. $\int 5^{x^4} x^3 dx;$ |
| 2. $\int \sqrt{x^2 + k} \cdot x dx;$ | 7. $\int \frac{x^2 dx}{5 - x^6};$ | 12. $\int \frac{x^5}{3 - x^6} dx;$ |
| 3. $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{4x} - 1}};$ | 8. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6 + 3}};$ | 13. $\int \frac{e^x}{3 + 4e^x} dx;$ |
| 4. $\int \frac{2^x dx}{1 + 4^x};$ | 9. $\int \frac{\sqrt{3 - \ln x} dx}{x};$ | 14. $\int \frac{x^2 - x}{(x - 2)^2} dx = [x - 2 = t];$ |
| 5. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{4 - \cos^2 x}};$ | 10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{2 \operatorname{tg} x + 1}};$ | 15. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{2 + \cos^2 x}};$ |
| | | 16. $\int x \sqrt{a - x} dx = [a - x = t^2].$ |

Завдання 1.3. Задачі на інтегрування шляхом підведення функції під знак диференціала

- | | | |
|--|---|---|
| $\int \sin^2 x \cos x dx;$ | $\int \sin^8 x \cos x dx;$ | $\int e^{3 \operatorname{arctg} x} \frac{dx}{1 + x^2};$ |
| $\int \frac{x dx}{x^4 + 9};$ | $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx;$ | $\int 3^{\operatorname{ctg} x} \frac{dx}{\sin^2 x};$ |
| $\int x \cos x^2 dx;$ | $\int \frac{\cos x}{2 + 2 \sin x} dx;$ | $\int \frac{e^x dx}{(7 - e^x)^2};$ |
| $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$ | $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx;$ | $\int \frac{1}{a^x dx};$ |
| $\int \frac{x^5 dx}{x^6 + 4};$ | $\int \frac{1}{\sin^2 5x} dx;$ | $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$ |

Завдання 1.4. Задачі на інтегрування частинами $\int u dv = uv - \int v du$

$$\begin{array}{ll} \int x^2 \sin 2x dx; & \int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx; \\ \int \frac{\ln x}{x^2} dx; & \int (5+x^2) 4^x dx; \\ \int \arcsin x dx; & \int \cos(\ln x) dx; \\ \int \frac{\arccos x}{\sqrt{1+x}} dx; & \int e^x \sin x dx; \\ \int (x^2 - 2x + 3) \cos x dx; & \int \sqrt{a^2 - x^2} dx. \end{array}$$

Завдання 1.5. Задачі на інтегрування деяких функцій, що містять квадратний тричлен

$$\begin{array}{ll} 1. \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}; & 2. \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}; \\ 3. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 3}}; & 4. \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3}}; \\ 5. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x}}; & 6. \int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - x^2}}; \\ 7. \int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{x^2 + 6x}}; & 8. \int \frac{xdx}{\sqrt{1 - 2x - 3x^2}}; \\ 9. \int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2 - 12x + 1}}; & 10. \int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{2 - x - x^2}}; \\ 11. \int \sqrt{3 + 4x - x^2} dx; & 12. \int \sqrt{x^2 + 2x + 6} dx. \end{array}$$

Завдання 1.6. Задачі на інтегрування раціональних дробів

$$\begin{array}{ll} 1. \int \frac{x^2 + 2x + 6}{(x-1)(x-2)(x-4)} dx; & 2. \int \frac{x^2 + 1}{(x-1)^3(x+4)} dx; \\ 3. \int \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^2 + 2} dx; & 4. \int \frac{dx}{x^3 + 2x}; \\ 5. \int \frac{x^3 + 2}{x^3 - 4x} dx; & 6. \int \frac{2x^2 - 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx; \\ 7. \int \frac{x^6 + x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x^4 + x} dx; & 8. \int \frac{2t^5 - 2t + 1}{1 - t^4} dt; \\ 9. \int \frac{dx}{x^4 + a^2 x^2}; & 10. \int \frac{dx}{x^4 - a^2}; \\ 11. \int \frac{2x + 1}{x^3 - 3x^2 - x + 3} dx; & 12. \int \frac{x^2 + 3x^5}{x^6 - 9} dx. \end{array}$$

Завдання 1.7. Знайти невизначені інтеграли (задачі на різні методи інтегрування)

$$\begin{array}{lll} 1) \int \frac{2x^3 - 5\sqrt[3]{x^7} + 3x^5}{4x^4} dx; & 2) \int (8x^3 - 6 \cos x + e^x) dx; & 3) \int \frac{dx}{4x - 7}; \\ 4) \int \sin(5x + 3) dx; & 5) \int \sqrt{1 - 6x} dx; & 6) \int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{tg}^3 7x}}{\cos^2 7x} dx; \\ 7) \int \frac{e^{\operatorname{arccotg} 6x}}{1 + 36x^2} dx; & 8) \int \frac{dx}{\arcsin 2x \cdot \sqrt{1 - 4x^2}}; & 9) \int \frac{dx}{9x^2 + 5}; \\ 10) \int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x^2}}; & 11) \int \frac{xdx}{5x^2 - 1}; & 12) \int \frac{(x-2)dx}{\sqrt{6x^2 + 4}}; \end{array}$$

- 13) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x - 3}$; 14) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 3x + 1}}$; 15) $\int \frac{(x-4)dx}{3x^2 - 5x + 7}$;
 16) $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{8+x-7x^2}}$; 17) $\int \frac{2x^5 - 6x^3 + 4x^2 + 7}{x-2} dx$; 18) $\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x^2 - x - 12)} dx$;
 19) $\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} dx$; 20) $\int \frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} dx$; 21) $\int x^2 \cos 3x dx$;
 22) $\int (3x-1)e^{5x} dx$; 23) $\int \ln(x-4) dx$; 24) $\int x \operatorname{arctg} 4x dx$;
 25) $\int \frac{dx}{2 \cos x - 3 \sin x + 8}$; 26) $\int \frac{dx}{7 - 2 \cos^2 x - 5 \sin^2 x}$; 27) $\int \frac{\sin x}{(1 - \cos x)^3} dx$;
 28) $\int \sin^5 3x \cos^6 3x dx$; 29) $\int \sin^4 4x \cos^2 4x dx$; 30) $\int \sin 6x \cos 9x dx$;
 31) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$; 32) $\int \frac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt[3]{2x-1} + 1} dx$; 33) $\int x\sqrt{4-x^2} dx$;
 34) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3} dx$; 35) $\int x^2 \sqrt{9-x^2} dx$; 36) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+25x^2}}$

Завдання 1.8 (контрольне). Знайти невизначені інтеграли (задачі на різні методи інтегрування)

- а) $\int x\sqrt{5x^2+2} dx$; б) $\int x^2 e^{3x} dx$;
 в) $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}} dx$; г) $\int \frac{x^2+1}{x(x+1)(x-1)} dx$; д) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{3x - \sqrt[3]{x^2}}$.

Завдання 1.9 (контрольне). Знайти невизначені інтеграли (задачі на різні методи інтегрування)

- а) $\int \frac{dx}{(3x-2)^7}$; б) $\int \ln(x^2+1) dx$;
 в) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$; г) $\int \frac{x^2-x+4}{(x-3)(x-2)(x+1)} dx$; д) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$.

2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

2.1. Визначений інтеграл: інтегральні суми Рімана, основні властивості

На відміну від невизначеного інтегралу, визначений інтеграл є **функціоналом**, який відображає функцію на простір дійсних чисел і залежить від відрізка інтегрування функції. Існує декілька видів визначеного інтеграла. Одним із базових інтегралів, що розглядаються в математичному аналізі, є **інтеграл Рімана**. Визначений інтеграл функції однієї змінної вводиться через поняття криволінійної трапеції та інтегральних сум Рімана. Б. Ріман (1854) формалізував поняття інтеграла, що було розроблене Ньютоном та Лейбніцом, як площу фігури, що обмежена графіком функції та віссю абсцис.

Означення інтегральних сум

Плоска фігура D , що обмежена на декартовій площині графіком функції $y = f(x)$, віссю абсцис, відрізками прямих $x = a$, $x = b$, називається **криволінійною трапецією**.

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$. Розіб'ємо цей відрізок на n довільних частин точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

і оберемо на кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ довільну точку ξ_i .

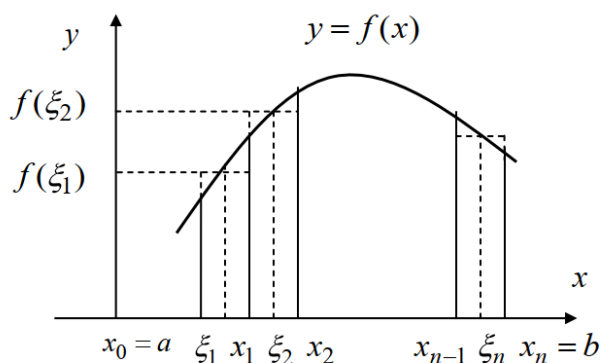


Рис. 2.1. Криволінійна трапеція і відрізки інтегральних сум

Побудуємо суму:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Цю суму називають **інтегральною сумою Рімана** функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Позначимо через λ довжину **найбільшого відрізка** Δx_i : $\lambda = \max_i \Delta x_i$.

Визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ називають скінченну границю інтегральної суми при $\lambda \rightarrow 0$ за умови, що вона не залежить від способу розбиття відрізка $[a, b]$, вибору точок ξ_i , і позначають так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Функція $f(x)$, для якої на $[a; b]$ існує визначений інтеграл, називається **інтегрованою на цьому відрізку**.

До того ж існують ще два означення визначеного інтеграла.

Означення 1 (у термінах границь). Якщо для функції $f(x)$, що задана на відрізку $[a, b]$, для будь-якого розбиття R відрізка і для будь-якого набору проміжних точок P відрізків розбиття існує скінченна границя I інтегральних сум $\sigma(f, R, P) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ при $\lambda \rightarrow 0$, тобто:

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

яка не залежить від вибору розбиття R і набору проміжних точок P , то така функція називається **інтегрованою за Ріманом** на відрізку $[a, b]$, а значення границі – **визначеним інтегралом Рімана**, що позначається так:

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Означення 2 (у термінах $\varepsilon - \delta$). Якщо $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall R \{x_k\} \forall P \{\xi_i\} \lambda < \delta \Rightarrow |I - \sigma(R, P)| < \varepsilon$, то число I називається границею інтегральних сум і позначається:

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma(R, P).$$

У цьому випадку функція $f(x)$ називається **інтегрованою за Ріманом** на відрізку $[a; b]$. Числа a і b називаються відповідно нижньою і верхньою межею інтегрування; функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією; $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, x – змінною інтегрування; $[a; b]$ – проміжком інтегрування.

Геометричний та фізичний зміст визначеного інтеграла

Геометричний зміст визначеного інтеграла функції однієї змінної природно впливає з його означення.

1) Площа S криволінійної трапеції, обмеженої прямими $y = 0$, $x = a$, $x = b$ і графіком функції $y = f(x) \geq 0$, дорівнює визначеному інтегралу від цієї функції:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

У цьому полягає **геометричний зміст визначеного інтеграла**: визначений інтеграл від невід'ємної функції чисельно дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції.

2) Робота A змінної сили $F(x)$, яка діє на відрізку $[a; b]$, дорівнює визначеному інтегралу від сили:

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

3) Шлях s , пройдений точкою за проміжок часу від $t = a$ до $t = b$, дорівнює визначеному інтегралу від швидкості $v(t)$:

$$s = \int_a^b v(t) dt.$$

4) Маса m неоднорідного стрижня на відрізку $[a; b]$ дорівнює визначеному інтегралу від густини $\gamma(x)$ цього стрижня:

$$m = \int_a^b \gamma(x) dx.$$

Умови інтегровності функції (класи інтегрованих за Ріманом функцій):

Теорема 1 (необхідна умова інтегровності). Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a; b]$, то вона **обмежена** на цьому відрізку.

Теорема 2 (достатня умова інтегровності). Якщо функція $f(x)$ **неперервна** на відрізку $[a; b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ **обмежена** на відрізку $[a; b]$ і **неперервна в ньому скрізь, крім скінченного числа точок**, то вона інтегровна на цьому відрізку.

Теорема 4. Будь-яка обмежена і монотонна на відрізку функція інтегровна на цьому відрізку.

Зауваження. Неперервність функції є достатньою умовою інтегрованості. Однак визначений інтеграл може існувати і для деяких розривних функцій, зокрема для обмеженої на відрізку функції, яка має скінченне число точок розриву.

Надалі здебільшого будемо розглядатимемо лише неперервні функції.

Властивості визначеного інтеграла

У визначеного інтеграла значно більше властивостей, ніж у невизначеного, оскільки він залежить не тільки від функції, що інтегрується, а й від відрізка інтегрування цієї функції.

1. Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(z)dz.$$

2. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. При перестановці меж інтегрування інтеграл змінює знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

4. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на максимальному з відрізків $[a; b]$, $[a; c]$, $[c; b]$ то справедлива рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

(адитивність визначеного інтеграла).

5. Сталій множник C можна винести за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

6. Визначений інтеграл від суми (різниці) інтегровних функцій дорівнює сумі (різниці) визначених інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

7. Якщо всюди на відрізку $[a; b]$ маємо $f(x) \geq 0$, ($a < b$), то:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

(збереження знаку підінтегральної функції визначеним інтегралом).

8. Якщо всюди на відрізку $[a; b]$ виконується нерівність $f(x) \leq g(x)$, ($a < b$), то:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

(монотонність визначеного інтеграла).

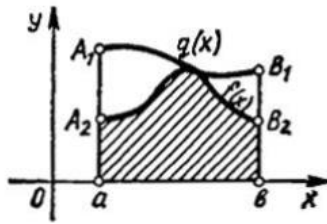


Рис. 2.2. Монотонність визначеного інтеграла

9. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a; b]$, ($a < b$), то:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

тобто модуль визначеного інтеграла функції на відрізку не перевищує інтеграла від модуля цієї функції на тому ж самому відрізку.

10. Якщо $\forall x \in [a; b]$, ($a < b$): $|f(x)| \leq C$, то:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq C(b - a).$$

Це корисна в багатьох застосуваннях оцінка визначеного інтеграла.

11. Якщо m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ ($a < b$), то справедливою є нерівність:

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

(верхня і нижня оцінки інтеграла за областю).

12. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то на цьому відрізку знайдеться точка c така, що:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a) \quad (2.1)$$

$$\Rightarrow f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

(теорема про середнє значення функції). Рівність (2.1) називається **формулою середнього значення**, а величина $f(c)$ – середнім значенням функції на відрізку $[a; b]$.

2.2. Інтеграл із змінною верхньою межею. Формула Ньютона–Лейбніца

Нехай функція $f(x)$ неперервна на $[a; b]$, тоді вона інтегровна на будь-якому відрізку $[a; x] \subset [a; b]$, тобто для довільного $x \in [a; b]$ існує інтеграл $\int_a^x f(t) dt$ (оскільки визначений інтеграл не залежить від змінної інтегрування, то ми позначили її через t , щоб не плутати з верхньою межею x). Заданий інтеграл, очевидно, є **функцією від x** . Позначимо цю функцію через $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (2.2)$$

і назвемо **інтегралом із змінною верхньою межею**.

Геометрично (рис. 2.3) при $f(x) \geq 0$ функція $\Phi(x)$ дорівнює площі заштрихованої криволінійної трапеції. Розглянемо основну властивість функції $\Phi(x)$.

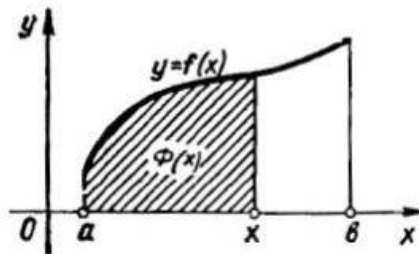


Рис. 2.3. Інтеграл зі змінною верхньою межею

Теорема 1. Похідна визначеного інтеграла зі змінною верхньою межею по верхній межі дорівнює значенню підінтегральної функції для цієї межі:

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x). \quad (2.3)$$

Наслідок. Для будь якої неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$ існує первісна функція. Водночас однією з первісних функцій є визначений інтеграл (2.2).

Теорема 2. Якщо $F(x)$ є будь-якою первісною від неперервної функції $f(x)$, $x \in [a; b]$, то справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (2.4)$$

Ця формула називається **формулою Ньютона–Лейбніца**. Формула встановлює прямий зв'язок між первісною функцією і значенням визначеного інтегралу.

Різницю $F(b) - F(a)$ умовно позначають символами:

$$F(x) \Big|_a^b,$$

тому **формула Ньютона–Лейбніца** записується ще й так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Формула Ньютона–Лейбніца дає практично зручний спосіб обчислення визначеного інтеграла: визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює різниці значень довільної її первісної, обчислених для верхньої і нижньої меж інтегрування.

2.2.1. Методи обчислення визначених інтегралів

Під час обчислення визначених інтегралів широко використовують **метод заміни змінної** (або **метод підстановки**) і **метод інтегрування частинами**. Тобто використовують ті ж самі методи, що і для невизначеного інтегралу, але вже з урахуванням проміжку інтегрування.

Теорема 3. Нехай виконуються умови:

- 1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$;
- 2) функція $x = \varphi(t)$ і її похідна $x' = \varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha; \beta]$;
- 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ і $\forall t \in (\alpha; \beta): a < \varphi(t) < b$.

Тоді виконується рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (2.5)$$

Формула (2.5) називається **формулою заміни змінної** (або **підстановки**) у визначеному інтегралі.

Зауваження 1. Якщо під час обчислення невизначеного інтеграла заміною $x = \varphi(t)$ у первісній функції необхідно було від змінної t повернутися до змінної x , то під час обчислення визначеного інтеграла замість цього треба змінити межі інтегрування. Нижня межа α знаходиться як розв'язок рівняння $a = \varphi(t)$ відносно невідомого t , а верхня межа β – з рівняння $b = \varphi(t)$.

Зауваження 2. Часто замість підстановки $x = \varphi(t)$ застосовують підстановку $t = \psi(x)$. У цьому випадку нові межі інтегрування визначаються безпосередньо: $\alpha = \psi(a)$, $\beta = \psi(b)$. Проте тут треба мати на увазі, що функція $x = x(t)$, обернена до функції $\psi(t)$, має, як і раніше, задовольняти всі умови Теорема 3. Зокрема, функція $x(t)$ в межах інтегрування має бути **неперервно диференційовною функцією** t і при зміні t від α до β змінна $x(t)$ має змінюватися від a до b .

Важливими є **наслідки для парних і непарних функцій**:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \quad (2.6.1)$$

коли $f(x)$ – **парна функція**;

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0, \quad (2.6.2)$$

коли $f(x)$ – **непарна функція**. Ці властивості можна сформулювати так:

- Визначений інтеграл парної функції в симетричних межах від $-a$ до a дорівнює подвійному інтегралу цієї ж функції в межах від 0 до a .
- Визначений інтеграл непарної функції в симетричних межах від $-a$ до a дорівнює нулю.

Знайдені формули є дуже корисними. Можна, наприклад, одразу, не виконуючи обчислень, сказати, що:

$$\int_{-a}^a x^6 \sin x \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 x \cos^8 x \, dx = 0.$$

Приклад. Обчислити інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_1^6 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+3}} &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x+3}; x = t^2 - 3; dx = 2t dt \\ x_1 = 1; t_1 = \sqrt{1+3} = 2; \\ x_2 = 6; t_2 = \sqrt{6+3} = 3; \end{array} \right| = 2 \int_2^3 \frac{(t^2 - 3)^2 t dt}{t} = \\ &= 2 \int_2^3 (t^2 - 3)^2 dt = 2 \int_2^3 (t^4 - 6t^2 + 9) dt = 2 \left(\frac{t^5}{5} - 6 \cdot \frac{t^3}{3} + 9t \right) \Big|_2^3 = \\ &= 2 \left(\frac{t^5}{5} - 2t^3 + 9t \right) \Big|_2^3 = 2 \left(\frac{3^5}{5} - 2 \cdot 27 + 27 - \frac{2^5}{5} + 4 \cdot 8 - 18 \right) = \\ &= 26.4. \end{aligned}$$

Метод інтегрування функції частинами для визначеного інтегралу формулюється такою теоремою:

Теорема 4. Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають на відрізку $[a; b]$ неперервні похідні, то справедлива формула інтегрування частинами:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (2.7)$$

Формула (2.7) називається **формулою інтегрування частинами визначеного інтеграла**.

Приклади. Обчислити визначені інтеграли:

$$\begin{aligned} 1. \int_1^e x^3 \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x; du = \frac{dx}{x}; \\ dv = x^3 dx; v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \end{array} \right| = \frac{x^4}{4} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{4} \int_1^e x^4 \cdot \frac{dx}{x} = \\ &= \frac{e^4}{4} - 0 - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 dx = \frac{e^4}{4} - \frac{x^4}{16} \Big|_1^e = \frac{e^4}{4} - \frac{e^4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3e^4 + 1}{16}; \\ 2. \int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x; du = \frac{dx}{1+x^2}; \\ dv = dx; v = x \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(x^2 + 1)}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \ln|x^2 + 1| \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln 2. \end{aligned}$$

2.2.2. Застосування визначеного інтеграла

Розглянемо основні застосування визначеного інтеграла в геометрії.

1. Обчислення площ плоских фігур

Площа **криволінійної трапеції**, що обмежена неперервною кривою $y = f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$, $x = b$ ($a < b$), знаходиться за формулою:

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Якщо ж плоска фігура обмежена двома неперервними кривими, рівняння яких: $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, причому $f_2(x) \geq f_1(x)$ скрізь на відрізку $[a; b]$, та двома прямими: $x = a$, $x = b$ ($a < b$), то площа фігури визначається за формулою:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

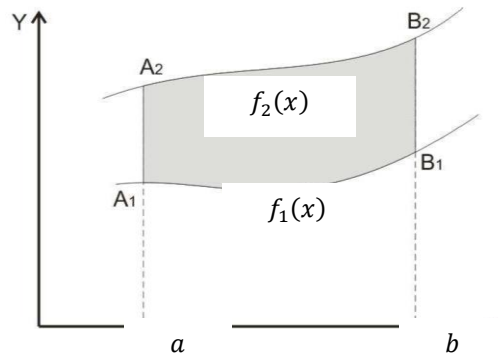


Рис. 2.4. Криволінійна трапеція, обмежена двома функціями

2. Довжина дуги кривої

Плоска крива, задана параметрично рівняннями. Нехай крива ℓ не має самоперетинів і задана параметричним рівнянням:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta,$$

де $\varphi(t), \psi(t)$ – неперервно диференційовні функції на $[\alpha; \beta]$. Тоді довжина кривої ℓ дорівнює:

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt,$$

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Залежно від задачі можна скористатися однією з цих двох формул.

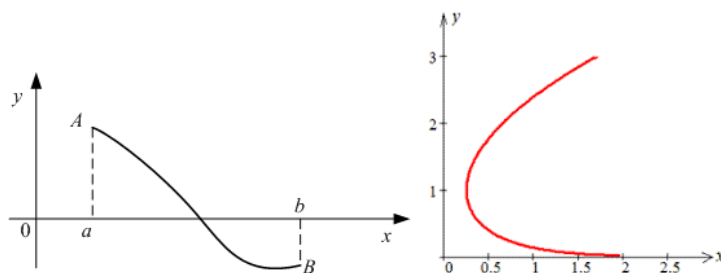


Рис. 2.5. Дуги кривої

3. Об'єм тіла обертання

Нехай V – тіло, отримане внаслідок обертання навколо осі Ox криволінійної трапеції з основою $[a; b]$, обмеженою функцією $y = f(x)$. Об'єм цього тіла V дорівнює:

$$V_{0x} = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Нехай V – тіло, отримане внаслідок обертання навколо осі Ox області σ , обмеженої лініями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$, і $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$, $\forall x \in [a; b]$. Об'єм цього тіла V буде дорівнювати:

$$V_{0x} = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx.$$

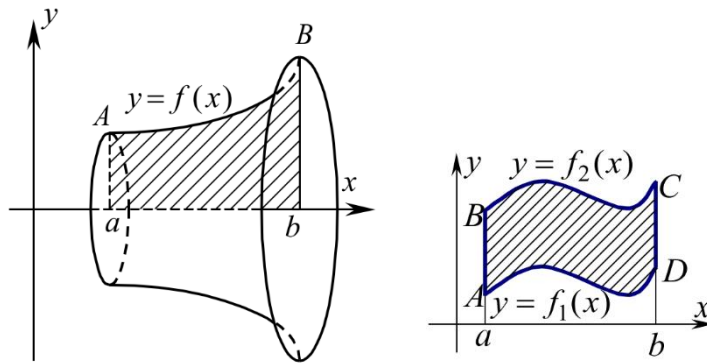


Рис. 2.6. Тіла обертання навколо осі Ox

Об'єм тіла обертання навколо осі Oy визначається формулою:

$$V_{0y} = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) dx.$$

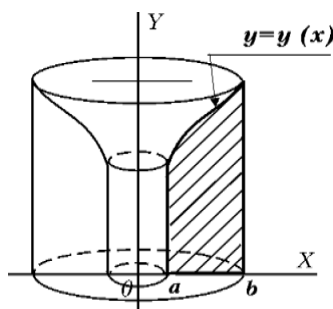


Рис. 2.7. Тіло обертання навколо осі Oy

Приклад. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням кривої $y = e^{-x}$, $y = 0$, на інтервалі $0 \leq x \leq +\infty$: а) навколо осі Ox ; б) навколо осі Oy .

Рівняння підінтегральних функцій мають вигляд:

а) $y^2 = e^{-2x}$;

б) $x \cdot y = x e^{-x}$.

Межами інтегрування за умовою є $0 \leq x \leq +\infty$. Тоді об'єм тіла обертання навколо осі Ox визначиться інтегралом:

$$\begin{aligned} V_{0x} &= \pi \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \pi \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-2x} dx = -\frac{\pi}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-2x} d(-2x) = \\ &= -\frac{\pi}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-2x} \Big|_0^b = -\frac{\pi}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} (e^{-2b} - 1) = \frac{\pi}{2}; \end{aligned}$$

Знайдемо об'єм тіла обертання навколо осі Oy , для цього скористаємося формулою інтегрування визначеного інтеграла частинами:

$$\begin{aligned} V_{0y} &= 2\pi \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x; du = dx; \\ dv = e^{-x} dx; v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}; \end{array} \right| = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-2\pi \cdot x \cdot e^{-x} \Big|_0^b + 2\pi \int_0^b e^{-x} dx \right] = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-2\pi \cdot b \cdot e^{-b} + 2\pi \int_0^b e^{-x} dx \right] = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-2\pi \cdot b \cdot e^{-b} - 2\pi e^{-x} \Big|_0^b \right] = -2\pi \lim_{b \rightarrow +\infty} [b \cdot e^{-b} + e^{-b} - 1] = \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Перші два доданки під знаком границі мають границею нуль, тому залишається тільки одиниця. В цьому прикладі використано означення невласного інтеграла 1-го роду, які розглядаються далі.

Контрольні запитання за темою

1. Означення інтегральної суми функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.
2. Означення визначеного інтеграла Рімана.
3. Властивості визначеного інтеграла:
 - 3.1. Властивість збереження знака підінтегральної функції визначеним інтегралом.
 - 3.2. Властивість лінійності визначеного інтеграла відносно підінтегральної функції.
 - 3.3. Властивість адитивності визначеного інтеграла відносно проміжку інтегрування.
 - 3.4. Теорема про оцінку визначеного інтеграла.
 - 3.5. Теорема про середнє значення.
 - 3.6. Теореми про інтегрування нерівностей.
4. Визначений інтеграл як функція верхньої змінної межі інтегрування. Теорема про її похідну.
5. Формула Ньютона–Лейбніца.

6. Формула заміни змінної у визначеному інтегралі.

7. Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Завдання для практичних занять та самостійної роботи

Завдання 2.1. Обчислити визначені інтеграли за формулою Ньютона–Лейбніца

1. $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{4dx}{x^2 + 5}$;
2. $\int_{-3}^0 \frac{3dx}{\sqrt{25 + 5x}}$;
3. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{7dx}{4 \sin^2 3x}$;
4. $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$;
5. $\int_{-\pi}^{\pi} 3 \sin \frac{x}{2} dx$;
6. $\int_3^6 6\sqrt{x+1} dx$;
7. $\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} 12 \operatorname{ctg} 3x dx$;
8. $\int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{4-3x}}$;
9. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 9}$;
10. $\int_1^e \left(3 + \frac{2}{x}\right) dx$;
11. $\int_1^2 \frac{3dx}{2\sqrt{x^2 + 16}}$;
12. $\int_0^{\frac{5}{2}} \frac{7dx}{\sqrt{8-x^2}}$;
13. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{3 \cos^2 5x}$;
14. $\int_3^5 \frac{5dx}{3-x^2}$;
15. $\int_{-\pi}^{\pi} \left(2x + \cos \frac{x}{3}\right) dx$;
16. $\int_0^7 \sqrt[3]{x+1} dx$;
17. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (3x - 2 \operatorname{tg} x) dx$;
18. $\int_{-2}^2 \frac{4dx}{11+x^2}$;
19. $\int_{-1}^0 \left(4 + \sqrt[3]{x^2}\right) dx$;
20. $\int_1^3 \left(4 + \frac{2}{x^2}\right) dx$;
21. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2dx}{5 \cos^2 x}$;
22. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-2}}$;
23. $\int_0^1 (3x^2 - 2^x) dx$;
24. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;
25. $\int_0^1 (3e^x - 2\sqrt{7x}) dx$;
26. $\int_1^2 (4x+9)^3 dx$;
28. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (4x + 3 \cos 5x) dx$;

$$27. \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{8}} (4x - 3 \operatorname{tg} 2x) dx;$$

$$29. \int_1^2 \frac{6dx}{x^2 - 9} ;$$

$$30. \int_1^2 \left(3x + \frac{4}{x^3} \right) dx ;$$

Завдання 2.2. Обчислити визначені інтеграли використовуючи відповідну заміну змінної

$$1. \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1 + x^2} dx;$$

$$3. \int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 2} dx ;$$

$$5. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx ;$$

$$7. \int_0^{-3} \frac{4x}{\sqrt{25 + 3x^2}} dx ;$$

$$9. \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx ;$$

$$11. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 - \cos x} dx ;$$

$$13. \int_0^1 x^3 \sqrt{4 + 5x^4} dx ;$$

$$15. \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx ;$$

$$17. \int_0^1 3x^2 e^{x^3} dx ;$$

$$19. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1 + x^6} ;$$

$$21. \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x \sqrt{1 - \ln^2 x}} ;$$

$$23. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{4 - 3x^2}} ;$$

$$25. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^3 x dx ;$$

$$2. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{12x^5}{\sqrt{x^6 + 1}} dx ;$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx ;$$

$$6. \int_0^1 \frac{3x}{x^2 + 1} dx ;$$

$$8. \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + 4}} dx ;$$

$$10. \int_0^1 \frac{x^3}{x^8 + 1} dx ;$$

$$12. \int_2^5 \frac{x - 2}{\sqrt{5 + 4x - x^2}} dx ;$$

$$14. \int_{-\pi/6}^{\pi/3} \sin^2 x \cos x dx ;$$

$$16. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} ;$$

$$18. \int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\pi^2} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx ;$$

$$20. \int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx ;$$

$$22. \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} x \sqrt{x^2 + 1} dx ;$$

$$24. \int_{\pi/18}^{\pi/6} \frac{12 \cot 3x}{\sin^2 3x} dx ;$$

$$26. \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} dx ;$$

$$27. \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx ;$$

$$29. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx ;$$

$$28. \int_{-1}^0 \frac{2x^2 dx}{4x^3 - 9} ;$$

$$30. \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{x dx}{\cos^2(x^2)} .$$

Завдання 2.3. Обчислити визначені інтеграли за формулою інтегрування частинами

$$1. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (x - 7) \cos 2x dx ;$$

$$3. \int_1^2 (3x + 5) e^{3x} dx ;$$

$$5. \int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} 2x dx ;$$

$$7. \int_6^7 \ln(x - 5) dx ;$$

$$9. \int_0^{\pi} (3x + 4) \cos \frac{x}{2} dx ;$$

$$11. \int_{-1}^2 (2x - 5) e^{-x} dx ;$$

$$13. \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{2}} (x + 3) \sin 2x dx ;$$

$$15. \int_1^3 (5x + 2) \ln x dx ;$$

$$17. \int_0^1 \arccos x dx ;$$

$$19. \int_{\frac{1}{2}}^1 (6x + 7) e^{2x} dx ;$$

$$21. \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (3x - 2) \sin x dx ;$$

$$23. \int_2^4 x \ln(x - 1) dx ;$$

$$25. \int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx ;$$

$$2. \int_{\pi/2}^{\pi} \arccos \frac{x}{3} dx ;$$

$$4. \int_{\pi/8}^{\pi/4} (x - 4) \cos 2x dx ;$$

$$6. \int_{\pi/3}^{\pi/2} (x + 2) \sin \frac{x}{2} dx ;$$

$$8. \int_0^2 (4x - 9) 3^x dx ;$$

$$10. \int_1^e x^3 \ln x dx ;$$

$$12. \int_{\pi/18}^{\pi/9} 6 \operatorname{arctg} 3x dx ;$$

$$14. \int_{\pi/6}^{\pi/4} 4x \operatorname{arctg} x dx ;$$

$$16. \int_{\pi/4}^{\pi/2} (3x + 4) \cos x dx ;$$

$$18. \int_0^1 (2x - 3) e^x dx ;$$

$$20. \int_1^4 \sqrt{x} \ln x dx ;$$

$$22. \int_1^3 (2x + 5) e^x dx ;$$

$$24. \int_{\pi/6}^{\pi/4} (x - 1) \cos x dx ;$$

$$26. \int_{-7}^1 \ln(x + 8) dx ;$$

$$28. \int_{1/2}^1 \arccos x dx ;$$

$$27. \int_1^2 \ln(2x-1) dx;$$

$$29. \int_0^3 (x-5)2^x dx ;$$

$$30. \int_{\pi/3}^{\pi} (x-4) \sin x dx .$$

Завдання 2.4 (контрольне). Обчислити визначені інтеграли

$$1. \quad a) \int_{-1}^{20} \frac{dx}{5 + \sqrt{3x+4}} ;$$

$$б) \int_0^{\frac{\pi}{12}} 2^x \cos 3x dx ;$$

$$2. \quad a) \int_2^{15} \frac{dx}{21 + \sqrt{7x-5}} ;$$

$$б) \int_1^8 x \log_2^2 x dx ;$$

$$3. \quad a) \int_1^{32.5} \frac{dx}{\sqrt{2x-1} + \sqrt[3]{2x-1}} ;$$

$$б) \int_{-5}^0 (x^2 + x - 20) \sin 2x dx ;$$

$$4. \quad a) \int_{26}^{63} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1} - 2} ;$$

$$б) \int_0^6 (x^2 + 1) \cdot 3^{-\frac{x}{3}} dx ;$$

$$5. \quad a) \int_{-1}^{25} \frac{dx}{(\sqrt[3]{x+2} + 3)^2} ;$$

$$б) \int_{-1}^3 (2x - x^2) \cdot 5^x dx ;$$

$$6. \quad a) \int_0^{2.5} x^2 \sqrt{25 - x^2} dx ;$$

$$б) \int_1^2 (x^2 + 3x) \cdot \ln \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2} x^2 \right) dx ;$$

$$7. \quad a) \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sqrt{\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \cos 2x dx ;$$

$$б) \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x+1}{\sin^2 2x} dx ;$$

$$8. \quad a) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x} - 3\sqrt{\operatorname{ctg} x + 2}}{\sin^2 x} dx ;$$

$$б) \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (2x^2 - 7x) \sin 4x dx ;$$

$$9. \quad a) \int_{\pi/12}^{\pi/6} \left(\frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} \right) dx ;$$

$$б) \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x+5}{\cos^2 x} dx ;$$

$$10. \quad a) \int_0^7 \frac{\sqrt[3]{\log_2^5(x+1)}}{x+1} dx ;$$

$$б) \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4^x \sin 2x dx .$$

3. НЕВЛАСНИЙ ІНТЕГРАЛ

У визначеному інтегралі Рімана розглядається: по-перше, **скінченний відрізок** інтегрування $[a, b]$ і, по-друге, функція $f(x)$ – **обмежена** (необхідна умова інтегрування функції за Ріманом).

Визначений інтеграл вводиться як границя інтегральних сум:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$, $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ за умови, що виконуються

два припущення:

- 1) проміжок інтегрування – скінченний;
- 2) підінтегральна функція $f(x)$ неперервна і обмежена на проміжку $[a, b]$.

Цей **визначений інтеграл** іноді називають ще **власним інтегралом**. Якщо не виконується хоча б одна з цих двох умов, то означення визначеного інтеграла стає неприйнятним.

Але у низці практичних задач виникає необхідність обчислювати інтеграли на нескінченних проміжках $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$, $(-\infty; +\infty)$ або інтеграл від функції, яка є необмеженою в деяких точках (**особливих точках**) відрізка інтегрування.

Невласні інтеграли 1-го роду розглядаються на нескінченних проміжках, а **невласні інтеграли 2-го роду** – від необмежених функцій.

3.1. Невласні інтеграли з нескінченими межами інтегрування (невласні інтеграли 1-го роду)

Def. Нехай функція $f(x)$: 1) задана на проміжку $[a; +\infty)$; 2) інтегровна на проміжку $[a, A]$ для $\forall A > a$, тобто $\exists \int_a^A f(x)dx$ для $\forall A > a$. Якщо існує **скінченна границя** $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x)dx < +\infty$ визначеного інтеграла $\int_a^A f(x)dx$ при $A \rightarrow \infty$, то цю границю називають **невласним інтегралом 1-го роду** і позначають так:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x)dx. \quad (3.1)$$

Невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ у цьому випадку називають **збіжним**, а підінтегральну функцію $f(x)$ – **інтегровою** на проміжку $[a; +\infty)$.

Якщо ж **границі (3.1) не існує** або вона нескінченна, то невластний інтеграл називають **розбіжним**, а функцію $f(x)$ – **неінтегровою** на проміжку $[a; +\infty)$.

Невласний інтеграл 1-го роду на проміжку $(-\infty; b]$ визначається аналогічно інтегралу (3.1):

Def. Якщо функція $f(x)$: 1) задана на проміжку $(-\infty; b]$; 2) інтегровна на проміжку $[a; b]$ для $\forall a < b$, тобто $\exists \int_a^b f(x)dx$ для $\forall a < b$. Якщо існує скінченна границя $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx < \infty$ визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ при $a \rightarrow -\infty$, то цю границю називають **невласним інтегралом 1-го роду** і позначають так:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx. \quad (3.2)$$

Невласний інтеграл $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ у цьому випадку називають **збіжним**, а підінтегральну функцію $f(x)$ – **інтегровою** на проміжку $(-\infty; b]$.

Якщо ж границі не існує або вона нескінченна, то невластний інтеграл називають **розбіжним**, а функцію $f(x)$ – **неінтегровою** на проміжку $(-\infty; b]$.

Невласний інтеграл з двома нескінченними межами визначається так:

Def. Якщо функція $f(x)$: 1) задана на проміжку $(-\infty; +\infty)$; 2) інтегровна на проміжку $[a; b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\exists \int_a^b f(x)dx$, тоді, якщо існує скінченна границя $\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x)dx < \infty$ при незалежному прямуванні $a \rightarrow -\infty$ і $b \rightarrow +\infty$, то значення інтегралу називається **невласним інтегралом 1-го роду** на проміжку $(-\infty; +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x)dx. \quad (3.3)$$

Невласний інтеграл з двома нескінченними межами можна ще задавати рівністю:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx, \\ c \in \mathbb{R}.$$

Невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ у цьому випадку називають **збіжним**, а підінтегральну функцію $f(x)$ – **інтегровою** на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Якщо ж границі не існує або вона нескінченна, то невластний інтеграл називають **розбіжним**, а функцію $f(x)$ – **неінтегровою** на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

З наведених означень видно, що **невласний інтеграл** є границею **визначеного інтеграла** зі змінною межею інтегрування. Тому для **збіжних невластних**

інтегралів 1-го роду зберігаються основні властивості та формули визначеного інтеграла, а саме:

- лінійність, адитивність;
- формула Ньютона–Лейбніца;
- формула заміни змінних;
- формула інтегрування частинами.

Геометричний зміст невластного інтеграла 1-го роду:

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $(-\infty; +\infty)$ і інтеграл (3.3) збігається, то він виражає площу *необмеженої області*, розташованої між лініями $y = f(x)$ і віссю Ox .

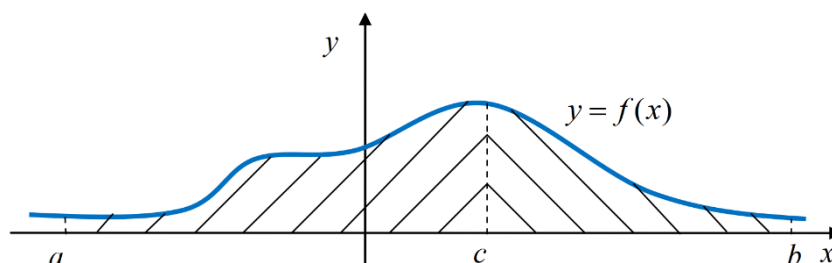


Рис. 3.1. Невласний інтеграл 1-го роду з нескінченними границями інтегрування

Приклад 1. Дослідити на збіжність еталонний інтеграл 1-го роду:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}.$$

Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ будемо називати **еталонним**, бо його часто використовують як зразок для порівняння при дослідженні невластних інтегралів 1-го роду на збіжність за допомогою ознак порівняння.

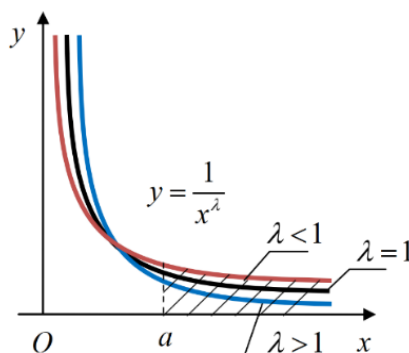


Рис. 3.2. Функція порівняння для невластного інтеграла 1-го роду при різних λ

1. $\lambda = 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - 0) = +\infty.$$

Отже, інтеграл розбігається при $\lambda = 1$.

2. $\lambda \neq 1$

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Big|_1^b = \frac{1}{1-\lambda} \lim_{b \rightarrow +\infty} (b^{1-\lambda} - 1) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda-1}, & \lambda > 1 \\ +\infty, & \lambda < 1 \end{cases}.$$

Висновок: Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ розбігається при $\lambda \leq 1$ і є збіжним при $\lambda > 1$. У загальному випадку можна записати формулу:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \begin{cases} \frac{a^{1-\lambda}}{\lambda-1}, & \lambda > 1 - \text{інтеграл збігається;} \\ +\infty, & \lambda \leq 1 - \text{інтеграл розбігається.} \end{cases}$$

Приклад 2. Ще один **еталонний інтеграл**:

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{збігається при } k > 0; \\ -\infty, & \text{розбігається при } k \leq 0. \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-kx} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{-1}{k} (e^{-kA} - 1) = \frac{1}{k}, k > 0.$$

Приклад 3. Обчислити невластний інтеграл 1-го роду:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - 0) = \frac{\pi}{2};$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_{-b}^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctg b - \arctg(-b)) = \pi.$$

Іноді питання про збіжність чи розбіжність невластного інтеграла 1-го роду можна розв'язати, не знаходячи первісної для підінтегральної функції. Для цього використовують **ознаки збіжності невластних інтегралів першого роду**.

Приклад 4. Обчислити інтеграл або встановити його розбіжність

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{th} x \, dx &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}} \, dx = \\
&= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{1 - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}} \, dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} e^{-x} \, dx = \\
&= - \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} d(e^{-x}) = \left\{ \begin{array}{l} t = e^{-x}; \\ x_1 = 0; t_1 = 1; x_2 = A; t_2 = e^{-A} \end{array} \right\} = \\
&= - \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^{e^{-A}} \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \, dt; \\
\int_1^{e^{-A}} \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \, dt &= \int_1^{e^{-A}} \frac{2 - 1 - t^2}{1 + t^2} \, dt = 2 \int_1^{e^{-A}} \frac{dt}{1 + t^2} - \int_1^{e^{-A}} dt = \\
&= (2 \operatorname{arctg} t - t) \Big|_1^{e^{-A}} = 2 \operatorname{arctg}(e^{-A}) - e^{-A} - 2 \operatorname{arctg} 1 + 1; \\
- \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^{e^{-A}} \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \, dt &= - \lim_{A \rightarrow \infty} (2 \operatorname{arctg}(e^{-A}) - e^{-A} - 2 \cdot \operatorname{arctg} 1 + 1) = \\
&= - \left(0 - 0 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} + 1 \right) = \frac{\pi}{2} - 1,
\end{aligned}$$

тому невластний інтеграл є збіжним і дорівнює:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{th} x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

3.1.1. Ознаки збіжності невластного інтеграла 1-го роду

Теорема 3.1 (перша ознака порівняння – арифметична). Нехай виконуються умови:

- 1) функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на проміжку $[a; +\infty)$;
- 2) $0 \leq f(x) \leq g(x)$ для $\forall x \in [a; +\infty)$.

Тоді,

якщо $\int_a^{+\infty} g(x) \, dx$ – збігається, то і $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ також збігається;

якщо ж $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ – розбігається, то і $\int_a^{+\infty} g(x) \, dx$ також розбігається.

Наведена теорема має просту геометричну інтерпретацію (рис. 3.3):

1. Якщо площа більшої за розмірами необмеженої області є скінченною величиною, то площа меншої області є також скінченною величиною.

2. Якщо ж площа меншої за розмірами необмеженої області є нескінченно великою величиною, то площа більшої області є також нескінченно великою величиною.

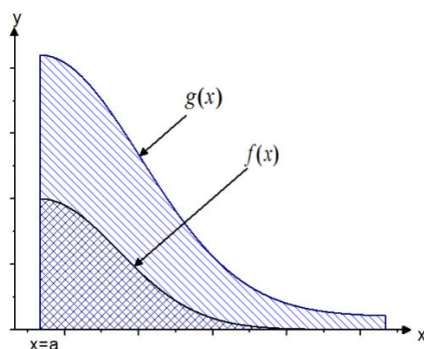


Рис. 3.3. Арифметична ознака порівняння для невластного інтегралу 1-го роду

Теорема 3.2 (друга ознака порівняння – гранична). Нехай виконуються умови:

- 1) функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на проміжку $[a; +\infty)$;
- 2) $f(x) > 0$; $g(x) > 0$ для $\forall x \in [a; +\infty)$.

Тоді, якщо існує скінченна границя відношення функцій:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k, 0 < k < +\infty,$$

то інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ одночасно збігаються або розбігаються.

У теоремах 3.1 і 3.2 розглядалися невластні інтеграли від **невід'ємних функцій**. У випадку, коли підінтегральна функція є **знакозмінною**, справедлива наступна теорема.

Теорема 3.3 (про абсолютну збіжність). Якщо інтеграл:

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

збігається, то збігається і інтеграл:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Якщо інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ збігається, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називається **абсолютно збіжним**, а функція $f(x)$ називається **абсолютно інтегрованою** на проміжку $[a; +\infty)$.

Якщо ж інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбігається, а інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, то інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називається **умовно збіжним**.

Останні два означення сформульовані за аналогією зі збіжністю числових рядів.

Теорема 3.4 (ознака Діріхле–Абеля):

- 1) нехай функція $f(x)$ має обмежену первісну на $x \in [a; +\infty)$ $F(x) = \int_a^x f(x)dx \leq M$;
 - 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ на $[a; +\infty)$;
 - 3) функція $g(x)$ неперервна і не зростає ($\searrow$) на $[a; +\infty)$ (за іншим визначенням – монотонно прямує до нуля);
 - 4) існує неперервна похідна функції, тобто $\exists g'(x)$ неперервна на $[a; +\infty)$.
- Тоді інтеграл:

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

збігається.

Наведемо приклади дослідження на збіжність невласних інтегралів 1-го роду за ознаками порівняння.

Приклад 5. Дослідити на збіжність невласний інтеграл 1-го роду:

$$\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 + 3)^4}}$$

Проведемо порівняльний аналіз підінтегральної функції при $x \rightarrow \infty$:

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 3)^4}} \leq \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3} \quad (1 < x < +\infty).$$

Еталонний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ збігається, оскільки $\lambda = 3$, тому і вихідний інтеграл збігається за арифметичною ознакою порівняння.

Приклад 6. Дослідити на збіжність невласний інтеграл 1-го роду:

$$\int_1^{+\infty} \ln \frac{x^2 + 1}{x^4 - 2} dx.$$

Оберемо функцію порівняння $g(x) = \ln \frac{1}{x^2}$. Інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} \ln \frac{1}{x^2} dx$$

збігається, оскільки:

$$\ln \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}, \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx - \text{збіжний.}$$

Обчислимо границю з розкриттям невизначеності за Лопіталем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x^2 + 1}{x^4 - 2}}{\ln \frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{-2 \ln x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^4 - 2)}{-2 \ln x} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x^2 + 1}}{\frac{1}{x}} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^3}{x^4 - 2}}{\frac{1}{x}} = -1 + 2 = 1. \end{aligned}$$

Тобто існує скінчення границя відношення вихідної і еталонної функцій (функції порівняння). Тому інтеграл $\int_1^{+\infty} \ln \frac{x^2 + 1}{x^4 - 2} dx$ є збіжним.

Приклад 7. Дослідити на абсолютну або умовну збіжність інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{2 \operatorname{arctg} x}{x^4 + 1} dx.$$

Оцінимо поведінку функції на проміжку $1 \leq x < +\infty$:

$$\left| \frac{2 \operatorname{arctg} x}{x^4 + 1} \right| \leq \frac{2 \cdot \frac{\pi}{2}}{x^4} = \frac{\pi}{x^4}.$$

Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx < +\infty$ є збіжним, оскільки $\lambda = 4$, тому і вихідний інтеграл збігається абсолютно.

3.2. Невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли 2-го роду)

Розглянемо функцію $f(x)$, яка визначена на проміжку $[a; b)$. Нехай функція у $f(x)$ є обмеженою і інтегровною на будь-якому відрізку $[a; b - \varepsilon]$ і зліва від точки $x = b$ є необмеженою, тобто $f(x) \rightarrow \infty$, коли $x \rightarrow b - 0$. Точку $x = b$ при цьому будемо називати **особливою точкою** функції $f(x)$ (рис. 3.4).

Def. Якщо існує скінчена границя визначеного інтеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то цю границю називають **невласним інтегралом 2-го роду** функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і позначають так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \quad (3.4)$$

Цей невластний інтеграл називають **збіжним**. Якщо границі (3.4) не існує або вона нескінченна, то невластний інтеграл називають **розбіжним**.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка визначена на проміжку $(a; b]$. **Невластний інтеграл 2-го роду** від функції $y = f(x)$, яка є обмеженою і інтегровною на будь-якому відрізку $[a + \varepsilon; b]$, а справа від точки $x = a$ є необмеженою, тобто $f(x) \rightarrow \infty$, коли $x \rightarrow a + 0$, визначається аналогічно інтегралу (3.4):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx. \quad (3.5)$$

Точку $x = a$ при цьому називають **особливою точкою** функції $y = f(x)$ (рис. 3.4).

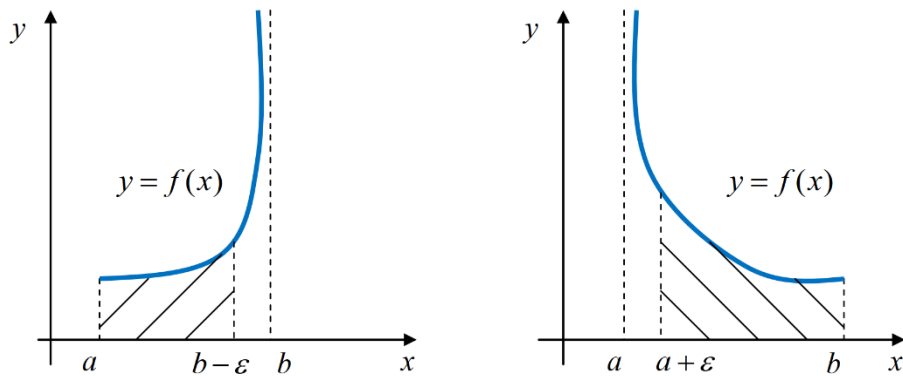


Рис. 3.4. Інтеграли від необмежених на границях проміжку функцій

Якщо функція $y = f(x)$ необмежена у внутрішній точці $c \in [a; b]$, то невластний інтеграл 2-го роду визначається так:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx. \quad (3.6)$$

Інтеграл зліва існує і є збіжним лише тоді, коли є збіжними обидва інтеграли справа (рис. 3.5).

Застосування **формули Ньютона–Лейбніца** дає змогу одночасно з'ясувати збіжність невластного інтеграла і знайти його значення. Для цього необхідно, щоб первісна $F(x)$, яка має всюди, за винятком особливих точок, своєю похідною функцію $f(x)$, була сама неперервна у цих особливих точках.

Для невластних інтегралів другого роду також існують **еталонні інтеграли**. Розглянемо їх у прикладах.

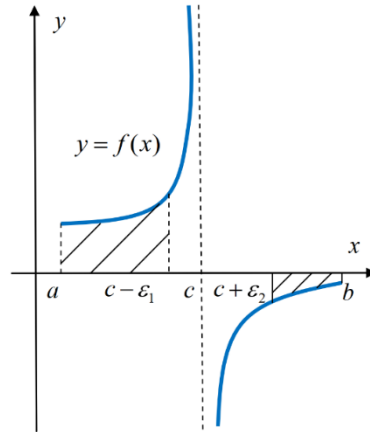


Рис. 3.5. Інтеграл від необмеженої у внутрішній точці проміжку функції

Приклад 8. Дослідити на збіжність еталонний інтеграл 2-го роду

$$I_1 = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}.$$

У цьому випадку також розглянемо окремо два випадки.

1. $\lambda = 1$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln|x-a| \Big|_{a+\varepsilon}^b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln|b-a| - \ln|\varepsilon|) = \infty$$

Тобто інтеграл розбігається при $\lambda = 1$.

2. $\lambda \neq 1$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(x-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Big|_{a+\varepsilon}^b = \frac{1}{1-\lambda} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} ((b-a)^{1-\lambda} - \varepsilon^{1-\lambda}) = \\ &= \begin{cases} +\infty, & \lambda > 1; \\ \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & 0 < \lambda < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Висновок:

$$I_1 = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \begin{cases} +\infty, & \lambda \geq 1 \text{ розбігається;} \\ \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & 0 < \lambda < 1 \text{ збігається.} \end{cases}$$

Аналогічно **еталонний інтеграл**:

$$I_2 = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$$

збігається і розбігається так само, як і інтеграл I_1 (переконайтеся в цьому самостійно).

У окремому випадку **еталонний інтеграл**:

$$I_3 = \int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda} = \begin{cases} +\infty, & \lambda \geq 1 \text{ розбігається;} \\ \frac{1}{1-\lambda}, & 0 < \lambda < 1 \text{ збігається.} \end{cases}$$

У розглянутому прикладі обчислення невласного інтеграла 2-го роду ґрунтувалося на його означенні. Питання про збіжність чи розбіжність невласного інтеграла 2-го роду можна розв'язати, не знаходячи первісної для підінтегральної функції, оскільки для невласних інтегралів 2-го роду, так само, як і для невласних інтегралів 1-го роду, існує низка теорем, які дають **достатні ознаки збіжності (розбіжності)**.

3.2.1. Ознаки збіжності невласного інтеграла 2-го роду

Теорема 3.5 (перша ознака порівняння – арифметична). Нехай виконуються умови:

- 1) функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на проміжку $[a; b)$ і мають особливу точку $x = b$;
- 2) $0 \leq f(x) \leq g(x)$ для $\forall x \in [a; b)$.

Тоді, якщо інтеграл $\int_a^b g(x)dx$ – збігається, то і $\int_a^b f(x)dx$ також збігається, якщо ж $\int_a^b f(x)dx$ – розбігається, то і $\int_a^b g(x)dx$ також розбігається.

Теорема 3.6 (друга ознака порівняння – гранична). Нехай виконуються умови:

- 1) функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на проміжку $[a; b)$ і мають особливу точку $x = b$;
- 2) $f(x) > 0; g(x) > 0$ для $\forall x \in [a; b)$.

Тоді, якщо існує скінченна границя:

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = k, 0 < k < +\infty,$$

то інтеграли $\int_a^b f(x)dx$ і $\int_a^b g(x)dx$ одночасно збігаються або розбігаються.

У випадку, коли підінтегральна функція є знакозмінною, справедлива наступна теорема.

Теорема 3.7 (про абсолютну збіжність). Якщо $x = b$ – особлива точка функції $f(x)$ і інтеграл:

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

збігається, то збігається і інтеграл:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Якщо $x = b$ – особлива точка функції $f(x)$ і інтеграл $\int_a^b |f(x)| dx$ збігається, то інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ називається **абсолютно збіжним**, а функція $f(x)$ називається абсолютно інтегровною на проміжку $[a; b)$.

Якщо $x = b$ – особлива точка функції $f(x)$ і інтеграл $\int_a^b |f(x)| dx$ розбігається, а інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ збігається, то інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ називається **умовно збіжним**.

Аналогічні ознаки збіжності діють і для невластних інтегралів, де функція $f(x)$ необмежена справа від точки $x = a$.

Зауваження. До невластних інтегралів, які мають точку розриву, що є внутрішньою для відрізка $[a; b]$, **не можна застосувати** формулу Ньютона–Лейбніца.

Приклад 9. Дослідити на збіжність невластний інтеграл 2-го роду:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx.$$

Розкладемо на множники підкореневу функцію, щоб виділити особливу точку:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1-x}}_{g(x)}} \frac{x^2}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}.$$

Особливою точкою є точка $x = 1$. Будемо порівнювати нашу функцію із функцією:

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^\alpha}, \alpha = \frac{1}{2}.$$

Порахуємо границю відношення функції:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2(1-x)^{1/2}}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2}} = \frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx < +\infty \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx < +\infty.$$

Зі збіжності еталонного інтеграла випливає збіжність інтеграла від вихідної функції.

Приклад 10. Дослідити на збіжність невластний інтеграл 2-го роду:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 - e^{\sqrt{x}}}.$$

Функція $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\sqrt{x}}}$ неперервна на проміжку $x \in (0; 1]$ і має особливу точку $x = 0$. Скористуємося еквівалентністю нескінченно малої функції при $x \rightarrow 0$:

$$1 - e^{\sqrt{x}} = -(e^{\sqrt{x}} - 1) \sim -\sqrt{x},$$

тоді:

$$\frac{1}{1 - e^{\sqrt{x}}} \sim -\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Оберемо функцію порівняння $g(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ і скористаємося граничною ознакою порівняння інтеграла 2-го роду:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}} = 1 < +\infty.$$

Тобто границя відношення вихідної і еталонної функції в особливій точці існує і є скінченною. Еталонний невластний інтеграл 2-го роду $\int_0^1 g(x) dx = -\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ є збіжним, оскільки показник степеня $\lambda = 1/2 < 1$, тому і інтеграл від вихідної функції $\int_0^1 f(x) dx$ також збігається.

Приклад 11. Дослідити на збіжність невластний інтеграл 2-го роду:

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}.$$

Функція $f(x) = \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$ неперервна на проміжку $x \in [0;1)$ і має особливу точку $x = 1$. Виділимо особливість функції окремо і оберемо функцію порівняння:

$$\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}} = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x)^5(1+x)^5}} = \frac{1}{\underbrace{(1-x)^{\frac{5}{2}}}_{g(x)}} \cdot \frac{x^2}{(1+x)^{\frac{5}{2}}},$$

звідси функцію порівняння $g(x)$ можна записати у вигляді:

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^{\frac{5}{2}}}.$$

Скористаємося граничною ознакою порівняння для невластного інтеграла 2-го роду:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{(1+x)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}} < +\infty,$$

тобто границя відношення вихідної і еталонної функції в особливій точці існує і є скінченною.

Еталонний невластний інтеграл 2-го роду $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{5}{2}}}$ є розбіжним, оскільки показник степеня $\lambda = 5/2 > 1$, тому і інтеграл від вихідної функції $\int_0^1 f(x) dx$ також розбігається.

Приклад 12. Дослідити на збіжність невластний інтеграл 2-го роду:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}} dx.$$

Функція $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}}$ неперервна на проміжку $x \in (0;1]$ і має особливу точку $x = 0$.

Скористуємося еквівалентністю нескінченно малої функції при $x \rightarrow 0$:

$$\frac{\ln(1+x)}{x\sqrt{x}} \sim \frac{x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Оберемо функцію порівняння $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ і скористаємося граничною ознакою порівняння для невластного інтеграла 2-го роду:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 < +\infty.$$

Тобто границя відношення вихідної і еталонної функції в особливій точці існує і є скінченною. Еталонний невластний інтеграл 2-го роду $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ є збіжним, оскільки показник степеня $\lambda = 1/2 < 1$, тому і інтеграл від вихідної функції $\int_0^1 f(x)dx$ також збігається.

Треба зазначити ще два такі зауваження.

Зауваження 1. Невласні інтеграли 2-го роду можуть перетворюватись у власні інтеграли за певних замінах змінних.

Зауваження 2. Невласні інтеграли 2-го роду у деяких випадках можуть перетворюватись у власні інтеграли у разі інтегруванні частинами.

3.3. Головне значення за Коші невластних інтегралів

Головне значення інтеграла за Коші – це узагальнене поняття інтеграла Рімана, яке дає змогу обчислити деякі розбіжні невластні інтеграли. Так, наприклад, інтеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ як невластний інтеграл 2-го роду не існує, однак він існує в сенсі головного значення інтеграла за Коші.

Означення (головного значення за Коші для невластних інтегралів 1-го роду).

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty; +\infty)$ і інтегровна на будь-якому сегменті $[A; A]$, тоді кажуть, що $f(x)$ інтегрована за Коші, якщо $\exists \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^{+A} f(x)dx$. Ця границя називається **головним значенням за Коші** і позначається:

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx. \quad (3.7)$$

Літери *v. p.* пишуть від початкових букв слів «**valeur principale**», що в перекладі з французької означає «**головне значення**».

Приклад 13. Головне значення інтегралу від непарної функції $y = x$:

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} xdx = 0.$$

Означення (головного значення за Коші для невластних інтегралів 2-го роду).

Розглянемо відрізок $[a, b]$, і нехай $a < c < b$, а точка c – особлива. Якщо функція $f(x)$ – така, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існують інтеграли Рімана $\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx$ і $\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx$, то під головним значенням у значенні Коші (*v. p.*) вважають число:

$$v.p. \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right\}.$$

Приклад 14. Головне значення невласного інтегралу 2-го роду:

$$v.p. \int_{-1}^{-1} \frac{dx}{x} = 0.$$

Контрольні запитання за темою

1. Які інтеграли називаються невласними? Надайте означення невласних інтегралів 1-го та 2-го роду.

2. Як застосовується формула Ньютона–Лейбніца під час обчислення невласних інтегралів?

3. Сформулюйте теореми (ознаки) порівняння. Як досліджуються на збіжність невласні інтеграли?

Завдання для практичних занять та самостійної роботи

Завдання 3.1. Обчислити невласні інтеграли 1-го роду (або встановити їх розбіжність)

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x^2} dx$; | 2. $\int_2^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx$; | 3. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg^2 x}{1+x^2} dx$; |
| 4. $\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$; | 5. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$; | 6. $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^3} dx$; |
| 7. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{x dx}{(x^2+1)^3}$; | 8. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{\ln x}}$; | 9. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^7 x}$; |
| 10. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$; | 11. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x}$; | 12. $\int_2^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2-1)^2}$; |
| 13. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4x dx}{x^2+1}$; | 14. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$; | 15. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln^7 x dx}{x}$; |
| 16. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot (x+1)^2}$; | 17. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(x+1)^2}$; | 18. $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$; |
| 19. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^4 x}$; | 20. $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$; | 21. $\int_0^{+\infty} x \cos x dx$; |
| 22. $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$; | 23. $\int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x}{2}} dx$; | 24. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$; |
| 25. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2+1)^2}$; | 26. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{(x+1)^2}$; | 27. $\int_0^{+\infty} x \sin x dx$; |
| 28. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+x^2}$; | 29. $\int_1^{+\infty} \frac{(2+x) dx}{x^2(1+x)}$; | 30. $\int_2^{+\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$. |

Завдання 3.2. Дослідити невластні інтеграли 1-го роду на збіжність або розбіжність

1. $\int_1^{+\infty} \frac{5 + \cos x}{\sqrt[3]{x}} dx$;
2. $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{\ln(1+x^2)}$;
3. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^4+1}}{x^6 + 2x + 1} dx$;
4. $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{3 + 2x^2 + 3x^5}$;
5. $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{1 + \sqrt{x-2}}$;
6. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sin^4 x}$;
7. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+4)(x+2)}}$;
8. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \cos^4 x}$;
9. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(4+x^2)}{x} dx$;
10. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x^2+1} + 3}$;
11. $\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^5+1}} dx$;
12. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^3} dx$;
13. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+4x+4}}$;
14. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3} + \sqrt{x^2+1}}{x^4+4x+1} dx$;
15. $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{2 + \cos x}{x^5} dx$;
16. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + \sqrt[3]{x^4+1}}$;
17. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + \sqrt[3]{x^4+1}}$;
18. $\int_3^{+\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{x}}{4 + x^2 \sqrt{x}} dx$;
19. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}}$;
20. $\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^9}} dx$;
21. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[4]{x}} dx$;
22. $\int_2^{+\infty} \frac{1 + \arcsin \frac{1}{x}}{4 + x \sqrt{x}} dx$;
23. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{3x^2 + \sqrt[3]{x^5+1}}$;
24. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{2 + x \sqrt{x}} dx$;
25. $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + \sqrt{(x+1)^3}}{4x^4 + \sqrt[3]{x^5+1}} dx$;
26. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+x^9+1}}$;
27. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + \sqrt{x}} dx$;
28. $\int_2^{+\infty} \frac{4 + \arccos \frac{1}{x}}{\sqrt{x} + 1} dx$;
29. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} \frac{3 + \sin x}{x^2} dx$;
30. $\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^5+2}} dx$.

Завдання 3.3. Обчислити невластні інтеграли 2-го роду (або встановити їх розбіжність)

1. $\int_{-1}^1 \frac{x^2+4}{\sqrt{x^3}} dx$;
2. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$;
3. $\int_0^2 \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{4}{5}}}$;
4. $\int_0^1 \frac{dx}{x \ln^3 x}$;
5. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$;
6. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x \sqrt{4x^2-1}}$;
7. $\int_0^{\sqrt{2/\pi}} \cos \frac{1}{x^2} \cdot \frac{dx}{x^3}$;
8. $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}$;
9. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}$;
10. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x^4}$;
11. $\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$;
12. $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$;

13. $\int_0^1 x \ln^2 x \, dx$; 14. $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{6x - x^2 - 8}}$; 15. $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x - 1}}$;
 16. $\int_0^1 x \ln x \, dx$; 17. $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x}$; 18. $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$;
 19. $\int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$; 20. $\int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x-1)(5-x)}}$; 21. $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$;
 22. $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$; 23. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x+1)}}$; 24. $\int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx$;
 25. $\int_{-1}^1 \frac{\ln(2 + \sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx$; 26. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(4-x)\sqrt{1-x^2}}$; 27. $\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$;
 28. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 - 5x^2}$; 29. $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$; 30. $\int_0^1 \frac{dx}{1 - x^2 + 2\sqrt{1-x^2}}$.

Завдання 3.4. Дослідити невластні інтеграли 2-го роду на збіжність або розбіжність

1. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\ln x}$; 2. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$; 3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \, dx}{x \sqrt{x}}$;
 4. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 5. $\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$; 6. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{(8-x)^3}} dx$;
 7. $\int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{x} dx$; 8. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$; 9. $\int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$;
 10. $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$; 11. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{16-x^4}} dx$; 12. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}} dx$;
 13. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}$; 14. $\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x} dx}{e^{\sin x} - 1}$; 15. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 - \cos \sqrt{x}}$;
 16. $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$; 17. $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[4]{x}} - 1}$; 18. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$;
 19. $\int_0^1 \frac{x dx}{e^{x^3} - 1}$; 20. $\int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x^2})}{e^x - 1} dx$; 21. $\int_0^1 \frac{dx}{x - \sin x}$;
 22. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} - 1}$; 23. $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\sqrt{x}} dx$; 24. $\int_0^1 \frac{dx}{x - \operatorname{tg} x}$;
 25. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$; 26. $\int_1^4 \frac{\sin x + 2}{(x-1)^2} dx$; 27. $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$;

$$28. \int_1^3 \frac{\cos x + 3}{(x-1)^3} dx ; \quad 29. \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} ; \quad 30. \int_0^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2 \cdot \sqrt[4]{x} + x^3} .$$

Завдання 3.5. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласні інтеграли 2-го роду

$$\begin{aligned} 1. & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^{3/2}} dx ; & 2. & \int_3^9 \frac{x \cos x}{(x-3)^2} dx ; & 3. & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 - \cos x}{x^5} dx ; \\ 4. & \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^7 x} ; & 5. & \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{\ln(1+x)}}{x^2} dx ; & 6. & \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x - 1}}{\sin x} dx . \end{aligned}$$

Завдання 3.6 (контрольне). Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність

$$\begin{aligned} 1. & \int_0^{+\infty} (x+1) \operatorname{arctg}(x+1) dx ; & \int_0^1 \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx ; \\ 2. & \int_1^{+\infty} x \ln(x+1) dx ; & \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} ; \\ 3. & \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} ; & \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-x)^2}} ; \\ 4. & \int_0^{+\infty} x \cdot 5^{-x^2} dx ; & \int_0^1 \frac{dx}{x^2(1+x^2)} ; \\ 5. & \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx ; & \int_1^e \frac{dx}{x \ln x} ; \\ 6. & \int_1^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3} dx ; & \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^4}} ; \\ 7. & \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{x^2} dx ; & \int_1^2 \ln(x-1) dx ; \\ 8. & \int_1^{+\infty} \frac{1 + \cos x}{\sqrt[3]{x^2 + 5}} dx ; & \int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^7}} dx ; \\ 9. & \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} ; & \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+x^2}} ; \\ 10. & \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^3} dx ; & \int_0^1 \frac{e^{\frac{2}{x}}}{x^2} dx ; \\ 11. & \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg}(2x)}}{1+4x^2} dx ; & \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}} . \end{aligned}$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Валєєв К. Г., Джаладова І. А. Вища математика: навч. посіб.: у 2-х ч. Ч. 1. Київ: КНЕУ, 2001. 546 с.
2. Соколенко О. І. Вища математика: підруч. Київ: Академія, 2002. 432 с.
3. Вища математика: підручник. у 2-х кн. Кн. 1 / Г. Й. Призва, В. В. Плахотник, Л. Д. Гординський та ін.; за ред. Г. Л. Кулініча. Київ: Либідь, 2003. 400 с.
4. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: навч. посіб. Київ: А. С. К., 2006. 647 с.
5. Вища математика. Збірник задач: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін.; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. Київ: А. С. К., 2005. 480 с.
6. Курченко О. О. Інтегральне числення функцій однієї змінної: навч. посіб. Київ, 2016. 140 с.
7. Давидов М. О. Курс математичного аналізу: підручник: у трьох частинах. Частина 1. Функції однієї змінної. Київ: Вища школа, 1987. 359 с.
8. Денисьєвський М. О. Збірник задач з математичного аналізу: функції однієї змінної / М. О. Денисьєвський, О. О. Курченко, В. Н. Нагорний, О. Н. Нестеренко, Т. О. Петрова, А. В. Чайковський. ВПЦ «Київський університет», 2005. 240 с.
9. Заболоцький М. В., Сторож О. Г., Тарасюк С. І. Математичний аналіз. Київ: Знання, 2008. 421 с.
10. Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Невизначений, визначений та невластні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі: навч. посіб. Київ: Книги України ЛТД, 2014. 470 с.

Навчальне видання

Рассохіна Юлія Валентинівна

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання індивідуальних завдань за темою
**«НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ
ТА ОСНОВНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ.
ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ»**
з дисципліни «Вища математика»
для здобувачів денної форми навчання
спеціальностей 091 Біологія та біохімія, 101 Екологія, 102 Хімія

Редактор О. А. Солдатова
Технічний редактор Т. О. Важеніна-Гопрак

Підписано до друку 07.04.2025
Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Друк – цифровий. Умовн. друк. арк. 4,18.
Тираж 30. Зам. 7.

Донецький національний університет імені Василя Стуса
21021, м. Вінниця, 600-річчя, 21
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК № 5945 від 15.01.2018