МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТУСА
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ І ПРИКЛАДНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

І. В. Фриз, Л. О. Волонтир

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА В ПРОГРАМНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

ЧАСТИНА 1

Методичні рекомендації для виконання лабораторних робіт для здобувачів ОС «Бакалавр» спеціальності 122 Комп'ютерні науки

Вінниця
2024

УДК 519.21/.22:004.415.2](076.5)

Т 338

*Затверджено на засіданні вченої ради факультету
інформаційних і прикладних технологій ДонНУ імені Василя Стуса
(протокол № 11 від 21 травня 2024 р.)*

Укладачі:

Фриз І. В., канд. фіз.-мат. наук, старший викладач кафедри інформаційних технологій ДонНУ імені Василя Стуса;

Волонтир Л. О., канд. техн. наук, доцент кафедри інформаційних технологій ДонНУ імені Василя Стуса.

Рецензенти:

Зелінська О. В., канд. техн. наук, доцент, в. о. завідувача кафедри інформаційних технологій ДонНУ імені Василя Стуса;

Денисюк В. О., канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерних наук Вінницького національного технічного університету.

Т 338 Теорія ймовірностей та математична статистика в програмних середовищах. Частина 1: методичні рекомендації для виконання лабораторних робіт для здобувачів ОС «Бакалавр» спеціальності 122 Комп'ютерні науки / І. В. Фриз, Л. О. Волонтир. Вінниця, ДонНУ імені Василя Стуса, 2024. 92 с.

Методичні рекомендації є навчально-методичним документом, який містить рекомендації для отримання практичних навичок розв'язування задач під час виконання лабораторних робіт з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика в програмних середовищах». Методичні рекомендації охоплюють розділи «Випадкові події та їх ймовірності» і «Випадкові величини», містять короткі теоретичні відомості, приклади виконання завдань, завдання для виконання лабораторних робіт здобувачами і контрольні питання.

Призначені для здобувачів вищої освіти ОС «Бакалавр» спеціальності 122 Комп'ютерні науки.

УДК 519.21/.22:004.415.2](076.5)

ЗМІСТ

ВСТУП

Прикладний характер теорії ймовірностей і математичної статистики дає можливість застосовувати її до розв'язування різноманітних задач низки технічних дисциплін. Теорія ймовірностей та математична статистика вивчає закономірності в масових випадкових явищах та математичні моделі реальних випадкових явищ (подій). Такі моделі дають змогу зрозуміти математичну суть реальних випадкових подій та допомагають прогнозувати перебіг досліджуваних випадкових подій.

Метою вивчення навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика в програмних середовищах» є ознайомлення здобувачів вищої освіти з основними поняттями, теоретичними положеннями теорії ймовірностей та математичної статистики для формування базових знань з основ застосування ймовірнісно-статистичного апарату.

Навчальна дисципліна формує міждисциплінарні зв'язки з іншими освітніми компонентами ОП «Комп'ютерні науки», зокрема «Вища математика для комп'ютерних наук», «Статистичне і машинне навчання» та ін.

Вивчення навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика в програмних середовищах» передбачає формування та розвиток у здобувачів вищої освіти таких компетентностей і програмних результатів навчання: застосовувати знання основних форм і законів абстрактно-логічного мислення, основ методології наукового пізнання, форм і методів вилучення, аналізу, обробки та синтезу інформації в предметній області комп'ютерних наук; використовувати знання закономірностей випадкових явищ, їх властивостей та операцій над ними, моделей випадкових процесів та сучасних програмних середовищ для розв'язування задач статистичної обробки даних і побудови прогнозних моделей.

У першій частині методичних рекомендацій для виконання лабораторних робіт з дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика в програмних середовищах» запропоновані п'ять лабораторних робіт, які охоплюють розділи «Випадкові події та їх ймовірності» і «Випадкові величини». До кожної роботи наведені короткі теоретичні відомості з необхідними для міркувань і розрахунків поняттями і формулами, розглядаються типові завдання з відповідної теми, наявне детальне пояснення процесу їх розв'язування – як аналітичного, так і з використанням табличного процесора Microsoft Excel та/або середовища MATLAB, запропоновані завдання для самостійного виконання здобувачами, контрольні питання до кожної відповідної теми.

Методичні рекомендації розроблені для здобувачів вищої освіти ОС «Бакалавр» спеціальності 122 Комп'ютерні науки.

ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ

Робота оформлюється у вигляді звіту, підготовленого у текстовому редакторі MS Word на аркушах формату А4. Поля розміром 20 мм, текст виконують шрифтом гарнітурою Times New Roman, розміром 14 пт (для наведення лістингів можна використовувати шрифт меншого розміру, але не менше 10 пт), міжрядковий інтервал – 1,5, формули подаються за допомогою редактора формул.

Звіт має містити:

- титульний лист із зазначенням назви ЗВО, кафедри, номера і теми лабораторної роботи, імені та прізвища здобувача, який підготував звіт;
- мету роботи;
- номер варіанта виконання завдань та формулювання завдань відповідно до варіанта;
- аналітичне розв’язання кожного із завдань; необхідні рисунки і обчислення за допомогою MS Excel (з використанням режиму відображення формул) та/або MATLAB (наводяться лістинги програм з обов’язковими коментарями); отримані на кожному етапі роботи результати;
- діаграми і графіки до завдань, які виконуються за допомогою MS Excel та/або MATLAB;
- висновки і пояснення до кожного із завдань.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1
Класичне та геометричне означення ймовірності. Елементи комбінаторики. Основні теореми теорії ймовірностей

Мета: вивчення можливостей пакетів Microsoft Excel та MATLAB для розв'язування задач із теорії ймовірностей з використанням елементів комбінаторики, класичного і геометричного означення ймовірності та основних теорем теорії ймовірностей.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1. Основні поняття

Стохастичним експериментом (випадковим експериментом) називається певний комплекс умов, що забезпечують спостереження за певним реальним випадковим явищем (певною реальною випадковою подією).

Подія або *випадкова подія* – це результат стохастичного експерименту, все те, що може відбуватися або не відбуватися під час цього випробування.

Елементарна подія – це результат випробування або наслідок, тобто така подія, що не може бути розкладена на більш прості.

Якщо внаслідок експерименту, здійснюваного з додержанням певного комплексу умов, певна подія обов'язково настає, то вона називається *достовірною*. Подія називається *неможливою,* якщо внаслідок експерименту, проведеного з додержанням певного комплексу умов, вона не настає ніколи. Неможлива подія позначається символом $\emptyset$.

Простір елементарних подій випробування – це сукупність всіх можливих результатів експерименту. Цю множину позначають так:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\},$$

де $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ – елементарні події.

Повною групою подій називається така сукупність подій, сума яких утворює весь простір елементарних подій експерименту.

Дві несумісні випадкові події, що утворюють повну групу, називають *протилежними*. Випадкові події є *рівноможливими,* якщо реалізація однієї не має жодних переваг перед реалізацією іншої.

Випадкові події є *несумісними,* якщо внаслідок випробування поява однієї події заперечує можливість появи іншої. Дві події називаються *сумісними,* якщо поява однієї з них не виключає появи іншої в одному і тому ж випробуванні.

Подія A називається *сумою подій* B і C, тобто $A = B + C$ або $A = B \cup C$, якщо під час випробування відбувається принаймні одна із цих подій.

Подія A називається *добутком подій* B і C, тобто $A = B \cdot C$ або $A = B \cap C$, якщо внаслідок випробування відбуваються як подія B, так і подія C.

Незалежними подіями називаються такі події, коли ймовірність настання довільної з них не залежить від того, відбулася інша подія чи ні. Декілька подій називають *незалежними в сукупності* (або просто незалежними), якщо незалежні кожні дві з них і незалежні кожна подія і всі можливі добутки інших.

Випадкові події A і B називають *залежними,* якщо ймовірність появи однієї з них залежить від появи або непояви іншої. Ймовірність події B, обчислена в припущенні, що подія A відбулася, називають *умовною ймовірністю* події B і позначають $P(B/A)$ або $P_A(B)$.

Чисельну міру об'єктивної можливості реалізації випадкової події в цьому випробуванні називають *ймовірністю* цієї *події*.

2. Елементи комбінаторики в теорії ймовірностей

Щоб обчислити ймовірність тієї чи іншої випадкової події для певного класу задач із дискретним і обмеженим простором елементарних подій, необхідно вміти обчислити кількість n усіх елементарних подій (елементів множини Ω) і число m елементарних подій, які сприяють появі випадкової події.

Існує клас задач, у яких для обчислення n і m використовуються елементи комбінаторики: переставлення, розміщення та комбінації. У комбінаториці оперують множинами однотипних елементів. *Сполуками* називаються різні підмножини, утворені з елементів універсальної множини, що відрізняються елементами або порядком цих елементів.

Загалом множини бувають упорядковані та невпорядковані. Множину називають *упорядкованою,* якщо під час її побудови істотним є порядок розміщення елементів. В іншому випадку множину називають *невпорядкованою*.

Переставленням із n елементів називають такі впорядковані множини з n елементів, які різняться між собою порядком їх розміщення. Кількість таких упорядкованих множин обчислюється за формулою:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Розміщенням із n елементів по k $(0 \leq k \leq n)$ називаються такі впорядковані множини, кожна з яких містить k елементів, і які відрізняються між собою порядком розташування цих елементів або хоча б одним елементом. Кількість таких множин обчислюється за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Комбінаціями з n елементів по k $(0 \leq k \leq n)$ називаються такі множини з m елементів, які різняться між собою хоча б одним елементом. Кількість таких множин:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Значне число комбінаторних задач розв’язують, використовуючи комбінаторні принципи, – *правило суми* та *правило добутку.*

Правило суми: якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B – n несумісними способами, то вибрати або A, або B можна способами $m + n$.

Правило добутку: якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B під час довільного вибору A – n способами, то вибір пари елементів A і B може бути здійснений $m \cdot n$ способами.

Розв’язуючи комбінаторну задачу, насамперед потрібно встановити, чи усі елементи множини використовуються; чи важливий порядок розміщення елементів. Визначити вид сполуки та здійснити вибір формули можна, використовуючи рисунок 1.1.

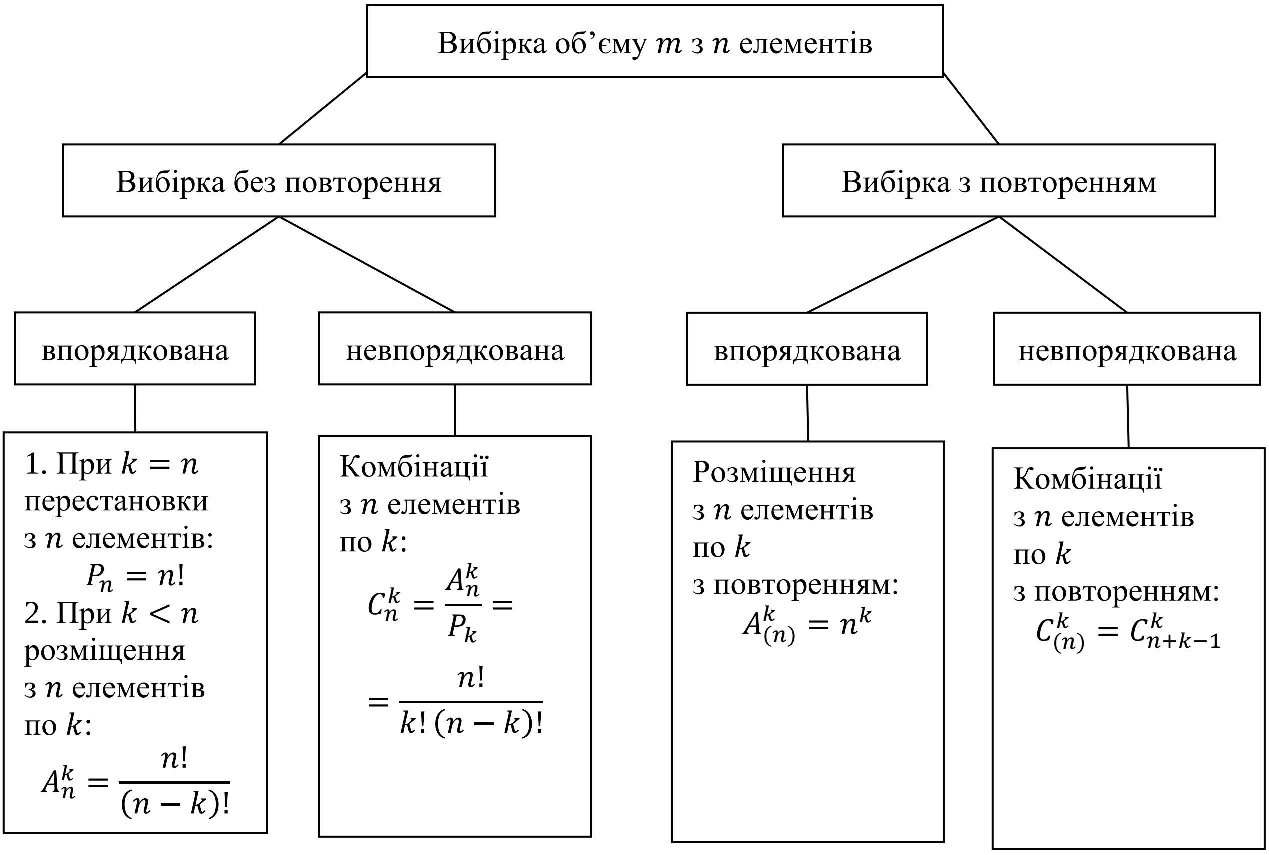


Рисунок 1.1. Визначення виду сполуки та вибір формули

3. Статистична ймовірність

Розглянемо простір Ω елементарних подій, що відповідає певному експерименту, і подію $A \in \Omega$. Нехай проведено n випробувань, пов’язаних із цим експериментом, внаслідок яких подія A відбулася $m = m_n(A)$ разів. Тоді *відносною частотою події* A називають число:

$$P_n^*(A) = \frac{m_n(A)}{n}.$$

Відносна частота – це *середня можливість появи події* A у кожному з n проведених випробувань. Якщо виявляється, що для події A відносна частота достатньо добре характеризує середню можливість появи події A з простору подій S у більшості інших серій випробувань, то тоді $P_n^*(A)$ називають *статистичними ймовірностями* подій $A \in \Omega$ з простору подій S.

4. Класичне означення ймовірності

Ймовірністю випадкової події A називається невід'ємне число $P(A)$, що дорівнює відношенню числа елементарних подій m $(0 \leq m \leq n)$, які сприяють появі події A, до кількості всіх елементарних подій n простору Ω:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Для неможливої події $P(\emptyset) = 0$, оскільки $m = 0$;

для достовірної події $P(\Omega) = 1$, оскільки $m = n$;

для довільної випадкової події $0 \leq P(A) \leq 1$.

5. Геометричне означення ймовірності

Мірою множини на прямій, площині, у просторі є відповідно довжина, площа та об'єм відповідної геометричної фігури.

Нехай множина всіх наслідків експерименту утворює деяку множину Ω, що має додатну скінченну міру $m(\Omega) > 0$ (довжину, площу, об'єм тощо). Водночас подіями вважають ті частини $A \subset \Omega$, що також мають міру. Тоді ймовірність $P(A)$ кожної такої події $A \subset \Omega$ можна визначати відношенням міри множини A до міри множини Ω, тобто:

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

6. Основні теореми теорії ймовірностей

Події утворюють **повну групу** несумісних подій, якщо $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$ $(i, j = 1,2, \dots, k)$, $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \Omega$.

Теорема 1.1 ***(теорема додавання ймовірностей несумісних подій).*** Ймовірність суми (об'єднання) двох несумісних випадкових подій дорівнює сумі їх ймовірностей:

$$P(A + B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Теорема 1.2. Якщо випадкові події $A_1, A_2, \dots, A_n$ попарно несумісні, то ймовірність появи хоча б однієї з цих подій дорівнює сумі їх ймовірностей:

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

Теорема 1.3. Сума ймовірностей повної групи випадкових подій дорівнює одиниці:

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1.$$

Наслідок 1.1. Дві протилежні події A та $\bar{A}$ утворюють повну групу $A + \bar{A} = \Omega$, тому справедлива рівність $P(A + \bar{A}) = P(\Omega) = 1$, з якої одержуємо формулу:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Теорема 1.4 ***(теорема множення ймовірностей незалежних подій).*** Ймовірність сумісного настання двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Наслідок 1.2. Ймовірність сумісної появи декількох подій, незалежних у сукупності, дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Теорема 1.5. Ймовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$, незалежних у сукупності, обчислюється за формулою:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \ldots P(\bar{A}_n).$$

Якщо подія A відбувається за умови, що відбулась інша подія B, причому $P(B) > 0$, то ймовірність настання події називається *умовною* і обчислюється за формулою:

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}.$$

Теорема 1.6 ***(теорема множення ймовірностей залежних подій).*** Ймовірність сумісної появи двох випадкових події A та B визначається добутком ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність іншої за умови, що перша подія відбулася:

$$P(A \cdot B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Звідси, формула обчислення умовної ймовірності має вигляд:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)},$$

якщо $P(A) \neq 0$ або:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)},$$

якщо $P(B) \neq 0$.

У випадку n залежних випадкових подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ маємо формулу:

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n).$$

Теорема 1.7 *(теорема додавання ймовірностей сумісних подій).* Якщо випадкові події A і B сумісні, то ймовірність їх суми (об'єднання) дорівнює сумі їх ймовірностей без ймовірності їх сумісної появи, тобто:

$$P(A + B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Якщо випадкові події A і B незалежні, то остання формула набуває вигляду:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$$

Якщо випадкові події A і B залежні, то:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B).$$

ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 1.1. Скільки перестановок можна утворити із трьох букв А, Б і В?

Розв'язання. Оскільки букви не повторюються, то можна утворити шість перестановок: АБВ, АВБ, ВАБ, ВБА, БАВ, БВА, тоді маємо 3!=6.

Зауваження 1.1. Факторіал можна обчислити, використовуючи функцію MS Excel FACT, яка активізується за допомогою команд Формули $\Rightarrow$ Вставити функцію $\Rightarrow$ Математичні $\Rightarrow$ FACT (у поле «Число» потрібно ввести невід'ємне ціле число n, факторіал якого потрібно знайти).

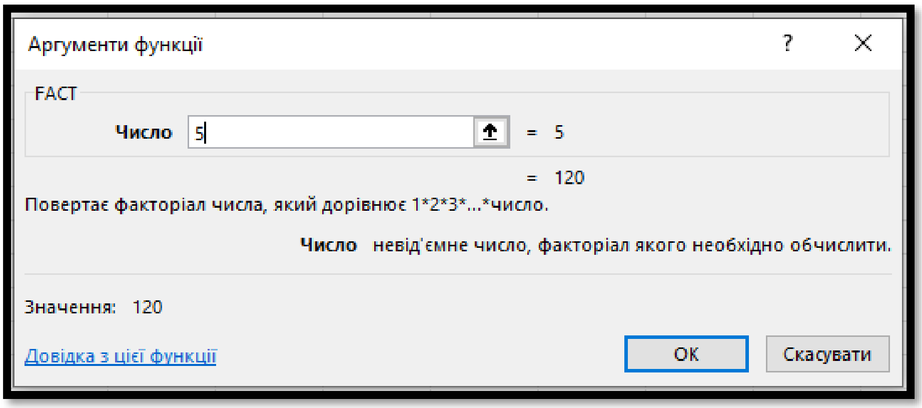


Рисунок 1.2. Обчислення кількості перестановок (факторіал) у MS Excel

Зауваження 1.2. Для роботи з перестановками у MATLAB можна скористатися функціями `factorial, randperm, perms` для обчислення кількості усіх можливих перестановок, виведення випадкової перестановки, виведення усіх можливих перестановок відповідно.

Приклади використання функцій `factorial, randperm, perms:`

```
Fact6=factorial(6) % кількість всіх можливих перестановок із 6 елементів, факторіал
RP9=randperm(9) % випадкова перестановка з 9 елементів
AllP24=perms(2:4) % всі перестановки із 3 елементів, які знаходяться в діапазоні 2-4

Fact6 =
   720
RP9 =
     5     7     8     3     6     1     2     4     9
AllP24 =
     4     3     2
     4     2     3
     3     4     2
     3     2     4
     2     4     3
     2     3     4
```

Приклад 1.2. Скільки розміщень по три букви можна скласти із чотирьох букв А, Б, В і Г?

Розв'язання. Із трьох букв А, Б, В і Г можна скласти 24 розміщення по три букви:

$$A_4^3 = 4 \cdot (4-1)(4-2) = 24.$$

Зауваження 1.3. Обчислити кількість розміщень у MS Excel можна за допомогою функції PERMUT (число; кількість вибраних), яку викликають за допомогою команд Формули $\Longrightarrow$ Вставити функцію $\Longrightarrow$ Статистичні $\Longrightarrow$ PERMUT. Відкриється діалогове вікно (рис. 1.3), де в поле «Число» необхідно ввести невід'ємне ціле число n, яке задає кількість елементів, а в поле «кількість вибраних» – ціле число m, що задає кількість елементів у кожному розміщенні.

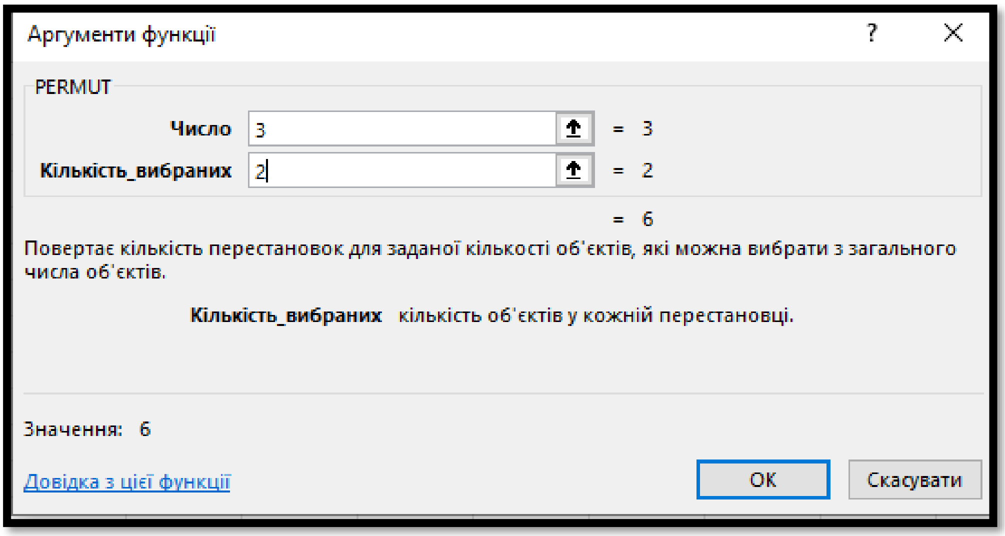


Рисунок 1.3. Обчислення кількості перестановок в MS Excel

Зауваження 1.4. Обчислення кількості розміщень без повторення за допомогою MATLAB можна виконати так:

```
Afrom5to3 = prod(5-3+1:5)% розміщення з 5 по 3

Afrom5to3 =
    60
```

Приклад 1.3. Скільки комбінацій по три букви можна скласти із чотирьох букв А, Б, В і Г?

Розв'язання. Із чотирьох букв А, Б, В і Г по три букви без урахування порядку розташування можна скласти всього чотири комбінації: АБВ, АБГ, АВГ, БВГ:

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = 4.$$

Зауваження 1.5. Обчислити C_3^2 можна у MS Excel за допомогою функції COMBIN (Формули ⟹ Вставити функцію ⟹ Статистичні ⟹ COMBIN) (див. рис. 1.4).

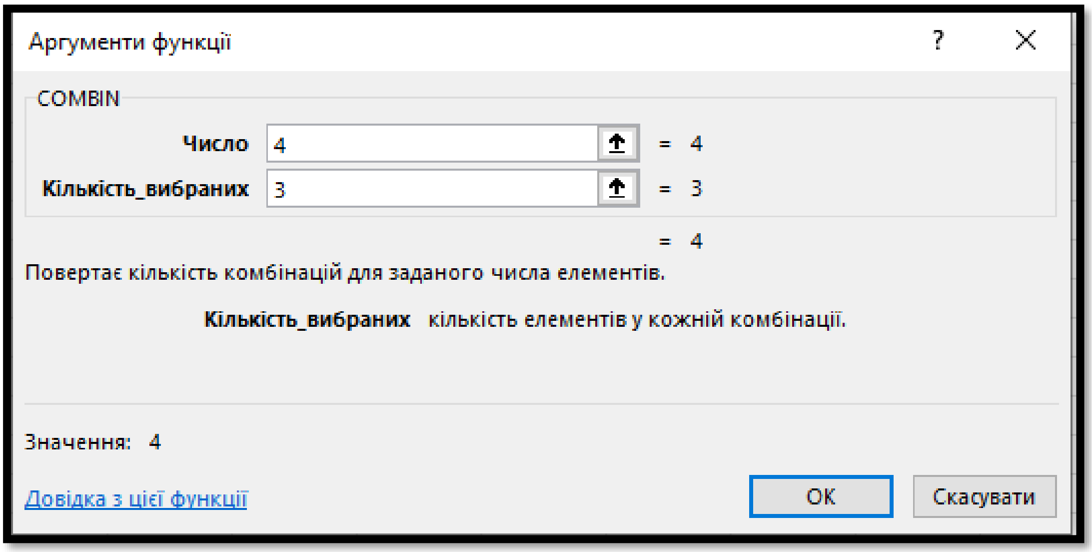


Рисунок 1.4. Обчислення кількості комбінацій у MS Excel

Зауваження 1.6. Обчислення кількості комбінацій та виведення всіх можливих комбінацій у MATLAB можна виконати за допомогою функцій `nchoosek` так:

```
Cfrom20to12=nchoosek(20,12) % кількість комбінацій із 20 по 12

Cfrom20to12 =
      125970

GComb=nchoosek(1:5,3) % виведення всіх комбінацій із 5 по 3
```

```
GComb =
     1     2     3
     1     2     4
     1     2     5
     1     3     4
     1     3     5
     1     4     5
     2     3     4
     2     3     5
     2     4     5
     3     4     5
```

Приклад 1.4. Скільки існує варіантів розбиття студентської групи із 15 осіб на дві підгрупи, в кожній із яких від 5 до 10 осіб?

Розв'язання. Розбити групу на 2 частини – це здійснити вибір однієї із груп, а решта залишаються у другій підгрупі. Обрати 5 людей із 15 можна C_{15}^{5} способами (вибірка без повторення, порядок у вибірці неважливий), 6 – C_{15}^{6} способами, …, 10 – C_{15}^{10} способами. Тут діє правило додавання, оскільки ми маємо обрати один із 6 варіантів:

$$C_{15}^{5}+C_{15}^{6}+C_{15}^{7}+C_{15}^{8}+C_{15}^{9}+C_{15}^{10}.$$

Реалізація в MATLAB:

```
C=0; % надаємо початкове значення
for k=5:10,
  C=C+nchoosek(15,k);
end
fprintf('Кількість можливих варіантів = %d.\n',C);

Кількість можливих варіантів = 28886.
```

Приклад 1.5. У скриньці знаходиться 5 білих, 3 червоні і 2 чорні кульки. Навмання виймають 3 кульки. Скільки існує варіантів вибору різних наборів кульок?

Розв'язання. Три кульки, які виймають із скриньки, є невпорядкованими. Множина кульок складається з 10 елементів і має повторення. Після виймання кульки у скриньку назад її не повертаємо. Тут потрібно здійснювати безпосередній підрахунок.

Реалізація в MATLAB:

```
A = [1 1 1 1 1 2 2 2 3 3]; % множина кульок: 1-біла, 2 - червона, 3 - чорна
k=3; % кількість навмання вибраних кульок
C=nchoosek(A,k); % всі комбінації
C1=unique(C,'rows') % залишаємо стрічки, які не повторюються
fprintf('Кількість комбінацій = %d.\n',size(C1,1));

C1 =
     1     1     1
     1     1     2
```

```
     1     1     3
     1     2     2
     1     2     3
     1     3     3
     2     2     2
     2     2     3
     2     3     3

Кількість комбінацій = 9.
```

Приклад 1.6. У ящику міститься 15 однотипних деталей, із яких 6 бракованих, а решта – стандартні. Навмання з ящика вибирають одну деталь. Яка ймовірність того, що вона буде стандартною?

Розв'язання. Кількість всіх рівноможливих елементарних подій для цього експерименту: $n = 15$. Нехай A – подія, що полягає в появі стандартної деталі. Кількість елементарних подій, що сприяють появі події A, становить $m = 9$. Тоді:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

Приклад 1.7. Маємо дев'ять однакових карток, на кожній з яких записано одну з цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Навмання беруть чотири картки і розкладають в один рядок. Яка ймовірність того, що під час цього дістанемо 1 9 7 3?

Розв'язання. Кількість елементарних подій множини буде $n = A_9^4$. Кількість елементарних подій, що сприяють появі 1 9 7 3 (подія B), дорівнює одиниці ($m = 1$). Отже,

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_9^4} = \frac{1}{3024}.$$

Приклад 1.8. У шухляді міститься 10 однотипних деталей, 6 із яких є стандартними, а решта – бракованими. Навмання із шухляди беруть чотири деталі. Обчислити ймовірність таких випадкових подій:

А – усі чотири деталі виявляться стандартними;

В – усі чотири деталі виявляться бракованими;

С – із чотирьох деталей виявляться дві стандартними і дві бракованими.

Розв'язання. Кількість усіх елементарних подій:

$$\Omega\colon n = C_{10}^4 = \mathrm{COMBIN}(10; 4) = 210;$$

кількість елементарних подій, що сприяють події A:

$$\mathrm{A}\colon m_1 = C_6^4 = \mathrm{COMBIN}(6; 4) = 15;$$

кількість елементарних подій, що сприяють події B:

$$\mathrm{B}\colon m_2 = C_4^4 = \mathrm{COMBIN}(4; 4) = 1;$$

кількість елементарних подій, що сприяють події C:

$$C: m_3 = C_6^2 \cdot C_4^2 = \text{COMBIN}(6;2) \cdot \text{COMBIN}(4;2) = 15 \cdot 9 = 90.$$

Ймовірності цих подій будуть:

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}, \qquad P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{1}{210}, \qquad P(C) = \frac{m_3}{n} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}.$$

На рис. 1.5 наведено приклад організації обчислення ймовірностей подій у MS Excel.

	A	B	C
1	n	=COMBIN(10;4)	=210
2	m1	=COMBIN(6;4)	=15
3	m2	=COMBIN(4;4)	=1
4	m3	=COMBIN(6;2)*COMBIN(4;2)	=90
5			
6	P(A)	=B2/B1	=0,071
7	P(B)	=B3/B1	=0,005
8	P(C)	=B4/B1	=0,429

Рисунок 1.5. Обчислення кількості комбінацій у MS Excel

Приклад 1.9. Задана множина цілих чисел $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Навмання беруть одне число. Яка ймовірність того, що це число виявиться кратним 3, коли відомо, що воно є непарне?

Розв'язання. Нехай подія A – поява числа, кратного 3, а B – кратного 2. Тоді:

$$A = \{3,6,9,12\}, m_1 = 4; \quad B = \{2,4,6,8,10,12\}, m_2 = 6; \quad A \cap B = \{6,12\}, m_3 = 2;$$

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}; \qquad P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2};$$

$$P(A \cap B) = \frac{m_3}{n} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \text{ або } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{m_1}{n} \cdot \frac{m_2}{n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Отже,

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}.$$

Оскільки $P(A) \neq P_B(A)$, то події A і B залежні.

Приклад 1.10. Прилад складається з трьох елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що перший елемент не вийде з ладу під час роботи приладу, дорівнює 0,95; другого – 0,9; третього – 0,85. Яка ймовірність того, що під час роботи приладу не вийде з ладу хоча б один елемент?

Розв'язання. Нехай $P(A_1) = p_1 = 0{,}95$ – ймовірність того, що перший елемент не вийде з ладу. Для другого і третього елементів ці ймовірності становитимуть відповідно $P(A_2) = p_2 = 0{,}9$; $P(A_3) = p_3 = 0{,}85$. Ймовірність того, що ці елементи вийдуть з ладу, дорівнюватиме відповідно:

$$P(\overline{A_1}) = q_1 = 1 - p_1 = 0{,}05, \quad P(\overline{A_2}) = q_2 = 1 - p_2 = 0{,}1,$$
$$P(\overline{A_3}) = q_3 = 1 - p_3 = 0{,}15.$$

Отже,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 1 - 0{,}05 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}15 = 1 - 0{,}0075 = 0{,}9925.$$

Приклад 1.11. Задана множина: $\Omega = \{0 \le x \le e,\ \ 0 \le y \le 1\}$. Яка ймовірність того, що навмання взяті два числа (x, y) утворять координати точки, яка потрапить у область А $= \{1 \le x \le e,\ \ 0 \le y \le \ln x\}$?

Розв'язання. Зобразимо множини Ω і А. Область, яка відповідає Ω, – це прямокутник зі сторонами e і 1 по x і y відповідно, а область, яка відповідає події А, – це криволінійна трапеція, що обмежена прямими $x = 1$, $x = e$, $y = 0$ і кривою $y = \ln x$ (рис. 1.6). Знайдемо міри заданих областей, тобто їх площі:

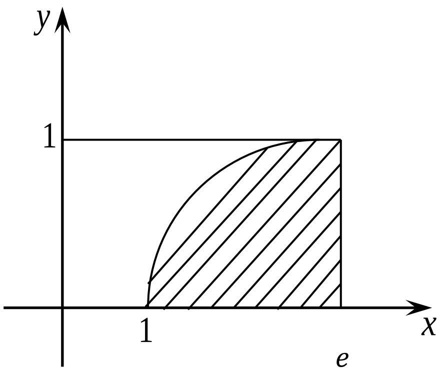


Рисунок 1.6. Множини А і Ω

$$m(A) = \int_1^e \ln x\, dx = \begin{bmatrix} u = \ln x\,, du = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = dx, \qquad v = x \end{bmatrix} =$$

$$= x \ln x|_1^e - \int_1^e dx = e - x|_1^e = e - e + 1 = 1.$$

Знайдемо сторону прямокутника x. Оскільки з того, що $\ln x = 1$, випливає, що $x = e$, знаходимо площу прямокутника:

$$m(\Omega) = 1 \cdot e = e.$$

Отже,

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1}{e}.$$

Зауваження 1.7. Обчислення інтеграла аналітичними методами здійснюється в системі MATLAB за допомогою функцій `int`, яка має синтаксис:

1) `int(y(x));`

2) `int(y(x), a, b);`

де y(x) – підінтегральна функція; a, b – межі інтегрування.

```
% обчислення інтеграла аналітичними методами
syms x % оголошення символьної змінної x
mA=log(x); % задаємо функцію
S1=int(mA,x,1,exp(1));
S=double(S1)

S =
1.0000
```

```
% чисельне обчислення інтеграла за допомогою методу трапецій
x=1:0.0001:exp(1);
mA=log(x);
S=trapz(x,mA);

S =
    0.9999
```

Точне значення інтеграла, як видно у наведеному розв’язку, становить 1.

Приклад 1.12. Знайдіть ймовірність того, що сума двох навмання взятих чисел із відрізка $[-1;1]$ більше нуля, а їх добуток від’ємний.

Розв’язання. Зобразимо множини Ω і A. Отже,

$$\Omega = \{(x,y)|-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\};$$

$$A = \{(x,y)|\ (x,y) \in \Omega\ \wedge x+y>0 \wedge x \cdot y < 0\}.$$

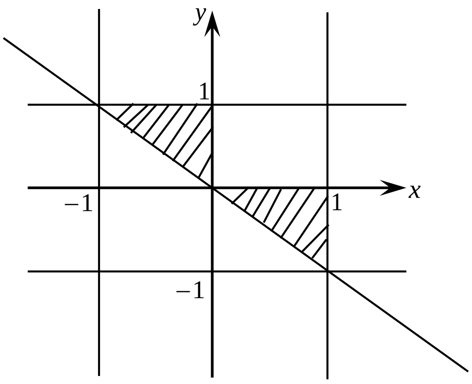


Рисунок 1.7. Множини A і Ω

Щоб побудувати область, яка відповідає події A, нанесемо на рисунок пряму $x+y=0$. Нерівності $x+y>0$ відповідає верхня півплощина, тобто верхній трикутник, а нерівності $xy<0$ відповідають заштриховані трикутники, тобто ті області, де точно один із співмножників має від’ємний знак (рис. 1.7).

Знайдемо міри заданих областей, тобто їх площі:

$$m(\Omega) = 2 \cdot 2 = 4; \qquad m(A) = 1.$$

Тоді $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)} = \dfrac{1}{4}.$

ЗАВДАННЯ ТА ВАРІАНТИ ДЛЯ ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Варіанти для виконання

Варіант для виконання роботи обирається з табл. 1.1 відповідно до номера за списком у підгрупі: номер варіанта збігається з номером за списком від 1 до 10, з 11-го номера – з останньою цифрою.

Таблиця 1.1 – Варіанти виконання завдань лабораторної роботи № 1

Номер варіанта	Номери завдань для виконання
1	1.1, 1.11, 1.21, 1.31
2	1.2, 1.12, 1.22, 1.32
3	1.3, 1.13, 1.23, 1.33

Номер варіанта	Номери завдань для виконання
4	1.4, 1.14, 1.24, 1.34
5	1.5, 1.15, 1.25, 1.35
6	1.6, 1.16, 1.26, 1.36
7	1.7, 1.17, 1.27, 1.37
8	1.8, 1.18, 1.28, 1.38
9	1.9, 1.19, 1.29, 1.39
10	1.10, 1.20, 1.30, 1.40

Завдання для виконання

1.1. Потрібно зі скриньки, в якій є 13 білих та 5 чорних кульок, вибрати 6 кульок, серед яких 2 білі. Скільки існує способів такого вибору? Вважати кульки одного кольору різними, наприклад, пронумерованими.

1.2. У відділі працює 5 економістів та 9 інженерів. Скількома способами можна відібрати 2 економістів та 3 інженерів, якщо спеціалісти вважаються рівноцінними?

1.3. Потрібно зі скриньки, в якій є 15 білих та 7 чорних кульок, вибрати 7 кульок, серед яких 5 білих. Скільки існує способів такого вибору? Вважати кульки одного кольору різними, наприклад, пронумерованими.

1.4. Для стажування 25 студентам виділено 10 місць на першій фірмі, 8 місць на другій та 7 місць на третій фірмі. Вважаючи розподіл рівноймовірним, визначити, скількома способами можна розподілити студентів за фірмами так, щоб 3 певні студенти попали на одну фірму.

1.5. У класі 25 учнів, з яких 7 цікавляться математикою, 10 – економічними дисциплінами, 8 – літературою. Скількома способами можна обрати трьох учнів, які цікавляться лише однією дисципліною?

1.6. В урні 9 білих та 6 чорних кульок. З урни дістають навмання 5 кульок. Скількома способами можна обрати кульки так, щоб серед них було не менше 3 білих кульок?

1.7. Партія містить 40 виробів. Скількома способами можна навмання вийняти 7 виробів так, щоб серед них було 5 бракованих, якщо відомо, що партія містить 20 % браку?

1.8. Із 10 лотерейних білетів книжкової лотереї, що перебувають у продажу, 2 виграшні. Скількома способами можна купити 5 білетів так, щоб серед куплених був один виграшний?

1.9. У вазі 5 троянд рожевого, 7 червоного та 3 білого кольору. Навмання дістають 2 троянди. Скільки існує способів, щоб обрати троянди одного кольору?

1.10. У вазі 5 троянд рожевого, 7 червоного та 3 білого кольору. Навмання дістають 2 троянди. Скільки існує способів, щоб обрати троянди різних кольорів?

1.11. Навмання взято два додатні числа x і y, кожне з яких не перевищує одиниці. Знайти ймовірність того, що сума $x + y$ не перевищує 3, а добуток $x \cdot y$ не менше 2.

1.12. Із проміжку [0; 4] випадковим способом вибирають два дійсні числа. Яка ймовірність того, що добуток вибраних чисел більший за 4?

1.13. Навмання обрано два додатні числа x і y, кожне з яких не перевищує 10. Знайти ймовірність того, що добуток їх буде не більший 10, а різниця $x-y$ – не буде перевищувати 2.

1.14. Два дійсні числа x і y вибирають так, що $|x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Яка ймовірність того, що $x^2 < y$?

1.15. Два дійсні числа x і y вибирають так, що $|x| \leq 2, 0 \leq y \leq 4$. Яка ймовірність того, що $x^2 < y$?

1.16. Два дійсні числа x і y вибирають так, що $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2$. Яка ймовірність того, що $y < \sqrt{x}$?

1.17. Два дійсні числа x і y вибирають так, що $|x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Яка ймовірність того, що $x^2 > y$?

1.18. Два дійсні числа x і y вибирають так, що $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2$. Яка ймовірність того, що $y > \sqrt{x}$?

1.19. Навмання обрано два додатні числа x і y, кожне з яких належить відрізку [1; 10]. Знайти ймовірність того, що добуток їх буде не більший 10.

1.20. Два дійсні числа x і y вибирають так, що $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4$. Яка ймовірність того, що $x^2 < y$?

1.21. На складі є 10 моніторів із заводу № 1 і вісім моніторів із заводу № 2. Навмання взято чотири монітори. Знайти ймовірність того, що серед них два монітори із заводу № 1 і два монітори із заводу № 2.

1.22. За підсумком року акції десяти фірм мали прибуток, акції чотирьох фірм знецінились, а акції шести фірм – зберегли свою номінальну вартість. Яка ймовірність того, що з випадково куплених шести акцій різних фірм три матимуть прибуток?

1.23. Для молодіжної вечірки було заготовлено 20 компакт-дисків, 7 з яких із інструментальною музикою. Знайти ймовірність того, що з чотирьох навмання відібраних компактів три будуть з інструментальною музикою.

1.24. У конверті 10 акцій, серед яких три – фірми А. Навмання відібрано 4 акції. Яка ймовірність того, що серед них буде одна акція фірми А?

1.25. Академічній групі, в якій 12 дівчат та 18 юнаків, запропоновано придбати 10 акцій банку А. Знайти ймовірність того, що власниками акцій стануть 4 юнаки та 3 дівчини, якщо розігрування здійснюється у випадковий спосіб.

1.26. Серед 30 видів акцій будівельних організацій 19 стали прибутковими, 5 – збитковими, а 6 залишилися без змін. Яка ймовірність того, що серед п'яти навмання придбаних акцій різних видів прибутковими виявляться три?

1.27. У цеху працює 10 верстатів-автоматів, кожен із яких може з певною ймовірністю перебувати у працездатному стані або у стані поломки. Яка ймовірність того, що під час роботи верстатів-автоматів із ладу вийдуть три з них?

1.28. Обчислити ймовірність того, що дні народження 10 осіб припадатимуть на різні місяці року.

1.29. В урні є 10 куль: 3 білі та 7 чорних. Яка ймовірність того, що витягнуті навмання 3 кулі будуть: а) чорні; б) одна чорна і дві білі?

1.30. В цеху працює 6 чоловіків і 4 жінки. За табельними номерами навмання відібрали 7 осіб. Знайти ймовірність того, що серед них буде три жінки.

1.31. Три студенти складають на сесії екзамен з математики. Ймовірність того, що перший складе екзамен, дорівнює 0,9, для другого та третього студентів ця ймовірність становить відповідно 0,8 і 0,7. Обчислити ймовірності таких випадкових подій: а) A – три студенти складуть екзамен; б) B – три студенти не складуть екзамену; в) C – два студенти складуть екзамен.

1.32. Для виготовлення деталі необхідно провести чотири незалежні технологічні операції. Ймовірність допустити брак під час виконання першої технологічної операції $q_1 = 0{,}1$, а для другої, третьої і четвертої ці ймовірності дорівнюють відповідно $q_2 = 0{,}05$, $q_3 = 0{,}15$, $q_4 = 0{,}2$. Яка ймовірність того, що виготовлена деталь виявиться стандартною?

1.33. Прилад складається з трьох елементів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що перший елемент не вийде з ладу під час роботи приладу, дорівнює $p_1 = 0{,}9$. Для другого і третього елементів ця ймовірність відповідно $p_2 = 0{,}8$ і $p_3 = 0{,}7$. Обчислити ймовірність того, що під час роботи приладу з ладу вийде: а) A – три елементи; б) B – два елементи; в) C – один елемент; г) D – не вийде з ладу жоден елемент.

1.34. Робітник обслуговує три верстати-автомати, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що протягом години перший верстат потребуватиме уваги робітника, дорівнює 0,9, другий – 0,85, а третій – 0,8. Яка ймовірність того, що протягом години уваги робітника потребуватимуть а) A – два верстати; б) B – хоча б один із трьох?

1.35. Студент шукає потрібну йому формулу у трьох довідниках. Ймовірність того, що формула є в першому, другому і третьому довіднику, відповідно дорівнює 0,6; 0,7 і 0,8. Знайти ймовірність того, що формула є: а) лише в одному довіднику; б) тільки у двох довідниках; в) у всіх трьох довідниках.

1.36. Два мисливці влучають у ціль зі ймовірностями 0,7 та 0,8 відповідно. Кожен з них робить один постріл. Яка ймовірність того, що: а) жоден не влучить; б) хоча б один влучить; в) лише один влучить у ціль?

1.37. У цеху є три резервні мотори, для кожного з яких ймовірність бути ввімкненим у цей момент дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що в цей момент ввімкнено: а) принаймні два мотори; б) принаймні один мотор.

1.38. Із партії товарів товарознавець вибирає вироби вищого сорту. Ймовірність того, що навмання взятий виріб належить до вищого сорту, дорівнює 0,8.

Знайти ймовірність того, що із трьох виробів будуть: а) тільки два вищого сорту; б) жодного виробу вищого сорту.

1.39. Від аеровокзалу відправились два автобуси. Ймовірність своєчасного прибуття кожного з них дорівнює 0,92. Знайти ймовірність такої події: а) A – обидва автобуси прибудуть своєчасно; б) B – тільки один автобус прибуде своєчасно.

1.40. Для сигналізації про аварію встановлено два незалежні сигналізатори. Ймовірність того, що під час аварії сигналізатор спрацює, дорівнює 0,95 для першого сигналізатора і 0,9 для другого. Знайти ймовірність того, що під час аварії спрацює: а) тільки один сигналізатор; б) хоча б один сигналізатор.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Що називають експериментом або випадковим експериментом?
2. Що називають випробуванням?
3. Що називають наслідком (елементарним наслідком, елементарною подією)?
4. Що називають множиною (або простором) елементарних подій?
5. Яка подія називається елементарною? Навести приклади.
6. Які події називаються вірогідними (достовірними) та неможливими?
7. Які події називаються сумісними і несумісними, рівноможливими, протилежними?
8. Класичне означення ймовірності події.
9. Геометричне означення ймовірності події.
10. Які сполуки елементів певної множини називаються перестановками, розміщеннями та комбінаціями?
11. За якими формулами обчислюються число перестановок, розміщень та комбінацій?
12. Як пов'язані між собою перестановки, розміщення і комбінації?
13. Як обчислюються перестановки, розміщення, комбінації у MS Excel, MATLAB?
14. Назвіть основні принципи комбінаторики.
15. Як обчислити ймовірність суми двох сумісних, несумісних подій?
16. Як обчислити ймовірність сумісного настання двох незалежних, залежних подій?
17. Дайте означення повної групи випадкових подій. Чому дорівнює сума ймовірностей повної групи випадкових подій?
18. Як позначається та обчислюється умовна ймовірність?
19. За якою формулою обчислюють ймовірність появи хоча би однієї з попарно несумісних подій?
20. Як обчислюється ймовірність події $\bar{A}$, якщо відома ймовірність $P(A)$?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 2
Формула повної ймовірності та формула Баєса. Схема Бернуллі. Формула Бернуллі. Граничні теореми у схемі Бернуллі

Мета: використання пакетів Microsoft Excel та MATLAB для розв'язування задач для знаходження повної ймовірності, ймовірності за формулою Баєса, розв'язування задач за схемою Бернуллі.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1. Формула повної ймовірності. Формула Баєса

Події $H_1, H_2, \dots, H_n$, які утворюють повну групу попарно несумісних подій, є *системою гіпотез*, якщо ці події попарно несумісні і в сумі становлять вірогідну подію.

Теорема 2.1. Якщо випадкова подія A може відбутись лише сумісно з однією з несумісних подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, що утворюють повну групу, тоді ймовірність події A обчислюється за формулою *повної ймовірності:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A).$$

Щоб знайти ймовірність гіпотез, за умови, що подія A відбулася, використовують *формулу Баєса:*

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k)P_{H_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}, \quad k = 1,2,\dots,n.$$

2. Формула Бернуллі та наслідки з неї

Якщо n випробувань проводити за однакових умов і ймовірність настання події A в усіх випробуваннях однакова та не залежить від настання або ненастання A в інших випробуваннях, таку послідовність незалежних випробувань називають *схемою Бернуллі*.

Нехай ймовірність настання події A в кожному з випробувань становить p, а ймовірність протилежної події q $(q = 1-p)$. Ймовірність того, що внаслідок n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія A відбудеться m разів, обчислюється за *формулою Бернуллі:*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Наслідок 2.1. Ймовірність того, що внаслідок n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія відбудеться від m_1 до m_2 разів, обчислюється за формулою:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m} = \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Наслідок 2.2. Ймовірність того, що внаслідок n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія A відбудеться не більше m разів, обчислюється за формулою:

$$P_n(0 \le k \le m) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{m} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Наслідок 2.3. Ймовірність того, що внаслідок n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія A відбудеться не менше m разів, обчислюється за формулою:

$$P_n(m \le k \le n) = \sum_{k=m}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1- P_n(0 \le k \le m-1) = 1- \sum_{k=0}^{m-1} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Наслідок 2.4. Ймовірність того, що внаслідок n незалежних експериментів за схемою Бернуллі подія A відбудеться хоча б один раз, обчислюється за формулою:

$$P_n(1 \le m \le n) = 1- q^n.$$

Найімовірнішим числом появи випадкової події A внаслідок n незалежних експериментів за схемою Бернуллі називається таке число m_0, для якого ймовірність $P_n(m_0)$ перевищує або є не меншою за ймовірність кожного з решти можливих наслідків експериментів. Число m_0 називається *модою* і визначається нерівностями:

$$np- q \le m_0 \le np + p \qquad \text{або} \qquad (n+1)p- 1 \le m_0 \le (n+1)p,$$

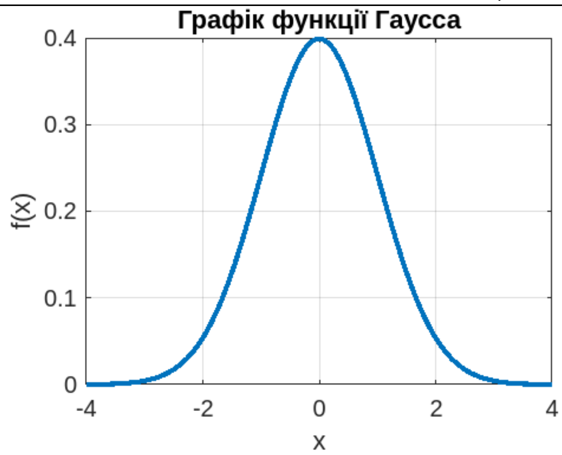
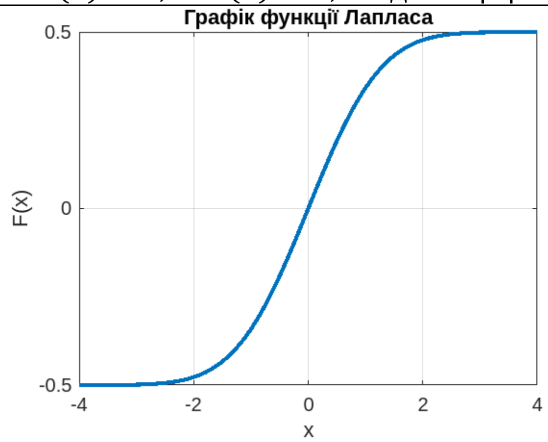
де m_0 – ціле невід’ємне число, яке знаходиться між $(n+1)p-1$ та $(n+1)p$.

Якщо $(n+1)p-1 \in Z$, то найбільш ймовірними є два значення $(n+1)p-1$ та $(n+1)p$.

3. Локальна та інтегральна теореми Муавра–Лапласа

Знаходження ймовірностей $P_n(m)$ та $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ за формулою Бернуллі ускладнюється у разі доволі великих значень n та m. У таких випадках користуються наближеними асимптотичними формулами, які базуються на використанні функцій Гаусса та Лапласа. Аналітичний вигляд функцій та основні їх властивості наведені у табл. 2.1.

Таблиця 2.1 – Основні властивості функцій Гаусса та Лапласа

Функція Гаусса	**Функція Лапласа**
$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$
Область визначення: $x \in (-\infty; +\infty)$	Область визначення: $x \in (-\infty; +\infty)$
Функція парна: $\varphi(-x) = \varphi(x)$	Функція непарна: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 0, \quad \varphi_{max} = \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = -0{,}5, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 0{,}5,$ $\Phi(0) = 0, \quad \Phi(x) \approx 0{,}5 \quad \text{для} \quad \lvert x\rvert \geq 4$
 Крива симетрична відносно осі Ox. Площа криволінійної трапеції, що обмежена кривою і віссю Ox, становить ≈ 1	 Крива симетрична відносно початку координат

Теорема 2.2 ***(локальна теорема Муавра–Лапласа).*** Якщо у кожному із n незалежних випробувань, проведених за схемою Бернуллі, ймовірність появи події A стала і відмінна від нуля та одиниці $(0 < p < 1)$, то ймовірність $P_n(m)$ того, що під час цих n випробувань подія A настане рівно m разів, обчислюється за асимптотичною формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x_m),$$

де $x_m = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x)$ – функція Гаусса.

Теорема 2.3 ***(інтегральна теорема Муавра–Лапласа).*** Якщо ймовірність p настання успіху в кожному конкретному випробуванні, проведеному за схемою Бернуллі, стала і відмінна від нуля та одиниці $(0 < p < 1)$, то ймовірність $P_n(m_1, m_2)$ того, що під час великої кількості випробувань успіх настане від m_1 до m_2 разів $(m_1 \leq m \leq m_2)$, визначається за асимптотичною формулою:

$$P_n(m_1, m_2) = P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

де $x_1 = \frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

За допомогою інтегральної формули Муавра–Лапласа можна оцінити ймовірність того, що різниця між відносною частотою появи події $P^*(A) = \frac{m}{n}$ й істинним значенням імовірності p успіху в конкретному випробуванні не більша за наперед задану величину.

Теорема 2.4. Нехай p – ймовірність появи випадкової події A в кожному експерименті за схемою Бернуллі, а $P^*(A) = \frac{m}{n}$ – відносна частота появи цієї події під час n випробувань. Тоді ймовірність відхилення відносної частоти від сталої ймовірності p з похибкою ε $(\varepsilon > 0)$ обчислюється за формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

4. Формула Пуассона для малоймовірних випадкових подій

Точність локальної та інтегральної формули Лапласа для великих значень знижується з наближенням p до нуля.

Теорема 2.5 ***(теорема Пуассона).*** Якщо $n \to \infty$ і $p \to 0$, причому $np = \lambda$ в кожному з випробувань Бернуллі, то ймовірність появи випадкової події m разів $(0 \le m \le n)$ обчислюється за формулою Пуассона:

$$P(m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}.$$

Із цієї формули випливає, що:

$$P(m_1 \le m \le m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P(m) = \sum_{m=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}.$$

У табл. 2.2 наведені критерії застосування формул Бернуллі, Муавра–Лапласа та Пуассона для обчислення ймовірностей подій у випробуваннях, проведених за схемою Бернуллі.

Таблиця 2.2 – Критерії застосування формул Бернуллі, Муавра–Лапласа та Пуассона

Формула Бернуллі	**Теореми Муавра–Лапласа**	**Формула Пуассона**
Для невеликих n	$n \ge 100$, $npq > 20$	$n \to \infty$, $p \to 0$, $0 \le np \le 10$ $(0 \le \lambda \le 10)$

ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 2.1. У ящику міститься 10 однотипних деталей, із них 6 стандартних, а решта браковані. Із ящика навмання беруть дві деталі і назад не повертають. Яка ймовірність того, що з ящика навмання вийнята деталь буде стандартною?

Розв'язання. Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що з ящика вийнято навмання одну стандартну деталь після того, як з нього було вийнято дві деталі.

Розглянемо такі події:

H_1 – було взято дві стандартні деталі;

H_2 – було взято одну стандартну і одну браковану деталь;

H_3 – було взято дві браковані деталі;

Обчислимо ймовірності гіпотез $P(H_i)$ та ймовірності $P_{H_i}(A)$, $i = 1,2,3$. Отримаємо:

$$P(H_1) = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}, \qquad P_{H_1}(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$P(H_2) = \frac{C_6^1 \cdot C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{6 \cdot 4}{45} = \frac{8}{15}, \qquad P_{H_2}(A) = \frac{5}{8},$$

$$P(H_3) = \frac{C_6^0 \cdot C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{1 \cdot 6}{45} = \frac{2}{15}, \qquad P_{H_3}(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

За формулою повної ймовірності маємо:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{4} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Обчислення в MS Excel наведені на рис. 2.1.

	A	B	C
1	кількість стандартних	6	
2	кількість нестандартних	4	
3	Загальна кількість	10	
4	Кількість способів вибору 2 деталей	=COMBIN(10;2)	
5	P(H1)=	=COMBIN(6;2)/B4	
6	P(H2)=	=COMBIN(6;1)*COMBIN(4;1)/B4	
7	P(H3)=	=COMBIN(4;2)/B4	
8	P(A/H1)=	=(B1-2)/(B3-2)	
9	P(A/H2)=	=(B1-1)/(B3-2)	
10	P(A/H3)=	=B1/(B3-2)	
11	P(A)=	P(H1)*P(A/H1)+P(H2)*P(A/H2)+P(H3)*P(A/H3)=	
12		=B5*B8+B6*B9+B7*B10	=0,6

Рисунок 2.1. Обчислення за формулою повної ймовірності засобами MS Excel

Приклад 2.2. Деталі, виготовлені на заводі, попадають для перевірки їх стандартності до одного з двох контролерів. Ймовірність того, що деталь попаде до першого контролера, дорівнює 0,6, а до другого – 0,4. Ймовірність того, що деталь буде визнана стандартною першим контролером, дорівнює 0,94, а другим – 0,98. Навмання вибрана деталь виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що деталь перевіряв перший контролер.

Розв'язання. Нехай A – випадкова подія, що вибрана деталь є стандартною. Позначимо через H_1 гіпотезу про те, що деталь перевіряв перший контролер $P(H_1) = 0{,}6$, а через H_2 – гіпотезу про те, що деталь перевіряв другий контролер $P(H_2) = 0{,}4$.

$P_{H_1}(A)$ – ймовірність того, що деталь виявиться стандартною, якщо її перевіряв перший контролер, $P_{H_1}(A) = 0{,}94$. Аналогічно $P_{H_2}(A) = 0{,}98$. За формулою Баєса при $i = 1$ одержимо:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{\sum_{i=1}^{2} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}94}{0{,}6 \cdot 0{,}94 + 0{,}4 \cdot 0{,}98} = 0{,}59.$$

Приклад 2.3. Робітник обслуговує шість верстатів-автоматів. Ймовірність того, що протягом години верстат-автомат потребуватиме уваги робітника, є величиною сталою і дорівнює 0,6. Яка ймовірність того, що за годину уваги робітника потребуватимуть:

1) три верстати;

2) від двох до п'яти верстатів;

3) принаймні один верстат.

Розв'язання. За умовою маємо: $p = 0{,}6$, $q = 0{,}4$, $n = 6$, $m = 3$. Тоді відповідно до формули Бернуллі та наслідків 2.1 і 2.3 маємо:

1) $P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^3 = 20 \cdot 0{,}216 \cdot 0{,}064 = 0{,}27648;$

2) $$P_6(2 \le m \le 5) = \sum_{m=2}^{5} C_6^m p^m q^{6-m} =$$
$$= C_6^2 p^2 q^4 + C_6^3 p^3 q^3 + C_6^4 p^4 q^2 + C_6^5 p^5 q =$$
$$= 15 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^4 + 20 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^3 + 15 \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^2 + 6 \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4 = 0{,}902384;$$

3) $P_6(1 \le m \le 6) = 1 - P_6(0) = 1 - C_6^0 p^0 q^6 = 1 - 0{,}4^6 = 0{,}995904.$

Зауваження 2.1. Задачі на застосування формули Бернуллі можна розв'язати з використанням функції BINOM.DIST (категорія Статистичні) пакету MS Excel. На рис. 2.2 зображено обчислення для п. 1 прикладу 2.3.

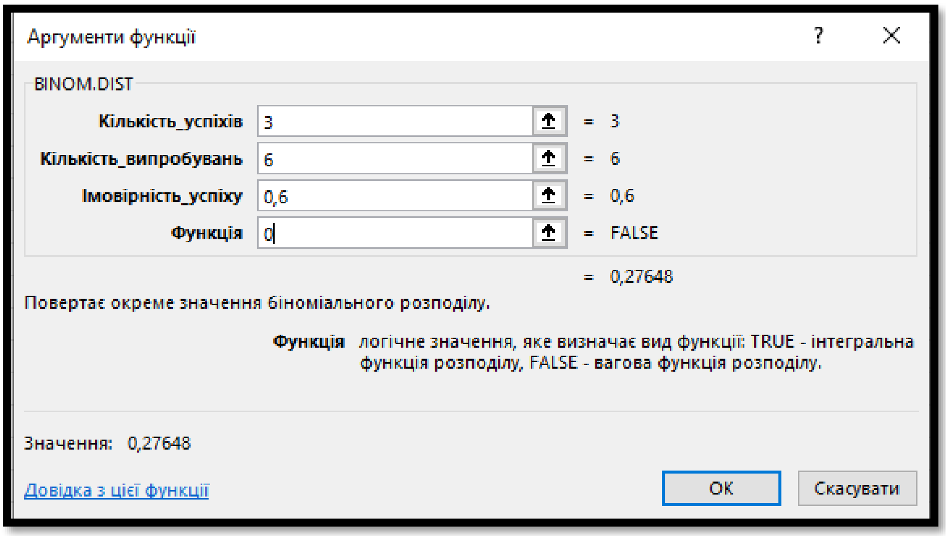


Рисунок 2.2. Обчислення ймовірності за формулою Бернуллі у MS Excel

Наведемо пояснення до застосування функції BINOM.DIST:

- кількість успіхів – кількість випробувань m, які сприяють появі події;
- кількість випробувань – кількість незалежних випробувань n;
- імовірність успіху – ймовірність успіху кожного випробування p;
- функція – логічне значення, яке визначає форму функції:

– якщо аргумент задати 0 (FALSE), то функція BINOM.DIST повертає значення ймовірності за формулою:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m},$$

– якщо аргумент задати рівним 1 (TRUE), то функція BINOM.DIST повертає значення за формулою:

$$P_n(0 \leq k \leq m) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

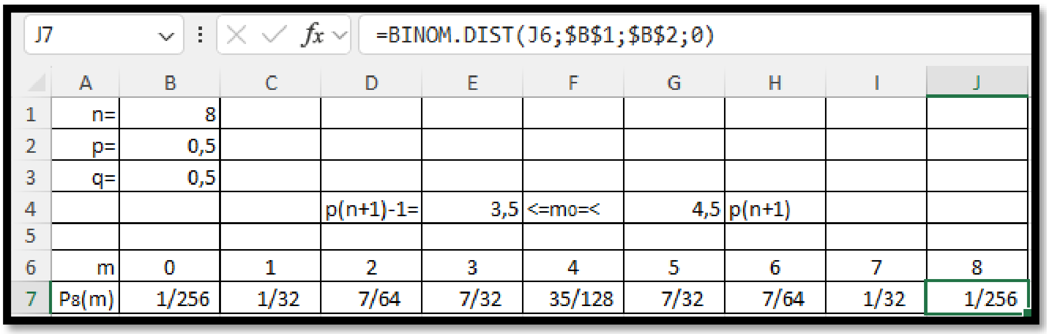
Зауваження 2.2. Для обчислення ймовірності за схемою Бернуллі можна скористатися функцією `binopdf` в MATLAB. Реалізація прикладу 2.3. (п. 1 і п. 2) в MATLAB:

```
n=6; % кількість випробувань
p=0.6; % ймовірність успіху
k=3; % кількість успішних випробувань
P=binopdf(k,n,p) % обчислюємо ймовірність за формулою Бернуллі

P =
    0.2765

n=6; % кількість випробувань
p=0.6; % ймовірність успіху
k=2:5; % кількість успішних випробувань
P=sum(binopdf(k,n,p)) % обчислюємо ймовірність
```

```
P =
    0.9124
```

Приклад 2.4. Ймовірність появи випадкової події *А* в кожному з незалежних випробувань є сталою величиною і дорівнює $p = 0{,}5$. Користуючись функцією BINOM.DIST, обчислити ймовірність подій для m від 0 до 8 і розмістити їх у вигляді таблиці. Визначити найбільш ймовірне число появи події.

Розв'язання. Результати виконання в MS Excel наведені на рис. 2.3.


J7 | =BINOM.DIST(J6;B1;B2;0)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	n=	8								
2	p=	0,5								
3	q=	0,5								
4				p(n+1)-1=	3,5	<=m0=<	4,5	p(n+1)		
5										
6	m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
7	P8(m)	1/256	1/32	7/64	7/32	35/128	7/32	7/64	1/32	1/256

Рисунок 2.3. Найбільш ймовірне число появи події

Найбільш ймовірне число k можна одержати з нерівностей:

$$(n+1)p-1 \le m_0 \le (n+1)p,$$

підставивши значення $n = 8$ та $p = 0{,}5$. Отримаємо (рис. 2.3):

$$3{,}5 \le m_0 \le 4{,}5.$$

Отже, $m_0 = 4$.

Приклад 2.5. Фабрика випускає 75 % виробів 1-го сорту. Із партії готових виробів навмання беруть 400 деталей. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

1) виробів 1-го сорту виявиться 290 шт.;

2) виробів 1-го сорту виявиться 300 шт.

Розв'язання. За умовою задачі маємо: $n = 400,\ p = 0{,}75,\ q = 0{,}25.$

Для розв'язання задачі використаємо локальну формулу Муавра–Лапласа відповідно до табл. 2.2. Спочатку знайдемо:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{400 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25} = \sqrt{75} \approx 8{,}7, \quad np = 400 \cdot 0{,}75 = 300.$$

1) $m = 290$, тоді:

$$x_{290} = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = \frac{290-300}{8{,}7} = -1{,}149.$$

З таблиці значень функції Гаусса знаходимо, що $\varphi(-1{,}15) = \varphi(1{,}15) = 0{,}2059$. Отже, маємо:

$$P_{400}(290) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x_m) = \frac{\varphi(1{,}15)}{8{,}7} = \frac{0{,}2059}{8{,}7} = 0{,}0237.$$

2) $m = 300$, тоді:

$$x_{290} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{300 - 300}{8{,}7} = 0.$$

$$P_{400}(300) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x_m) = \frac{\varphi(0)}{8{,}7} = \frac{0{,}3989}{8{,}7} = 0{,}046.$$

Зауваження 2.3. Для розв'язання цієї задачі можна використати стандартну функцію MS Excel, а саме – NORM.DIST для отримання значення функції Гаусса (наприклад, рис. 2.4).

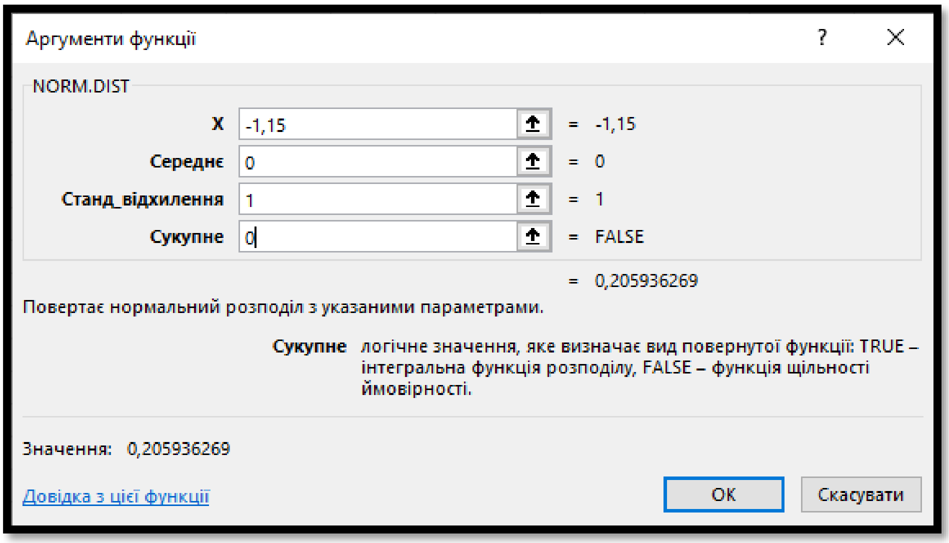


Рисунок 2.4. MS Excel. Локальна теорема Муавра–Лапласа

Зауваження 2.4. Для розв'язання прикладу 2.5 можна скористатися функцією `normpdf` в MATLAB. Наприклад, для п. 1 маємо:

```
n=400; %кількість випробувань
p=0.75; % ймовірність успішних
q=0.25; % ймовірність неуспішних
m=290; % кількість успішних
mu=n*p; % обчислюємо параметри
sigma=(n*p*q)^0.5;
Pnorm=normpdf(m,mu,sigma) % ймовірність нормального розподілу

Pnorm=
    0.0237
```

Приклад 2.6. Верстат-автомат виготовляє однотипні деталі. Ймовірність того, що виготовлена одна деталь виявиться стандартною, є сталою величиною і дорівнює 0,95. За зміну верстатом було виготовлено 800 деталей. Яка ймовірність того, що стандартних деталей серед них буде:

1) від 720 до 780 шт.;

2) від 740 до 790 шт.?

Розв'язання. За умовою задачі: $n = 800$; $p = 0{,}95$; $q = 0{,}05$.

Використаємо інтегральну формулу Муавра–Лапласа. Спочатку знайдемо:

$$\sqrt{npq} = \sqrt{800 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05} = \sqrt{38} \approx 6{,}16, \quad np = 800 \cdot 0{,}95 = 760.$$

1) $720 \leq m \leq 780$:

$$x_{720} = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{720-760}{6{,}16} \approx -6{,}5, \qquad x_{780} = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{780-760}{6{,}16} \approx 3{,}25.$$

З таблиці значень функції Лапласа маємо:

$$P_{800}(720 \leq m \leq 780) = \Phi(3{,}25) - \Phi(-6{,}5) = 0{,}4993 + 0{,}5 = 0{,}999.$$

2) $740 \leq m \leq 790$:

$$x_{740} = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{740-760}{6{,}16} \approx -3{,}25,$$

$$x_{790} = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{790-760}{6{,}16} \approx 4{,}87.$$

З таблиці значень функції Лапласа маємо:

$$P_{800}(740 \leq m \leq 790) = \Phi(4{,}78) - \Phi(-3{,}25) = \Phi(4{,}78) + \Phi(3{,}25) =$$
$$= 0{,}5 + 0{,}4993 = 0{,}999.$$

Зауваження 2.5. Якщо для розв'язання задачі скористатися вже відомою стандартною функцією MS Excel, а саме NORM.DIST, то можна окремо обчислити, наприклад, $\Phi(3{,}25)$ та $\Phi(6{,}5)$. Під час цього від одержаних значень потрібно відняти 0,5 (рис. 2.5).

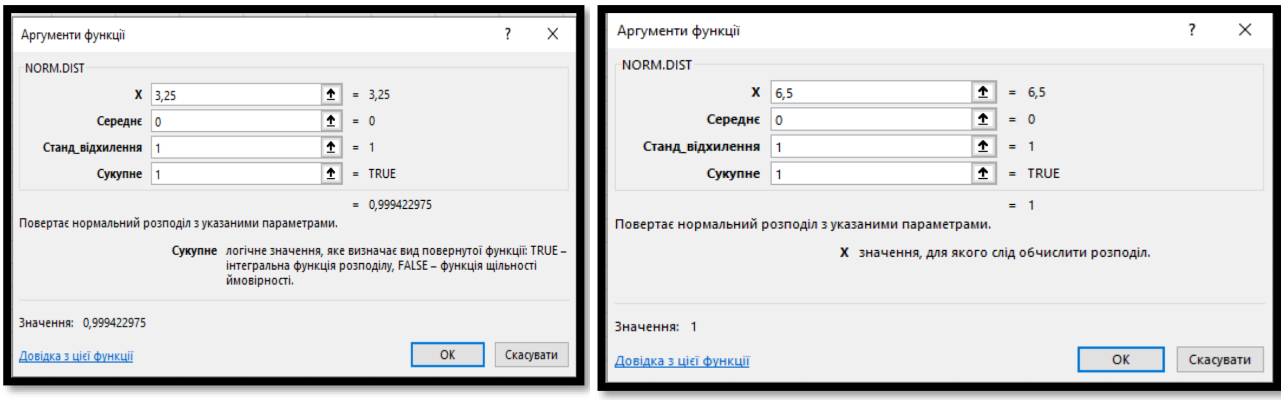


Рисунок 2.5. MS Excel. Локальна теорема Муавра–Лапласа

Приклад 2.7. Радіоприлад містить 1 000 мікроелементів, які працюють незалежно один від одного, причому кожен може вийти з ладу під час роботи приладу зі ймовірністю $p = 0{,}002$. Обчислити ймовірності таких випадкових подій:

1) під час роботи приладу з ладу вийдуть 3 мікроелементи;

2) від трьох до шести.

Розв'язання. За умовою задачі маємо: $n = 1000$, $p = 0{,}002$.

Оскільки n велике, а p – мале число, то для обчислення ймовірностей застосуємо формулу Пуассона. Для цього обчислимо значення параметра:

$$\lambda = np = 2.$$

1) $m = 3$, тоді:

$$P(m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} \quad \Longrightarrow \quad P(3) = \frac{2^3}{3!}e^{-2} = 0{,}1804;$$

2) $3 \le m \le 6$, тоді:

$$P(3 \le m \le 6) = \sum_{m=3}^{6} P(m) = \sum_{m=3}^{6} \frac{2^m}{m!}e^{-2} = e^{-2}\left(\frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!}\right) = 0{,}3188.$$

Зауваження 2.6. Щоб обчислити відповідні ймовірності в MS Excel, можна використати функцію POISSON.DIST (рис. 2.6), де:

- аргумент функції x вказує на кількість успіхів;
- середнє – величина $\lambda = n \cdot p$;
- сукупне – може набувати 0 (FALSE), тоді повертає $P(m)$, або ж 1 (TRUE), тоді повертає $P_n(0 \le k \le m)$.

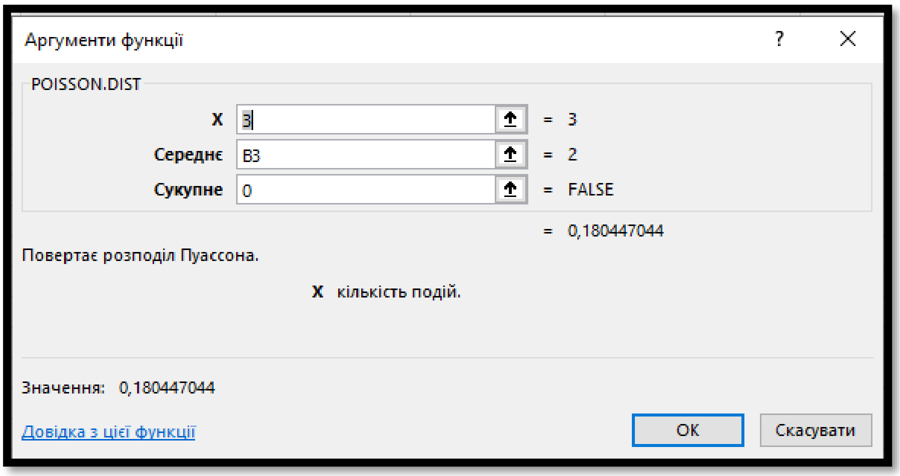


Рисунок 2.6. Обчислення за формулою Пуассона у MS Excel

Організація обчислень у MS Excel для прикладу 2.7 наведена на рис. 2.7.

	A	B	C	D
1	n=	1000		
2	p=	0,002		
3	lambda=	=B1*B2		
4				
5	m	P(m)		
6	3	=POISSON.DIST(3;B3;0)	=0,18	
7				
8				
9	m	P(m)		
10	3	=POISSON.DIST(A10;B3;0)		
11	4	=POISSON.DIST(A11;B3;0)		
12	5	=POISSON.DIST(A12;B3;0)		
13	6	=POISSON.DIST(A13;B3;0)		
14	P(3<=m<=6)	P(3)+P(4)+P(5)+P(6)	=SUM(B10:B13)	=0,319
15				
16	P(0<=m<=6)=	=POISSON.DIST(6;B3;1)		=0,995
17	P(3<=m<=6)=	P(0<=m<=6)-P(0<=m<=2)	=B16-POISSON.DIST(2;B3;1)	=0,319

Рисунок 2.7. Обчислення ймовірностей за допомогою формули Пуассона

Зауваження 2.7. Для розв'язування прикладу 2.7 можна скористатися функцією `poisspdf` у MATLAB. Наприклад, для п. 1 маємо:

```
n=1000; % кількість випробувань
p=0.002; % ймовірність невдачі
m=3; % кількість невдач
lambda=n*p; % обчислюємо параметр lambda для формули Пуассона
y=poisspdf(m,lambda) % обчислюємо ймовірність трьох невдач

y =
    0.1804
```

Приклад 2.8. Ймовірність виходу з ладу виробу під час проведення експерименту дорівнює 0,2. Було перевірено 400 виробів. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхиляється від заданої ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,01.

Розв'язання. За умовою задачі: $n = 400$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, $\varepsilon = 0{,}01$. Підставляємо ці значення в формулу:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \Rightarrow P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}2\right| \le 0{,}01\right) \approx$$

$$\approx 2\Phi\left(0{,}01\sqrt{\frac{400}{0{,}2\cdot 0{,}8}}\right) = 2\Phi(0{,}5) = 2\cdot 0{,}1915 = 0{,}383.$$

ЗАВДАННЯ ТА ВАРІАНТИ ДЛЯ ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Варіанти для виконання

Варіант для виконання роботи обирається з табл. 2.3 відповідно до номера за списком у підгрупі: номер варіанта збігається з номером за списком від 1 до 10, з 11-го номера – з останньою цифрою.

Таблиця 2.3 – Варіанти виконання завдань лабораторної роботи № 2

Номер варіанта	**Номери завдань для виконання**
1	2.1, 2.11, 2.21, 2.31, 2.41
2	2.2, 2.12, 2.22, 2.32, 2.42
3	2.3, 2.13, 2.23, 2.33, 2.43
4	2.4, 2.14, 2.24, 2.34, 2.44
5	2.5, 2.15, 2.25, 2.35, 2.45
6	2.6, 2.16, 2.26, 2.36, 2.46
7	2.7, 2.17, 2.27, 2.37, 2.47
8	2.8, 2.18, 2.28, 2.38, 2.48
9	2.9, 2.19, 2.29, 2.39, 2.49
10	2.10, 2.20, 2.30, 2.40, 2.50

Завдання для виконання

2.1. На конвеєр надходять деталі від трьох автоматів. Перший дає 90 %, другий – 93 %, а третій – 95 % придатної продукції. Протягом зміни від першого автомата надходить 60, від другого – 50, від третього – 40 деталей. Знайти ймовірність потрапляння на конвеєр: а) нестандартної деталі; б) стандартної деталі.

2.2. Кількість вантажних автомобілів, що проїжджає по шосе повз заправку, відноситься до кількості легкових автомашин як 3:2. Ймовірність того, що заправляється вантажівка, – 0,1; легковик – 0,2. Яка ймовірність того, що машина, яка проїжджає по шосе, заправиться?

2.3. Маємо три партії деталей. Перша складається з 10 стандартних і 4 нестандартних, друга – із 14 стандартних і 4 нестандартн чх, третя – із 16 стандартних і 5 нестандартних деталей. Із навмання вибраної партії береться деталь. Знайти ймовірність того, що деталь буде стандартною.

2.4. Для посіву пшениці заготовлено насіння, серед якого 95 % 1-го сорту, 3 % 2-го та 2 % 3-го сорту. Ймовірність того, що з насінини виросте колосок, у якому не менш ніж 50 зерен, для 1-го сорту насіння становить 0,5, для 2-го сорту – 0,2, для 3-го – 0,1. Знайти ймовірність того, що навмання взятий колосок у разі такого посіву матиме не менш як 50 зерен.

2.5. Металеві заготовки для подальшої обробки надходять із двох цехів: 55 % із першого, 45 % із другого. Водночас продукція з першого цеху містить 3 %, а з другого цеху – 5 % браку. Знайти ймовірність того, що заготівка, яка надійшла на обробку, придатна.

2.6. У лікарню поступають (у середньому) 50 % хворих на грип, 30 % хворих на ангіну та 20 % хворих на запалення легенів. Ймовірність повного одужання від грипу дорівнює 0,7, від ангіни та запалення легенів – 0,8 та 0,9 відповідно. Знайти ймовірність того, що хворий одужає.

2.7. На фабриці виготовляють гвинти. Перша машина виготовляє 25 %, друга – 35 %, третя – 40 % усіх виробів. Частка браку відповідно 5 %, 4 % і 2 %. Випадково вибраний гвинт виявився бракованим. Яка ймовірність того, що його зроблено першою машиною?

2.8. Деталі на конвеєр надходять із двох автоматів. Від першого – 60 %, від другого – 40 %. Перший автомат дає 2 %, а другий – 1 % браку. Деталь, яка надійшла на конвеєр, виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що цю деталь виготовлено другим автоматом.

2.9. Маємо три партії однакових деталей. У першій є 20 стандартних і 5 нестандартних, у другій – 15 стандартних і 3 нестандартні, у третій – 14 стандартних і 2 нестандартні деталі. Із навмання вибраної партії взяли деталь. Вона виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що цю деталь узято з третьої партії.

2.10. Партію виготовлених деталей перевіряли два контролери. Перший перевірив 45 %, а другий – 55 % деталей. Ймовірність припуститися помилки під час перевірки для першого контролера становить 0,15, для другого – 0,1. Після додаткової перевірки в партії прийнятих деталей виявлено браковану. Знайти ймовірність помилки для першого контролера.

2.11. Ймовірність виготовлення робітником деталі відмінної якості становить 0,75. Яка ймовірність того, що серед 6 виготовлених робітником деталей хоча б одна буде відмінної якості? Знайти найімовірніше число виготовлених робітником деталей відмінної якості й обчислити ймовірність цього числа.

2.12. Під час тестування з математики студент має дати правильні відповіді на п’ять запитань. Ймовірність того, що студент відповість на одне запитання, у середньому дорівнює 0,8. Щоб скласти тест, студентові потрібно дати відповідь не менше ніж на три запитання. Знайти ймовірність того, що студент складе тест.

2.13. Ймовірність того, що електролампочка не перегорить під час увімкнення її в електромережу, є сталою величиною і дорівнює 0,95: а) обчислити ймовірність того, що з шести електролампочок, увімкнених в електромережу незалежно (паралельно), не перегорять не менше як три; б) знайти найімовірніше число лампочок, які не перегорять, і обчислити ймовірність цього числа.

2.14. На автобазі є 12 пасажирських автобусів. Ймовірність того, що на маршрутну лінію вийде автобус, у середньому дорівнює 0,85. Знайти ймовірність того, що автобаза працюватиме в нормальному режимі, якщо для цього потрібно, аби на маршрутну лінію виїхало не менш як 9 автобусів.

2.15. Батарея зробила 14 пострілів по об'єкту, ймовірність влучення в який – 0,2. Обчислити: а) найбільш ймовірне число влучень і його ймовірність; б) ймовірність того, що було не менше 4-х влучень.

2.16. Вироби містять 5 % браку. Знайти ймовірність того, що серед п'яти виробів: а) не буде жодного бракованого; б) будуть два браковані.

2.17. Ймовірність настання події у кожному з 18 незалежних випробувань дорівнює 0,2. Знайти ймовірність настання цієї події принаймні двічі.

2.18. Ймовірність виходу з ладу конденсатора дорівнює $\frac{3}{11}$. Навмання беруть 10 конденсаторів і вмикають паралельно в електричну мережу. Знайти найімовірніше число конденсаторів, які вийдуть із ладу, і обчислити відповідну ймовірність.

2.19. Ймовірність того, що студент складе іспит з математики, є величиною сталою і дорівнює в середньому 0,8. Нехай є група з восьми студентів. Знайти: а) ймовірність того, що іспит з математики складуть не менше 4-х студентів; б) найімовірнішу кількість членів цієї групи, котрі складуть іспит з математики, і обчислити відповідну ймовірність.

2.20. Робітник обслуговує 10 верстатів-автоматів. Ймовірність того, що верстат потребуватиме уваги робітника протягом однієї години, в середньому становить 0,6. Знайти: а) ймовірність того, що за 1 годину уваги робітника потребуватимуть від 4 до 6 верстатів (враховуючи межі); б) найімовірніше число верстатів, які потребуватимуть уваги робітника протягом однієї години, й обчислити ймовірність цього числа.

2.21. Ймовірність появи події в кожному випробуванні дорівнює 0,25. Яка ймовірність того, що під час 300 випробувань успішними будуть: а) точно 75 випробувань; б) не менше 85 випробувань?

2.22. У партії однотипних деталей стандартні становлять 82 %. Навмання з партії беруть 400 деталей. Яка ймовірність того, що серед них стандартних буде від 355 до 360? Знайти найімовірніше число появи стандартних деталей і обчислити відповідну ймовірність.

2.23. Фабрика випускає 75 % виробів 1-го сорту. Із партії готових виробів навмання беруть 400 деталей. Обчислити ймовірності таких випадкових подій: а) виробів 1-го сорту виявиться 290 шт.; б) від 300 до 320 шт.

2.24. В електромережу ввімкнено незалежно одну від одної 500 електролампочок, які освітлюють у вечірній час виробничий цех заводу. Ймовірність того, що електролампочка в електромережі не перегорить, є величиною сталою і дорівнює 0,8: а) яка ймовірність того, що з 500 електролампочок не перегорить від 380 до 400 шт.; б) знайти найімовірніше число електролампочок, які не перегорять, і обчислити відповідну ймовірність.

2.25. Ймовірність виходу з ладу за час t одного приладу дорівнює 0,1. Визначити ймовірність того, що за час t зі ста приладів вийдуть з ладу: а) 11 приладів; б) від 6-ти до 18 приладів.

2.26. Відомо, що три чверті населення міста користується послугами кабельного телебачення. Знайти: а) ймовірність того, що серед 300 мешканців такими послугами користується хоча б 230; б) найімовірніше число мешканців, які користуються послугами кабельного телебачення, та обчислити його ймовірність.

2.27. У середньому 30 % акцій видавничих фірм протягом року стають збитковими: а) яка ймовірність того, що серед 140 акцій цих фірм збитковими будуть менше 40; б) знайти серед 140 акцій найімовірніше число збиткових та обчислити його ймовірність.

2.28. Радіостанція протягом дня транслює 300 музичних програм. Яка ймовірність того, що: а) 230; б) менше ніж 225 з них виконуються англійською мовою, коли відомо, що англомовні програми становлять 80 % репертуару радіостанції?

2.29. Ймовірність того, що покупець, який завітав до взуттєвого магазину, здійснить покупку, дорівнює в середньому 0,1. Яка ймовірність того, що з 900 покупців, які завітали до магазину, здійснять покупку: а) 90 покупців; б) від 100 до 180 покупців?

2.30. Ймовірність виходу з ладу виробу під час його випробування на надійність дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що під час випробувань 300 виробів із ладу вийдуть: а) 30; б) не більш як 20?

2.31. До банку надійшло 5 000 пачок грошових знаків. Ймовірність того, що пачку неправильно укомплектовано, дорівнює 0,0004. Знайти ймовірність того, що серед одержаних пачок буде не більш як одна неправильно укомплектована.

2.32. У середньому з 200 ламп за місяць виходить з ладу 1 лампочка. Всього встановили 400 ламп. Яка ймовірність того, що за місяць вийде з ладу: а) 3 лампочки; б) не менше 3-х лампочок?

2.33. Середній брак під час виробництва продукції на підприємстві становить 0,1 %. Перевіряється партія з 1 000 деталей. Яка ймовірність того, що бракованими буде: а) 1 деталь; б) від 2-х до 4-х деталей?

2.34. Ймовірність влучення в ціль під час кожного пострілу дорівнює 0,001. Знайти ймовірність двох і більше влучень, якщо було зроблено 5 000 пострілів.

2.35. По каналу зв'язку передається 1 000 знаків. Кожен знак може бути викривлений зі ймовірністю 0,004. Знайти ймовірність того, що буде викривлено не більше 3-х знаків.

2.36. Телефонна станція обслуговує 1 000 абонентів. Ймовірність того, що протягом години абонент розмовляє по телефону, дорівнює в середньому 0,002. Яка ймовірність того, що протягом години одночасно розмовлятимуть: а) 5 абонентів; б) не більше як 5 абонентів?

2.37. Ткаля обслуговує 1 000 веретен. Ймовірність обриву нитки на одному веретені протягом однієї хвилини дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини обрив станеться: а) на 7 веретенах; б) від 2 до 7 веретен.

2.38. Ймовірність виявити помилку на сторінці книжки дорівнює 0,001. Яка ймовірність того, що внаслідок перевірки книжки з 1 000 сторінок буде виявлено помилку: а) на 5 сторінках; б) не більш як на 5 сторінках?

2.39. Знайти ймовірність того, що серед 200 виробів виявиться більше трьох бракованих, якщо в середньому браковані вироби становлять 1 %.

2.40. Завод відправив на базу 9 000 якісних виробів. Ймовірність пошкодження кожного виробу під час транспортування на базу становить 0,0001. Знайти ймовірність того, що серед 9 000 виробів під час транспортування буде пошкоджено: а) 3 вироби; б) не більш як 3 виробів.

2.41. Ймовірність появи події в кожному із 625 незалежних випробувань рівна 0,8. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності по абсолютній величині не більш ніж на 0,04.

2.42. Ймовірність появи події в кожному з 900 незалежних випробувань рівна 0,5. Знайти таке додатне число ε, що зі ймовірністю 0,7698 абсолютна величина відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності не перевищить ε.

2.43. Відділ технічного контролю перевіряє 475 деталей на брак. Ймовірність того, що виріб бракований, становить 0,05. Знайти зі ймовірністю 0,9426 межі, в яких буде міститися число m бракованих виробів серед перевірених.

2.44. Гральний кубик підкидують 80 разів. Знайти зі ймовірністю 0,9973 межі, в яких буде міститися число m випадань шести очок на верхній грані кубика.

2.45. Ймовірність появи події в кожному з незалежних випробувань рівна 0,2. Знайти число випробувань n, за якого зі ймовірністю 0,9876 можна стверджувати, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності по абсолютній величині не більш ніж на 0,04.

2.46. Ймовірність появи події в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,5. Знайти число випробувань n, за якого зі ймовірністю 0,7698 можна чекати, що відносна частота появи події відхиляється від ймовірності за абсолютною величиною не більше ніж на 0,02.

2.47. Ймовірність виготовити на заводі виріб найвищої якості дорівнює 0,85. Навмання беруть 700 виробів. Визначити межі, в яких перебуватиме відносна частота появи виробів найвищої якості зі ймовірністю 0,999.

2.48. Ймовірність того, що виготовлена на заводі електролампочка під час вмикання її в електромережу перегорить через певний проміжок часу, є величиною сталою і дорівнює 0,02. Скільки необхідно взяти таких електролампочок, щоб ймовірність відхилення відносної частоти електролампочок, які перегорять, від ймовірності 0,02, взяте по абсолютному значенню, не перевищувала величини 0,001, дорівнювала б 0,999?

2.49. Відділ технічного контролю перевіряє 475 виробів. Ймовірність того, що виріб бракований, дорівнює 0,05. Знайти зі ймовірністю 0,95 межі, між якими міститься кількість бракованих виробів серед перевірених.

2.50. Гральний кубик підкинули 1 000 разів. Знайти зі ймовірністю 0,95 межі, між якими міститься число випадань четвірки.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Коли застосовують формулу Баєса та в чому вона полягає?
2. Які умови виконуються для гіпотез $H_i, i = 1, \ldots n$ з формули повної ймовірності?
3. За якої умови формула Бернуллі застосовується для обчислення ймовірностей?
4. В чому полягає формула Бернуллі?
5. Як обчислюється ймовірність появи події A в серії з n випробувань від k_1 до k_2 разів за умови схеми Бернуллі?
6. Яка ймовірність появи події A в серії з n незалежних випробувань хоча б один раз за умови схеми Бернуллі?
7. В чому полягає нерівність, за допомогою якої визначають найбільш імовірну кількість появи події A в серії з n випробувань за умов схеми Бернуллі?
8. В чому полягає формула Пуассона?
9. Чому дорівнює параметр λ у формулі Пуассона?
10. Як можна обчислити значення функції $P_n(m)$ з формули Пуассона?
11. Яку функцію називають локальною функцією Лапласа?
12. Яку функцію називають інтегральною функцією Лапласа?
13. Як обчислюють значення локальної та інтегральної функцій Лапласа?
14. В чому полягає локальна теорема Муавра–Лапласа? В яких випадках її використовують?
15. В чому полягає інтегральна теорема Муавра–Лапласа? В яких випадках її використовують?
16. Що можна сказати про парність / непарність локальної та інтегральної функцій Лапласа?
17. Які функції програми MS Excel та MATLAB можна використовувати під час розв’язання задач про повторні незалежні випробування?
18. Який зв’язок між теоремою Бернуллі та інтегральною теоремою Муавра–Лапласа?
19. Назвіть критерії застосування формул Бернуллі, Муавра–Лапласа та Пуассона для обчислення ймовірностей подій у випробуваннях, проведених за схемою Бернуллі.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 3
Дискретні та неперервні випадкові величини

Мета: вивчення дискретних і неперервних випадкових величин, основних законів їх розподілу, застосування Microsoft Excel та MATLAB для знаходження законів розподілу випадкових величин.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1. Випадкові величини

Нехай (Ω, S, P) – ймовірнісний простір певного випадкового експерименту (пов'язаного з певним реальним випадковим явищем).

Випадковою величиною (*ВВ*) X, заданою на цьому просторі, називається функція $X = X(\omega)\colon \Omega \longrightarrow R$ $(\omega \in \Omega)$, така, що для будь-якого числа x множина розв'язків нерівності $X(\omega) < x$ є подією з простору S.

Дискретною випадковою величиною (*ДВВ*) називається випадкова величина, яка набуває скінченної або зліченної кількості ізольованих числових значень з певними ймовірностями. Якщо кількість таких значень є скінченною, дискретна випадкова величина називається *скінченною.* Якщо кількість таких значень є нескінченною, але зліченною, дискретна випадкова величина є *нескінченною.*

Неперервна випадкова величина (*НВВ*) може набувати будь-якого значення з деякого скінченного або нескінченного проміжку або декількох проміжків. Множина значень неперервної випадкової величини є незліченною.

2. Дискретні випадкові величини

Нехай X – дискретна випадкова величина (ДВВ), що набуває окремих значень $x_1, x_2, \dots, x_n$. Якщо ймовірності $P(X = x_1) = p_1$, $P(X = x_2) = p_2$,…, $P(X = x_n) = p_n$ відомі, то вважаємо, що ДВВ є заданою.

Співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і ймовірностями, з якими приймають ці значення, називають **законом розподілу ймовірностей ДВВ,** тобто це набір $x_1, x_2, \dots, x_n$ та відповідних ймовірностей $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Для дискретної випадкової величини X закон розподілу може бути заданий таблично (за допомогою *ряду розподілу ВВ*), графічно (за допомогою *багатокутника розподілу ВВ*) або аналітично (за допомогою формули, за якою можна обчислити ймовірності того, що величина набуде того чи іншого значення).

У першому випадку закон розподілу називають *рядом розподілу ймовірностей* випадкової величини X:

X	x_1	x_2	…	x_n	…
P	p_1	p_2	…	p_n	…

У першому рядку таблиці записують усі можливі значення випадкової величини, а в другому – відповідні їм ймовірності. Оскільки події:

$$X = \{x_1\}, \quad X = \{x_2\}, \dots , \quad X = \{x_n\}$$

становлять повну групу несумісних подій, то за теоремою додавання ймовірностей маємо:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1,$$

тобто сума ймовірностей усіх можливих значень випадкової величини дорівнює одиниці (*умова нормування*).

Графічна форма закону розподілу називається *багатокутником розподілу:* по осі абсцис відкладаємо можливі значення x_k випадкової величини X, а по осі ординат – імовірності p_k цих значень; точки (x_k, p_k) послідовно з'єднуємо відрізками прямих.

3. Функція розподілу випадкової величини

Функцією розподілу випадкової величини X називається ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, меншого від певного фіксованого числа x, або ж, інакше кажучи, випадкова величина X потрапляє в інтервал $(-\infty; x)$ і позначається:

$$F_X(x) = P\{X < x\} \text{ або } F_X(x) = P(-\infty < X < x).$$

Задати функцію розподілу означає задати випадкову величину. Такий спосіб задання застосовується як для дискретної, так і для неперервної випадкової величини.

4. Приклади стандартних розподілів дискретних випадкових величин

Серед дискретних випадкових величин особливе місце в теорії ймовірностей займають такі, які набувають лише цілих невід'ємних значень: $X = x_k, k = 0,1,2,3, \dots$ Ці випадкові величини називають *цілочисловими*.

Найважливішими є такі типи дискретних розподілів: рівномірний, біноміальний, показниковий, геометричний, гіпергеометричний.

4.1. Рівномірний розподіл ДВВ

Дискретна випадкова величина має *рівномірний розподіл,* якщо вона набуває n різних значень з однаковими ймовірностями. Множина значень X: $x_1, x_2, \dots, x_n$, відповідні ймовірності:

$$P\{X = x_1\} = P\{X = x_2\} = \dots = P\{X = x_n\} = \frac{1}{n}.$$

Ряд розподілу:

$X = x_k$	x_1	x_2	…	x_n
p_k	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$

4.2. Біноміальний закон розподілу

Дискретна випадкова величина, що має біноміальний розподіл, пов'язана зі схемою Бернуллі. Нехай відбувається серія n незалежних випробувань, в кожному з яких деяка подія A («успіх») відбувається зі ймовірністю p та не відбувається зі ймовірністю $q = 1- p$. Розглянемо випадкову величину X – кількість «успіхів» у схемі Бернуллі. Величина X має *біноміальний розподіл (біноміально розподілена)*. Інакше кажучи, це цілочислова випадкова величина X, яка набуває значень із множини $\{0,1, \dots, n\}$ зі ймовірностями:

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0,1,2, \dots, n, \quad p + q = 1.$$

4.3. Розподіл Пуассона

Цілочислова випадкова величина $X \in (0; +\infty)$ має *закон розподілу Пуассона,* якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою Пуассона:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0,1,2, \dots \ (\lambda = np).$$

Перевіримо умову нормування:

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Розподіл Пуассона часто використовують як апроксимацію біноміального розподілу у разі великих n. Якщо у схемі Бернуллі кількість випробувань n велика ($n > 30$), а ймовірність появи події p у кожному випробуванні дуже мала ($p < 0,1$), і водночас значення $\lambda = np$ залишається невеликим ($\lambda < 10$), то замість формули Бернуллі використовують асимптотичну формулу Пуассона:

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

де параметр $\lambda = np$ – це середня кількість появи події в n випробуваннях.

4.4. Геометричний закон розподілу

Розглянемо незалежні випробування Бернуллі, у кожному з яких подія A («успіх») може відбутися зі ймовірністю p $(0 < p < 1)$ і не відбутися зі ймовірністю $q = 1- p$. Нехай випробування відбуваються до першої появи події A, тобто це означає: якщо подія A з'явиться у k-му випробуванні, то у попередніх $(k- 1)$ випробуваннях її не було. Випадкова величина X – це кількість випробувань, які треба провести до першої появи події A, отже, X: $1, 2, 3, \dots, k, \dots$ Ймовірність можна знайти за формулою множення для незалежних подій:

$$P(X = k) = pq^{k-1}, \quad k = 1,2,3, \dots$$

Такий закон розподілу ДВВ X називають *геометричним*.

4.5. Гіпергеометричний закон розподілу

Цілочислова випадкова величина X має *гіпергеометричний закон розподілу*, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою:

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{s-k}}{C_N^k}, \quad k = 0,1,2, \dots, \min\{M, s\}, \qquad N \geq M.$$

Гіпергеометричний закон розподілу ймовірностей відбувається за таких обставин: нехай у партії з N виробів є M стандартних ($N > M$). З партії вибираються s виробів, причому відібраний виріб перед вибором наступного в партію не повертається. Випадкова величина X – кількість k стандартних деталей серед s відібраних – має гіпергеометричний закон розподілу.

5. Способи задання НВВ. Щільність розподілу

Випадкова величина X називається абсолютно неперервною, якщо існує неперервна або кусково-неперервна (яка на будь-якому скінченому проміжку має тільки скінчену кількість розривів I роду) функція $f_X(x)$, така, що функція розподілу має вигляд:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt.$$

Функція $f_X(x)$ має назву *щільність розподілу* (або *диференціальна функція розподілу*). А функцію розподілу $F_X(x)$ називають ще *інтегральною функцією розподілу*.

У точках неперервності функції $f_X(x)$ маємо: $f_X(x) = F_X'(x)$.

Знаючи щільність розподілу $f_X(x)$, інтегруванням можна знайти функцію розподілу ВВ $F_X(x)$.

Умова нормування НВВ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\, dt = 1.$$

Теорема 3.1. Ймовірність потрапляння неперервної випадкової величини у проміжок із кінцями a та b, незалежно від того, чи є цей проміжок замкненим відрізком, інтервалом або півінтервалом, дорівнює інтегралу від функції щільності в межах від a до b:

$$P\{a \le X \le b\} = P\{a < X < b\} = P\{a < X \le b\} = \int_a^b f_X(x)\,dx.$$

Ймовірність потрапляння випадкової величини у деякий півінтервал може бути подано через функцію розподілу:

$$P\{a \le X < b\} = F_X(b) - F_X(a). \qquad (3.1)$$

6. Приклади деяких стандартних розподілів НВВ

6.1. Рівномірний розподіл НВВ

Функція щільності рівномірно розподіленої випадкової величини має вигляд:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b]. \end{cases}$$

Функція розподілу ймовірностей має вигляд:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in (a,b], \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

6.2. Показниковий розподіл

Неперервна випадкова величина X є *показниково розподіленою*, якщо її щільність розподілу задана у вигляді:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \end{cases}$$

де λ – параметр розподілу.

Функція розподілу:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

6.3. Нормальний розподіл

Випадкова величина X називається *нормально розподіленою* з параметрами a, σ $(\sigma > 0)$, якщо її щільність розподілу задається формулою:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in R.$$

Для нормально розподіленої випадкової величини X із параметрами a, σ використовують позначення $X \sim N(a,\sigma)$. Зокрема, якщо $a = 0, \sigma = 1$, то $X^0 \sim N(0,1)$, такий розподіл називають стандартним. Щільність розподілу стандартної нормально розподіленої ВВ:

$$f_{X^0}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-a)^2}{2}} = \varphi(x)$$

є функцією Гаусса. Для функції Гаусса складено таблиці.

Функція розподілу:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{\frac{-(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Ймовірність того, що ВВ $X \sim N(a,\sigma)$ потрапляє в інтервал $[\alpha,\beta)$:

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right). \qquad (3.2)$$

Ймовірність того, що випадкова величина X відхиляється від положення a не більше, ніж на ε:

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 3.1. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

$X = x_i$	–4	1	2	5	9
$P\{X = x_i\} = p_i$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Побудувати багатокутник розподілу, функцію розподілу $F_X(x)$ та її графік.

Розв'язання. Багатокутник розподілу побудуємо за допомогою MATLAB:

```
x=[-4 1 2 5 9]; % x(i)
p=[0.1 0.2 0.4 0.2 0.1]; % p(i)
p=p/sum(p); % нормування
plot(x,p,'k-',x,p,'k.') % багатокутник розподілу
ylim([0 0.5])
set(get(gcf,'CurrentAxes'),...
  'FontName','Times New Roman Cyr','FontSize',10) % налаштування шрифту
title('\bfБагатокутник розподілу') % заголовок
xlabel('\itx_k') % мітка по осі OX
ylabel('\itp_k') % мітка по осі OY
```

Результат наведений на рис. 3.1.

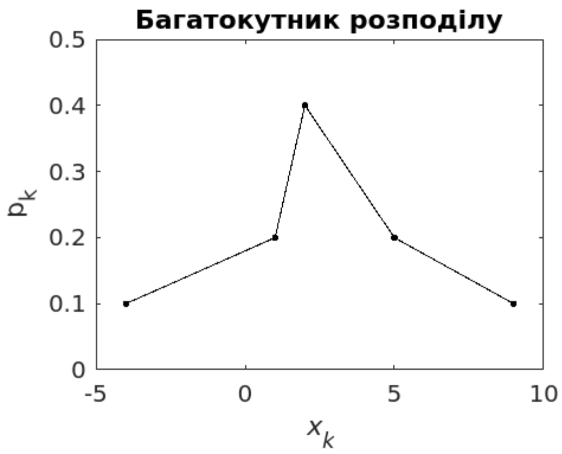


Рисунок 3.1. Багатокутник розподілу, побудований за допомогою MATLAB

Ймовірнісний багатокутник (багатокутник розподілу) побудований в MS Excel, зображено на рис. 3.2. Для побудови діаграми використано команду Вставлення ⟹ Діаграми ⟹ Точкова з відповідними параметрами.

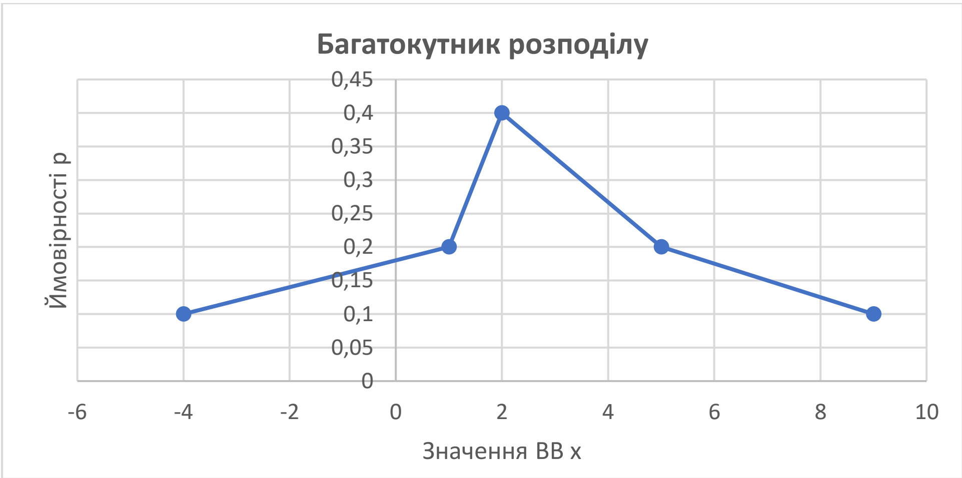


Рисунок 3.2. Багатокутник розподілу, побудований за допомогою MS Excel

За властивостями інтегральної функції маємо:

1) $F_X(-4) = P\{X < -4\} = 0;$

2) $F_X(1) = P\{X < 1\} = 0{,}1;$

3) $F_X(2) = P\{X < 2\} = P\{X = -4\} + P\{X = 1\} = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3;$

4) $F_X(5) = P\{X < 5\} = P\{X = -4\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = 0{,}1 + 0{,}2 +$ $+0{,}4 = 0{,}7;$

5) $F_X(9) = P\{X < 9\} = F_X(5) + P\{X = 9\} = 0{,}7 + 0{,}2 = 0{,}9;$

6) $F_X(x)|_{x>9} = P\{x > 9\} = 1.$

Отже, функція розподілу заданої дискретної ВВ має вигляд:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -4; \\ 0{,}1, & -4 < x \leq 1; \\ 0{,}3, & 1 < x \leq 2; \\ 0{,}7, & 2 < x \leq 5; \\ 0{,}9, & 5 < x \leq 9; \\ 1, & x > 9. \end{cases}$$

Лістинг для знаходження функції розподілу в MATLAB:

```
x_val = [-4, 1, 2, 5, 9]; % задаємо вектор значень ВВ
x_prob = [0.1, 0.2, 0.4, 0.2, 0.1]; % задаємо вектор ймовірностей ВВ
F_distr = cumsum(x_prob); % визначаємо функцію розподілу ймовірностей
disp('Функція розподілу ймовірносте F_distr(x):'); % виведення таблиці функції
розподілу
fprintf('X=x_i\t\tF_distr(x)\n');
for i = 1:length(x_val)
    fprintf('%d\t\t%.4f\n', x_val(i), F_distr(i));
end
```

Отриманий результат:

```
Функція розподілу ймовірностей F_distr(x)
X=x_i     F_distr(x)
-4        0.1000
1         0.3000
2         0.7000
5         0.9000
9         1.0000
```

Графік функції розподілу:

```
% побудова графіка функції розподілу
figure;
stairs(x_val, F_distr,'r', 'LineWidth', 2);
xlim([x_val(1) x_val(end)]); ylim([0 1]);
title('\bfГрафік функції розподілу\rm \itF(X)');
xlabel('\itX'); ylabel('\itF(X)');
grid on;
```

Результат побудови зображений на рис. 3.3.

Рисунок 3.3. Графік функції розподілу $F_X(x)$

Приклад 3.2. По мішені проводиться чотири незалежні постріли. Ймовірність влучення під час одного пострілу дорівнює 0,25. Скласти ряд розподілу випадкової величини X – кількості влучень у мішень. Визначити функцію розподілу $F_X(x)$.

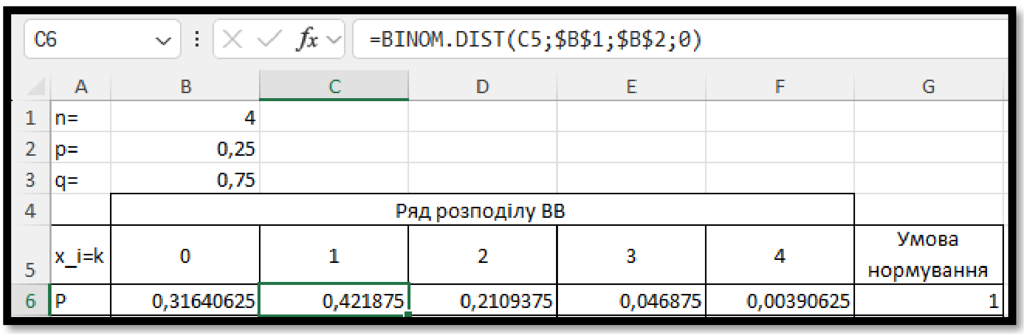
Розв'язання. Випадкова величина X – кількість попадань у мішень – може набувати значення 0, 1, 2, 3, 4. Оскільки розглядувані випробування задовольняють схему Бернуллі, то X має біноміальний закон розподілу:

$$n = 4, \quad p = 0{,}25, \quad q = 1 - p = 0{,}75.$$

Запишемо ряд розподілу випадкової величини X. Для цього використаємо функцію BINOM.DIST (категорія Статистичні) пакету MS Excel. Пояснення щодо її використання було наведено в лабораторній роботі 2. Пояснення аргументів функції для нашої задачі:

- Кількість успіхів – k, змінна величина, яка набуває значення: 0, 1, 2, 3, 4;
- Кількість випробувань – 4 незалежних випробувань;
- Імовірність успіху – 0,25, ймовірність успіху кожного випробування;
- Функція – 0 – для знаходження ймовірності події $P\{X = k\}$.

Відповідні ймовірності, знайдені за допомогою цієї функції BINOM.DIST, наведено в рис. 3.4.



C6 =BINOM.DIST(C5;B1;B2;0)

	A	B	C	D	E	F	G
1	n=	4					
2	p=	0,25					
3	q=	0,75					
4		Ряд розподілу ВВ					
5	x_i=k	0	1	2	3	4	Умова нормування
6	P	0,31640625	0,421875	0,2109375	0,046875	0,00390625	1

Рисунок 3.4. Ряд розподілу, побудований за допомогою BINOM.DIST

Щоб отримати функцію розподілу $F_X(x)$, використаємо функцію BINOM.DIST (рис. 3.5) з тими ж параметрами, окрім Функція – зазначається 1 для знаходження функції розподілу $F_X(x)$ (повертає значення $P(X \le x)$).

	A	B	C	D
1	n=	4		
2	p=	0,25		
3				
4			**F(x)=P(X<x)**	
5		x<=0	0	0
6	0	<x<=1	=BINOM.DIST(A6;B1;B2;1)	0,31640625
7	1	<x<=2	=BINOM.DIST(A7;B1;B2;1)	0,73828125
8	2	<x<=3	=BINOM.DIST(A8;B1;B2;1)	0,94921875
9	3	<x<=4	=BINOM.DIST(A9;B1;B2;1)	0,99609375
10	4	<x<=5	=BINOM.DIST(A10;B1;B2;1)	1

Рисунок 3.5. Функція BINOM.DIST для знаходження функції розподілу

Отже, використовуючи отримані дані, запишемо функцію розподілу $F_X(x)$:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 0{,}3164, & 0 < x \le 1; \\ 0{,}7383, & 1 < x \le 2; \\ 0{,}9492, & 2 < x \le 3; \\ 0{,}9961, & 3 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Зауваження 3.1. Для побудови функції розподілу внаслідок випробування, які задовольняють *схему Бернуллі*, можна скористатися функцією binopdf (k, n, p) у MATLAB (див. лабораторну роботу № 2), де k – кількість успіхів, n – кількість випробувань, p – ймовірність успіху.

Зауваження 3.2. Якщо дискретна випадкова величина має *розподіл Пуассона,* то щоб записати ряд розподілу, скористаємось функцією MS Excel POISSON.DIST (x; середнє; сукупне), параметри якої означають:

x – змінна величина, яка набуває значення: $k = 0,1,2, \dots n$;

середнє – середнє значення $\lambda = np$;

сукупне: 0 – для знаходження ймовірності випадкової події $X = k$,

1 – для знаходження функції розподілу.

Для організації обчислень у MATLAB можна скористатися функцією poisspdf.

Зауваження 3.3. Якщо дискретна випадкова величина має *гіпергеометричний розподіл,* то для того, щоб записати ряд розподілу, скористаємося функцією MS Excel HYPGEOM.DIST (Кількість успіхів у вибірці; Розмір вибірки; Кількість успіхів у сукупності; Розмір сукупності; Сукупне), параметри якого означають:

Кількість успіхів у вибірці – $k = 0,1,2, \ldots, \min\{M, s\}$;

Розмір вибірки – s, кількість навмання взятих виробів;

Кількість успіхів у сукупності – M, кількість виробів, які відповідають стандарту;

Розмір сукупності – N, загальна кількість виробів;

Сукупне: 0 – для знаходження ймовірності випадкової події $X = k$,

1 – для знаходження функції розподілу.

Для організації обчислень у MATLAB можна скористатися функцією hygepdf. Наприклад,

```
% В урні 50 білих куль і 30 чорних. Навмання вибирають 20. Яка ймовірність того,
% що серед них буде 6 чорних?
% гіпергеометричний розподіл з параметрами M=30; N=50+30=80; s=20
P=hygepdf(6,80,30,20) % обчислюємо ймовірність P(X=6)

P =
   0.15751612647040

%На склад надійшла партія із 5000 виробів, серед яких 200 бракованих.
%Контролер навмання виймає для перевірки 100 виробів.
% Знайти ймовірність того, що серед них не більше 5 бракованих.
% гіпергеометричний розподіл з параметрами M=200; N=5000; s=100
P=sum(hygepdf([0:5],5000,200,100)) % обчислюємо ймовірність P(X=0)+P(X=1)+…+P(X=5)

P =
   0.79004589090097
```

Приклад 3.3. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ \frac{1}{2}(x^2 - x), & 1 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

1. Побудувати графік розподілу $F_X(x)$.

2. Знайти функцію щільності $f_X(x)$.

3. Побудувати графік щільності $f_X(x)$.

4. Знайти ймовірність попадання випадкової величини X у заданий проміжок $P(0{,}5 < X < 1{,}5)$.

Розв'язання

1. Графік функції розподілу отриманий за допомогою MS Excel (рис. 3.6).

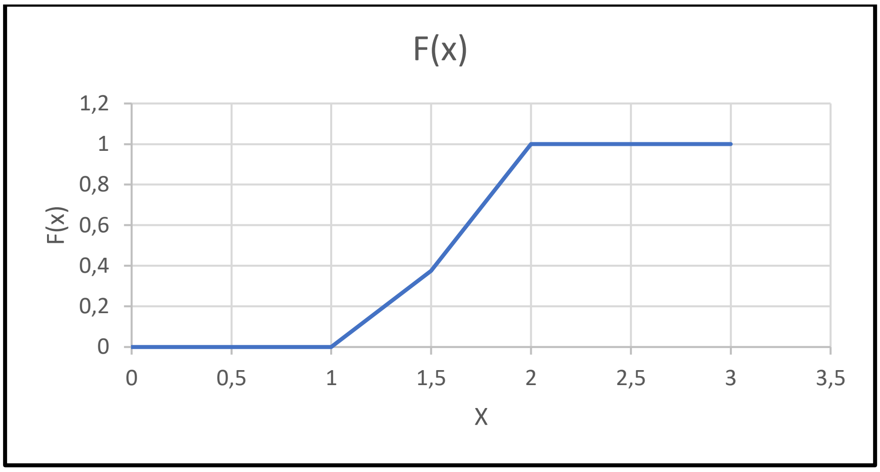


Рисунок 3.6. Графік функції розподілу

2. Функція щільності – похідна від функції розподілу. Тому:

$$f_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ \dfrac{1}{2}(2x - 1), & 1 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

3. Графік щільності розподілу отриманий за допомогою MS Excel (рис. 3.7).

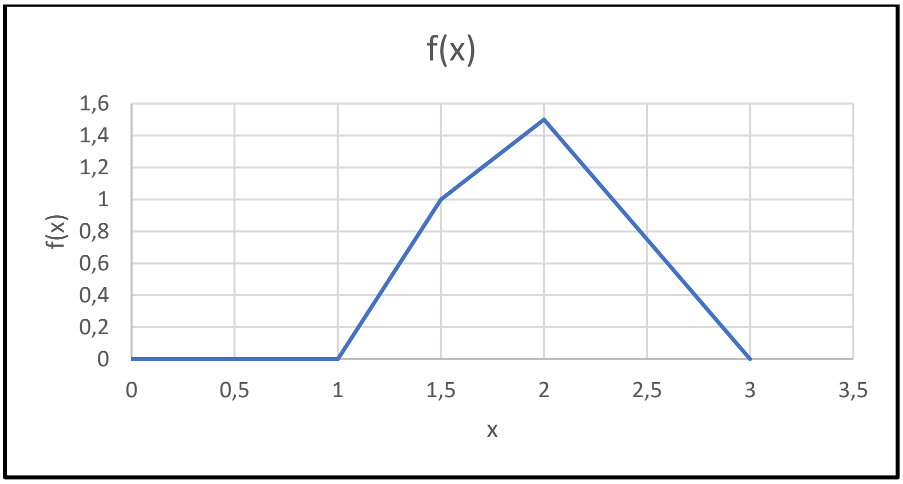


Рисунок 3.7. Графік функції щільності

Побудова графіків здійснена відповідно до значень функції у відповідних точках (рис. 3.8).

	A	B	C	D	E	F
1	x	0	1	1,5	2	3
2	F(x)	0	0	0,375	1	1
3	f(x)	0	0	1	1,5	0

Рисунок 3.8. Дані для побудови графіків функцій розподілу і щільності

4. Ймовірність потрапляння в інтервал $(0{,}5;\,1{,}5)$ знайдемо, користуючись функцією розподілу, а саме формулою (3.1):

$$P(0{,}5 < X < 1{,}5) = F_X(1{,}5) - F_X(0{,}5) = \frac{1}{2}(2{,}25 - 1{,}5) - 0 = 0{,}375.$$

Приклад 3.4. Диференціальна функція розподілу випадкової величини X має вигляд:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le \dfrac{\pi}{3}; \\ \dfrac{2}{3}\sin x, & \dfrac{\pi}{3} < x \le \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти $F_X(x)$ та обчислити $P\left(\frac{\pi}{3} < X < \pi\right)$.

Розв'язання. Знайдемо $F_X(x)$:

1) якщо $x \le \frac{\pi}{3}$, тоді:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$$

2) якщо $\frac{\pi}{3} < x \le \pi$, тоді:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{3}} 0dt + \int_{\frac{\pi}{3}}^{x} \frac{2}{3}\sin t\,dt = 0 + \frac{2}{3}(-\cos t)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{x} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \cos x\right).$$

3) якщо $x > \pi$, тоді:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\frac{\pi}{3}} 0dt + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{2}{3}\sin t\,dt + \int_{\pi}^{x} 0dt = 0 + \frac{2}{3}(-\cos t)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} + 0 =$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\cos\pi + \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Отже, функція розподілу ймовірностей має вигляд:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le \dfrac{\pi}{3}; \\ \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2} - \cos x\right), & \dfrac{\pi}{3} < x \le \pi; \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

Ймовірність події $P\left(\frac{\pi}{3} < X < \pi\right)$ можна обчислити за формулою (3.1):

$$P\left(\frac{\pi}{3} < X < \pi\right) = F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \cos\pi\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \cos\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Приклад 3.5. Нормально розподілена випадкова величина X має параметри $a = 30$ та $\sigma = 10$. Знайти:

а) вигляд диференціальної функції розподілу $f_X(x)$, побудувати її графік та графік інтегральної функції розподілу $F_X(x)$;

б) ймовірність того, що внаслідок випробування випадкова величина X набуде значення з інтервалу $(10; 50)$.

Розв'язання:

а) за умовою задачі $a = 30$ та $\sigma = 10$, тому функція щільності розподілу буде мати вигляд:

$$f_X(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-30)^2}{2\cdot 10^2}} = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-30)^2}{200}}.$$

Для побудови графіка функції $f_X(x)$ знайдемо значення $f_X(x)$ у точках $x = 5,10, \dots, 50$, використовуючи функцію пакету MS Excel NORM.DIST (x; Середнє; Стандартне відхилення; Сукупне),

де x – значення, для якого будується розподіл;

Середнє – значення параметра a;

Стандартне відхилення – значення параметра σ;

Сукупне – логічне значення 0 або 1. Якщо значення 0, то отримаємо значення диференціальної функції розподілу $f_X(x)$ в точці x; якщо значення 1, то функція повертає значення інтегральної функції розподілу $F_X(x)$ в точці x.

Для побудови графіка функції $F_X(x)$ знайдемо значення $F_X(x)$ у точках $x = 5,10, \dots, 50$, використовуючи функцією NORM.DIST (x; 30; 10; 1). Значення диференціальної та інтегральної функцій розподілу у зазначених точках та отримані графіки наведені на рис. 3.9.

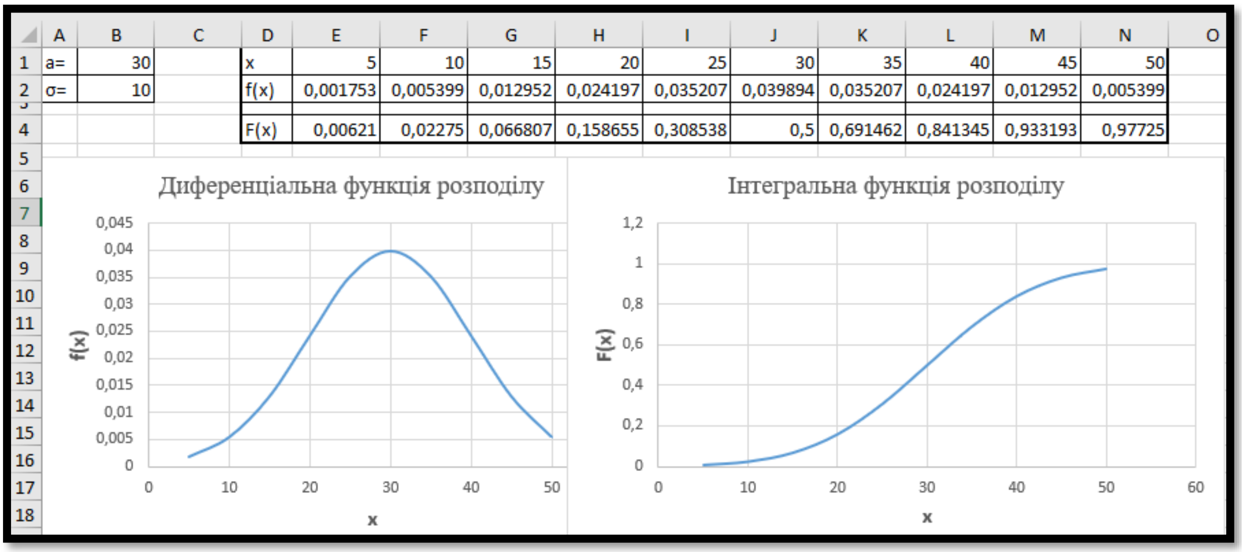


Рисунок 3.9. Результат побудови диференціальної
та інтегральної функцій нормального розподілу в MS Excel

Графіки диференціальної та інтегральної функцій в MATLAB можна виконати за допомогою команди plot:

```
% Параметри розподілу
a = 30;
sigma = 10;
% Загальний нормуючий коефіцієнт для нормального розподілу
normalizing_factor = 1 / (sigma * sqrt(2 * pi));
% Функція щільності нормального розподілу
f_X = @(x) normalizing_factor * exp(-((x - a) / sigma).^2 / 2);
% Інтегральна функція розподілу через функцію стандартного нормального розподілу
F_X = @(x) 0.5 * (1 + erf((x - a) / (sqrt(2) * sigma)));
% Графік функції щільності
x_values = linspace(a - 4*sigma, a + 4*sigma, 1000);
fx_values = f_X(x_values);
figure;
plot(x_values, fx_values, 'LineWidth', 2);
title('Диференціальна функція розподілу f(x)');
xlabel('x');
ylabel('f(x)');
grid on;

% Графік інтегральної функції розподілу
Fx_values = F_X(x_values);
figure;
plot(x_values, Fx_values, 'LineWidth', 2);
title('Інтегральна функція розподілу F(x)');
xlabel('x');
ylabel('F(x)');
grid on;
```

Результат побудови зображений на рис. 3.10.

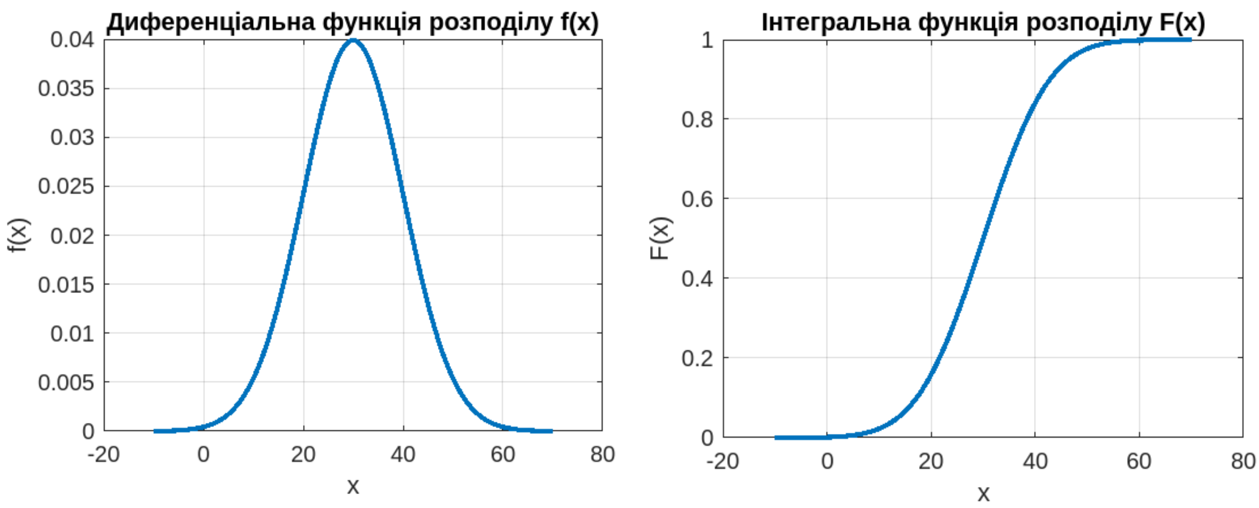


Рисунок 3.10. Результат побудови диференціальної та інтегральної функцій нормального розподілу в MATLAB

б) щоб знайти $P(10 < X < 50)$, використаємо формулу (3.2):

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = 2\Phi(2) = 0{,}9544,$$

де $\Phi(2)$ знаходимо за таблицею значень функції Лапласа, або це саме значення можна отримати за формулою (3.1):

$$P(10 < X < 50) = F_X(50) - F_X(10).$$

У MS Excel можна обчислити так:

NORM.DIST (50;30;10;1)–NORM.DIST (10;30;10;1).

ЗАВДАННЯ ТА ВАРІАНТИ ДЛЯ ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Варіанти для виконання

Робота містить 5 завдань. Варіант для виконання роботи обирається з кожного завдання відповідно до номера за списком у підгрупі: номер варіанта збігається з номером за списком від 1 до 10, з 11-го номера – з останньою цифрою.

Завдання для виконання

3.1. Побудувати закон розподілу дискретної випадкової величини X, зобразити багатокутник розподілу, знайти функцію розподілу ймовірностей $F_X(x)$:

1) Чотири прилади потрібно перевірити на надійність. Ймовірність того, що прилад витримає перевірку на надійність, для кожного дорівнює 0,8. Дискретна випадкова величини X – кількість приладів, які пройшли випробування.

2) Двічі кидають монету. Нехай дискретна випадкова величина X – кількість випадань герба.

3) Під час роботи певного пристрою час від часу виникають збої, які можна вважати випадковими подіями, розподіленими за законом Пуассона. Середнє число збоїв за добу роботи машини дорівнює 1,5. Дискретна випадкова величини X – кількість збоїв роботи пристрою за добу.

4) Стріляють у ціль до першого влучення. Влучення під час різних пострілів – незалежні події, ймовірність влучення під час кожного пострілу $p = 0{,}85$. Нехай випадкова величина X – кількість зроблених пострілів.

5) Радіотелефонна станція отримує цифровий текст. Внаслідок атмосферних завад ймовірність спотворення цифри в середньому дорівнює 0,001. Було отримано текст, що налічує 2 000 цифр. Дискретна випадкова величина X – кількість спотворених цифр в отриманому тексті.

6) Дискретна випадкова величини X – кількість появ події в 8-ми незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність появи події рівна 0,7.

7) Телефонна станція обслуговує 1 000 абонентів. Ймовірність того, що протягом години абонент розмовлятиме по телефону, дорівнює в середньому 0,002. Дискретна випадкова величини X – кількість абонентів, що розмовляють протягом години.

8) Ймовірність влучення в мішень дорівнює 0,5. Стрілець, маючи в запасі 6 патронів, робить постріли по мішені до першого попадання або до використання усіх патронів. Дискретна випадкова величини X – кількість використаних набоїв.

9) Серед 12 однотипних телевізорів 8 відповідають вимогам стандарту, а решта – ні. Дискретна випадкова величини X – кількість телевізорів, що відповідають вимогам стандарту серед s навмання взятих, якщо $s = 4$.

10) Монету підкидають доти, поки випаде герб. Нехай випадкова величина X – кількість зроблених підкидань.

3.2. Знайти закон розподілу випадкової величини X:

1) Дискретна випадкова величини X – сума числа очок, які можуть з’явитися під час кидання грального кубика та монети, якщо вважати, що випадання орла дає 0 очок, а решки – 1 очко.

2) Пристрій складається з чотирьох приладів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірності відмови приладів $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}4$, $p_3 = 0{,}5$, $p_4 = 0{,}6$. Дискретна випадкова величини X – кількість приладів, які відмовили.

3) Підприємство використовує чотири види сировини. Ймовірність зриву поставок кожної з них дорівнює відповідно 0,1; 0,05; 0,01; 0,08. Дискретна випадкова величини X – кількість видів сировини, поставку яких буде зірвано.

4) Маршрут руху вантажівки пролягає через чотири перехрестя, які регулюються світлофорами, що зі ймовірностями відповідно 0,8, 0,5, 0,6, 0,4 дозволяють

рух без зупинки. Дискретна випадкова величини X – кількість зупинок машини на перехрестях по цьому маршруту, якщо світлофори працюють незалежно один від одного.

5) Ймовірності зростання вартості кожного з чотирьох видів сировини за прогнозний період становлять відповідно 0,2, 0,8, 0,1, 0,5. Дискретна випадкова величини X – кількість видів сировини, для яких відбудеться зростання ціни за цей період.

6) Під час виготовлення деталі робітникові необхідно виконати чотири незалежні між собою технологічні операції. Ймовірність того, що під час виконання першої операції робітник не допустить дефекту, дорівнює 0,95; для другої, третьої і четвертої операцій ця ймовірність становить відповідно 0,9; 0,85; 0,8. Дискретна випадкова величини X – кількість операцій, під час виконання яких робітник не допустить браку.

7) За даними відділу маркетингу підприємства зі ймовірностями 0,8, 0,6, 0,2 прогнозується підвищення попиту на кожний із трьох видів продукції. Дискретна випадкова величини X – кількість видів продукції, для яких прогнозується підвищення попиту.

8) В цеху можуть одночасно працювати три однотипні верстати, які вмикаються незалежно. Ймовірність того, що в даний момент працює перший, другий чи третій верстат, дорівнює 0,2; 0,5; 0,3 відповідно. Дискретна випадкова величини X – кількість одночасно працюючих верстатів.

9) У першому ящику міститься 7 стандартних і 3 браковані деталі, у другому – 6 стандартних і 4 браковані. Навмання з першого ящика беруть дві деталі, а з другого – одну. Дискретна випадкова величини X – кількість появ стандартних деталей серед трьох навмання взятих.

10) Троє складають іспит із теорії ймовірностей. Ймовірність того, що перший студент складе екзамен, становить 0,9, для другого та третього студентів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,85; 0,8. Дискретна випадкова величини X – кількість студентів, які складуть іспит з теорії ймовірностей.

3.3. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу $F_X(x)$.

а) Побудувати графік розподілу $F_X(x)$.

б) Знайти функцію щільності $f_X(x)$.

в) Побудувати графік щільності $f_X(x)$.

г) Знайти ймовірність попадання випадкової величини X у заданий проміжок $P(a < X < b)$.

1) $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -4; \\ \frac{(x+4)^2}{16}, & -4 < x \leq 0; \\ 1, & x > 0; \end{cases}$ $\quad a = -2, \; b = 5.$

2) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{\sqrt{2x}}{4}, & 0<x\le 8;\\ 1, & x>8;\end{cases}$ $\quad a=1,\ \ b=6.$

3) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le -\frac{\pi}{2};\\ \frac{1+\sin x}{2}, & -\frac{\pi}{2}<x\le \frac{\pi}{2};\\ 1, & x>\frac{\pi}{2};\end{cases}$ $\quad a=0,\ \ b=\frac{\pi}{4}.$

4) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \frac{x+2}{7}, & -2<x\le 5;\\ 1, & x>5;\end{cases}$ $\quad a=0,\ \ b=3.$

5) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ \frac{x-2}{3}, & 2<x\le 5;\\ 1, & x>5;\end{cases}$ $\quad a=0,\ \ b=3.$

6) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{x}{2}, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2;\end{cases}$ $\quad a=1,\ \ b=2.$

7) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \frac{(x+4)^3}{64}, & -1<x\le 3;\\ 1, & x>3;\end{cases}$ $\quad a=0,\ \ b=2.$

8) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ \frac{x-2}{3}, & 2<x\le 5;\\ 1, & x>5;\end{cases}$ $\quad a=2,\ \ b=4.$

9) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-\cos x, & 0<x\le \frac{\pi}{2};\\ 1, & x>\frac{\pi}{2};\end{cases}$ $\quad a=\frac{\pi}{4},\ \ b=\frac{\pi}{2}.$

10) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{\sqrt{2x}}{4}, & 0<x\le 8;\\ 1, & x>8;\end{cases}$ $\quad a=2,\ \ b=7.$

3.4. Задана диференціальна функція розподілу $f_X(x)$ випадкової величини X. Записати $F_X(x)$ та знайти $P(a<X<b)$, якщо:

1) $f_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{2x}{9}, & 0<x\le 3;\\ 0, & x>3;\end{cases}$ $\quad a=0,\ \ b=2.$

2) $f_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 2\cos x, & 0<x\le \frac{\pi}{6};\\ 0, & x>3;\end{cases}$ $\quad a=\frac{\pi}{12},\ \ b=\frac{\pi}{6}.$

3) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{\sin x}{2}, & 0 < x \le \pi; \\ 0, & x > \pi; \end{cases}$ $\quad a = \frac{\pi}{6},\ b = \frac{\pi}{3}.$

4) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{\pi}(1 + \cos 2x), & -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ $\quad a = -\frac{\pi}{6},\ b = \frac{\pi}{2}.$

5) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le \frac{\pi}{6}; \\ 3\sin 3x, & \frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{3}; \\ 0, & x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$ $\quad a = \frac{\pi}{6},\ b = \frac{\pi}{4}.$

6) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 3x^2, & 0 < x \le 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$ $\quad a = 0{,}5,\ b = 1.$

7) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ 2(x-2), & 2 < x \le 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$ $\quad a = 2{,}2,\ b = 3.$

8) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ x - \frac{1}{2}, & 1 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$ $\quad a = \frac{1}{2},\ b = \frac{3}{2}.$

9) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \sin x, & 0 < x \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ $\quad a = \frac{\pi}{12},\ b = \frac{\pi}{6}.$

10) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{2}(2x-1), & 0 < x \le 2; \\ 0, & x > 2; \end{cases}$ $\quad a = \frac{2}{5},\ b = \frac{3}{2}.$

3.5. Нормально розподілена випадкова величина X має розподіл $N(a, \sigma)$. Знайти:

а) вигляд диференціальної функції розподілу $f_X(x)$, побудувати її графік та графік інтегральної функції розподілу $F_X(x)$;

б) ймовірність того, що внаслідок випробування випадкова величина X набуде значення з інтервалу (b, c).

1) $a = 10,\ \sigma = 4,\ b = 2,\ c = 14.$

2) $a = 20,\ \sigma = 5,\ b = 15,\ c = 25.$

3) $a = 1,\ \sigma = 1,\ b = 2,\ c = 3.$

4) $a = 3,\ \sigma = 5,\ b = 0{,}5,\ c = 3{,}5.$

5) $a = 2,\ \sigma = 3,\ b = 1{,}5,\ c = 3{,}2.$

6) $a = 5, \sigma = 2, b = 0{,}5, c = 7.$
7) $a = 12, \sigma = 4, b = 5, c = 10.$
8) $a = 11, \sigma = 2, b = 3, c = 12.$
9) $a = 4, \sigma = 6, b = 4, c = 6{,}5.$
10) $a = 3, \sigma = 4, b = 0{,}5, c = 9.$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Що називається випадковою величиною? Наведіть приклади дискретних та неперервних випадкових величин.
2. Що називають законом розподілу випадкової величини? Що таке ряд розподілу ДВВ?
3. Що називають функцією розподілу?
4. Які властивості має функція розподілу.
5. Як за допомогою функції розподілу задати ймовірність потрапляння випадкової величини у півінтервал?
6. Що таке рівномірний розподіл ДВВ?
7. Яка випадкова величина має біноміальний розподіл?
8. Яка випадкова величина розподілена за законом Пуассона?
9. Геометричний закон розподілу дискретної випадкової величини.
10. Дати означення гіпергеометричного закону розподілу дискретної випадкової величини.
11. Яка випадкова величина називається неперервною?
12. Як визначають інтегральну функцію розподілу неперервної випадкової величини?
13. Як визначають диференціальну функцію розподілу (щільність ймовірностей) неперервної випадкової величини?
14. Якою є умова нормування дискретної та неперервної випадкової величини?
15. Які формули виражають зв'язок між інтегральною та диференціальною функціями розподілу неперервної випадкової величини?
16. Який вигляд має функція щільності і функція розподілу ймовірностей для рівномірного розподілу неперервної випадкової величини?
17. Який вигляд має функція щільності і функція розподілу ймовірностей для показниково розподіленої неперервної випадкової величини?
18. Який вигляд має функція щільності і функція розподілу ймовірностей нормального розподілу неперервної випадкової величини?
19. За якими формулами обчислюється ймовірність того, що неперервна випадкова величина набуде будь-якого значення з проміжку (a, b)?

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 4
Числові характеристики випадкових величин

Мета: сформування навичок обчислення числових характеристик дискретних і неперервних випадкових величин (математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення), використання пакетів Microsoft Excel та MATLAB для знаходження числових характеристик випадкових величин.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1. Математичне сподівання випадкової величини

1.1. Математичне сподівання дискретної випадкової величини

Нехай задано дискретну випадкову величину X, що набуває значень $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ зі ймовірностями $P\{X = x_k\} = p_k$, $k = 1, \dots, n, \dots$

Математичним сподіванням (або *середнім*) X ДВВ називається число, яке дорівнює сумі добутків всіх її можливих значень на відповідні ймовірності. Позначається одним із символів: $M(X)$, M_X, m_X.

Якщо множина значень ДВВ є зліченною, то математичне сподівання:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad \text{за умови, що такий ряд є абсолютно збіжним.}$$

Якщо множина можливих значень ДВВ є скінченною, то:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k. \tag{4.1}$$

1.2.Математичне сподівання неперервної випадкової величини

Математичне сподівання неперервної випадкової величини X (НВВ), яка задана функцією щільності $f_X(x)$, знаходять за формулою:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx \quad \text{за умови абсолютної збіжності невл. інтеграла.}$$

Зокрема, якщо X набуває можливих значень тільки з відрізка $[a, b]$, то:

$$M(X) = \int_{a}^{b} x \cdot f_X(x) dx. \tag{4.2}$$

Математичне сподівання є середнім значенням випадкової величини.

2. Дисперсія випадкової величини

2.1.Означення дисперсії випадкової величини

Дисперсією дискретної випадкової величини X називається число, яке дорівнює математичному сподіванню квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання і позначається $D(X)$ або D_X:

$$D(X) = D_X = M\{(X - M_X)^2\}.$$

Дисперсія характеризує «розсіювання» випадкової величини відносно її математичного сподівання. Чим менша дисперсія, тим тісніше значення випадкової величини групуються відносно її середнього значення, вираженого математичним сподіванням.

Наведемо ще одну формулу для обчислення $D(X)$.

Твердження 4.1. Дисперсія ВВ дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини X та квадратом її математичного сподівання:

$$D(X) = D_X = M(X^2) - (M_X)^2. \quad (4.3)$$

2.2. Знаходження дисперсії дискретної випадкової величини

Якщо множина значень ДВВ є зліченною, то дисперсію можна знайти за формулами:

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - M_X)^2 p_k.$$

Або:

$$D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^2 p_k) - (M_X)^2 \quad \text{(за умови збіжності рядів).}$$

У випадку скінченної дискретної випадкової величини її дисперсію можна знайти за однією з формул:

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M_X)^2 p_k.$$

Або:

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 p_k) - (M_X)^2. \quad (4.4)$$

2.3. Знаходження дисперсії неперервної випадкової величини

Якщо НВВ X задана функцією щільності $f_X(x)$, то:

$$D(X) = D_X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M_X)^2 \cdot f_X(x)dx \quad \text{(за умови абсол. збіжності інтеграла).}$$

Якщо НВВ X, яка задана функцією щільності $f_X(x)$, набуває можливих значень з відрізка $[a, b]$, то $D(X)$ знаходять за формулою:

$$D(X) = D_X = \int_a^b (x - M_X)^2 \cdot f_X(x)dx. \quad (4.5)$$

Дисперсію неперервної випадкової величини також можна знаходити за формулою:

$$D(X) = D_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_X(x)dx - (M_X)^2.$$

3. Середнє квадратичне відхилення

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини називається число σ_X, що визначається рівністю:

$$\sigma_X = \sigma(X) = \sqrt{D_X}. \quad (4.6)$$

4. Числові характеристики найпоширеніших ймовірнісних розподілів

Якщо відомо закон розподілу випадкової величини, то для обчислення числових характеристик можна скористатися спрощеними формулами, які наведені у таблиці 4.1.

Таблиця 4.1 – Числові характеристики випадкових величин з відомим законом розподілу

№ з/п	**Назва розподілу**	$\boldsymbol{M(X)}$	$\boldsymbol{D(X)}$	$\boldsymbol{\sigma(X)}$
	ДИСКРЕТНІ РОЗПОДІЛИ			
1	Рівномірний з параметром n ($x_i = 1, 2, \dots, n$)	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$
2	Біноміальний з параметрами n і p	np	$np(1-p)$	$\sqrt{np(1-p)}$
3	Показниковий з параметром λ	λ	λ	$\sqrt{\lambda}$
4	Геометричний з параметром p	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{\sqrt{1-p}}{p}$
	НЕПЕРЕРВНІ РОЗПОДІЛИ			
5	Рівномірний з параметрами a і b	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$
6	Нормальний з параметрами a, σ	a	σ^2	σ
7	Показниковий з параметром λ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{1}{\lambda}$

5. Інші числові характеристики випадкових величин

Модою Mo випадкової величини X називають її найбільш ймовірне значення (для якого ймовірність p_i або щільність ймовірності $f_X(x)$ досягає максимуму), тобто:

$$Mo = x_0 \rightarrow \begin{cases} f_X(x_0) = \max f_X(x) \text{ – для НВВ;} \\ P\{X = x_0\} = \max \text{ – для ДВВ.} \end{cases}$$

Для нормального розподілу $N(a, \sigma)$ мода $Mo = a$.

Медіана неперервного розподілу Me – це таке значення аргументу x^*, що ймовірність того, що величина X менша за x^*, дорівнює $\frac{1}{2}$, а також:

$$Me = x^*, \text{ якщо } P(X < x^*) = P(X > x^*) = \frac{1}{2}.$$

Початковим моментом порядку k *ВВ* X називається величина:

$$\alpha_k = M(X^k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Зокрема, якщо $k = 1$, $\alpha_1 = M(X)$ – математичне сподівання X.

Центральним моментом порядку k *ВВ* X називається величина:

$$\beta_k = M((X - M_X)^k), \quad k = 1,2, \dots, n.$$

Зокрема,

$k = 1$, $\beta_1 = M(X - M_X) = M(X) - M(M_X) = M(X) - M(X) = 0$;

$k = 2$, $\beta_2 = M((X - M_X)^2) = D_X$ – дисперсія X;

$k = 3$, $\beta_3 = M((X - M_X)^3)$.

ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 4.1. По мішені проводиться чотири незалежні постріли. Ймовірність влучення під час одного пострілу дорівнює 0,25. Обчислити основні числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ на основі даних, отриманих під час виконання лабораторної роботи № 3. Знайти початкові та центральні моменти порядків 1, 2, 3.

Розв'язання. Як показано в прикладі 3.2 лабораторної роботи № 3, випадкова величина X має біноміальний закон розподілу з:

$$n = 4, \quad p = 0{,}25, \quad q = 1 - p = 0{,}75.$$

Ряд розподілу цієї випадкової величини наведено на рис. 3.4.

Знайдемо основні числові характеристики розподілу даної випадкової величини: математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення. Оскільки у цьому випадку маємо справу з дискретною випадковою величиною, яка має біноміальний розподіл, то, відповідно до таблиці 4.1, її числові характеристики обчислюємо так:

$$M(X) = np = 4 \cdot 0{,}25 = 1,$$

$$D(X) = npq = 4 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 0{,}75,$$
$$\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866025.$$

Ці самі значення отримаємо, якщо використаємо загальні формули (4.1), (4.3) або (4.4) для обчислення математичного сподівання та дисперсії:

$$M(X) = \sum_{k=0}^{4} x_k p_k = 0 \cdot 0{,}3164 + 1 \cdot 0{,}4219 + 2 \cdot 0{,}2109 + 3 \cdot 0{,}0469 + 4 \cdot 0{,}0039 = 1.$$

Знайдемо $M(X^2)$. Отримаємо:

$$M(X^2) = \sum_{k=0}^{4} x_k^2 p_k = 0 \cdot 0{,}3164 + 1 \cdot 0{,}4219 + 4 \cdot 0{,}2109 + 9 \cdot 0{,}0469 + 16 \cdot 0{,}0039 = 1{,}75.$$

Звідси:

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = 1{,}75 - 1^2 = 0{,}75.$$

Середнє квадратичне відхилення обчислимо за формулою (4.6):

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}75} = 0{,}866025.$$

Розрахувати математичне сподівання $M(X)$ можна за допомогою функції MS Excel з категорії Математичні – SUMPRODUCT (масив 1, масив 2, масив 3), де «масив 1» – значення x_k, «масив 2» – значення p_k (рис. 4.1).

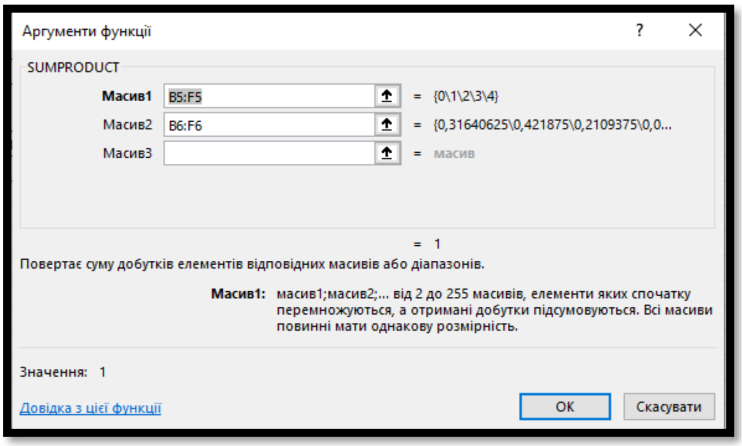


Рисунок 4.1. Аргументи функції SUMPRODUCT. Обчислення математичного сподівання

Розрахувати дисперсію $D(X)$ можна так:

– задати масив даних $x_i - M(X)$;

– у відповідній комірці задати функцію SUMPRODUCT, де – «масив 1» та «масив 2» – значення $x_i - M(X)$, «масив 3» – значення p_i. У цьому випадку $x_i - M(X)$ (рис. 4.2).

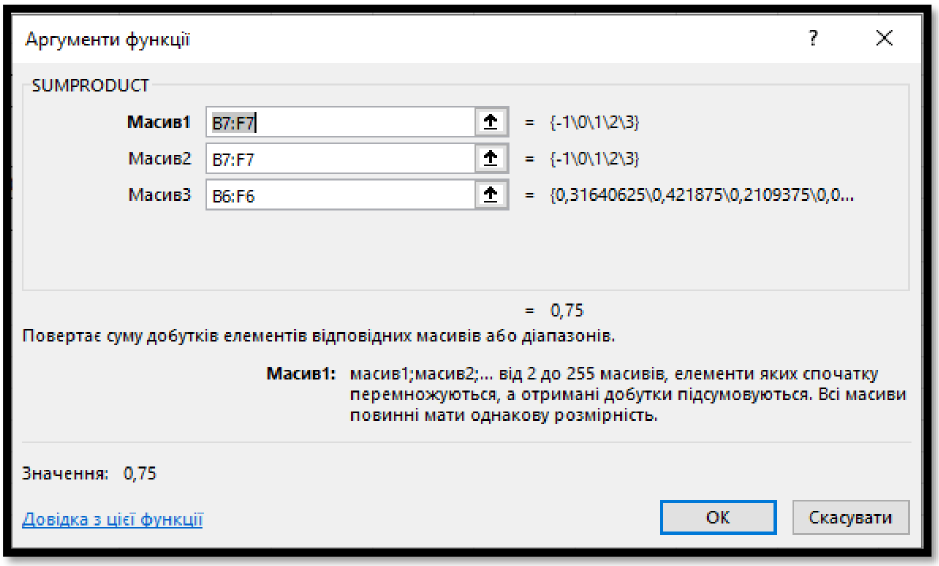
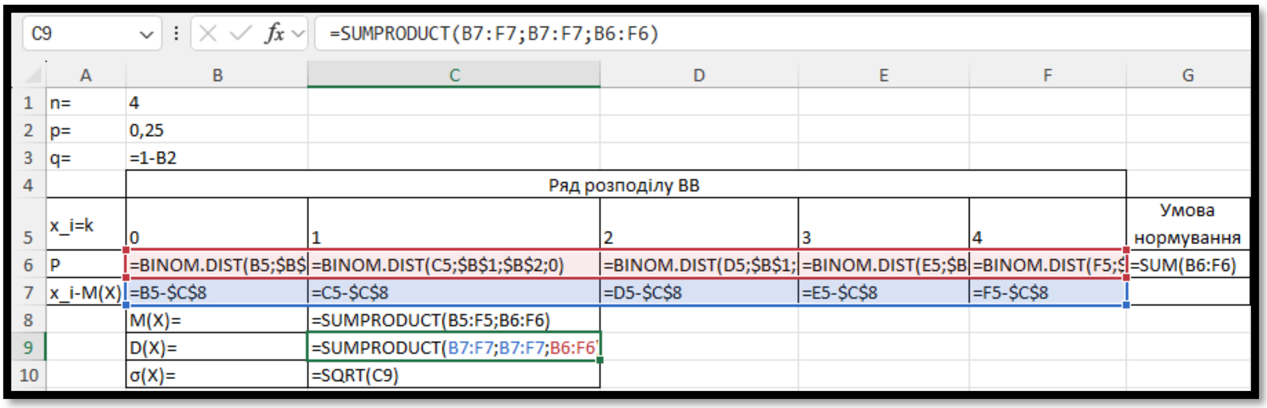


Рисунок 4.2. Обчислення дисперсії за допомогою функції SUMPRODUCT

Розрахувати середнє квадратичне відхилення можна, задавши у відповідній комірці функцію SQRT (категорія Математичні) з дисперсії.

Організація обчислень математичного сподівання, дисперсії та середнього квадратичного відхилення за допомогою MS Excel наведена на рис. 4.3.


C9 =SUMPRODUCT(B7:F7;B7:F7;B6:F6)

	A	B	C	D	E	F	G
1	n=	4					
2	p=	0,25					
3	q=	=1-B2					
4		Ряд розподілу ВВ					
5	x_i=k	0	1	2	3	4	Умова нормування
6	P	=BINOM.DIST(B5;B	=BINOM.DIST(C5;B1;B2;0)	=BINOM.DIST(D5;B1;	=BINOM.DIST(E5;$B	=BINOM.DIST(F5;$	=SUM(B6:F6)
7	x_i-M(X)	=B5-C8	=C5-C8	=D5-C8	=E5-C8	=F5-C8	
8		M(X)=	=SUMPRODUCT(B5:F5;B6:F6)				
9		D(X)=	=SUMPRODUCT(B7:F7;B7:F7;B6:F6				
10		σ(X)=	=SQRT(C9)				

Рисунок 4.3. Організація обчислень числових характеристик у MS Excel

Нижче наведемо лістинг обчислення деяких числових характеристик із використанням MATLAB:

```
x=[0 1 2 3 4]; % x(i)
p=[0.3164 0.4218 0.2109 0.0468 0.0039]; % p(i)
mx=sum(x.*p); % обчислюємо математичне сподівання
fprintf('Математичне сподівання Mx=%8.5f.\n',mx);

disp('Початкові моменти:');
for i=1:3
  alpha=sum(x.^i.*p); % момент i-го порядку
  fprintf('Alpha(%d)=%12.5f\n',i,alpha);
```

```
end

disp('Центральні моменти:');
for i=1:3
  beta=sum((x-mx).^i.*p); % момент i-го порядку
  fprintf('Beta(%d)=%12.5f\n',i,beta);
end

Dx=sum((x-mx).^2.*p); % знову обчислили дисперсію
Sx=Dx^0.5; % середнє квадратичне відхилення
fprintf('Дисперсія Dx=%8.5f;\n',Dx);
fprintf('Середнє квадратичне відхилення Sx=%8.5f;\n',Sx);
```

Отриманий результат:

```
Математичне сподівання Mx= 0.99960.
Початкові моменти:
Alpha(1)=     0.99960
Alpha(2)=     1.74900
Alpha(3)=     3.62220
Центральні моменти:
Beta(1)=     0.00020
Beta(2)=     0.74960
Beta(3)=     0.37510
Дисперсія Dx= 0.74960;
Середнє квадратичне відхилення Sx= 0.86579;
```

Приклад 4.2. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ випадкової величини X, якщо її диференціальна функція розподілу:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0 < x \le \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо математичне сподівання і дисперсію за формулами (4.2) і (4.5):

$$M(X) = \int_0^{\pi} x \cdot \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx = 1{,}142;$$

$$D(X) = \int_0^{\pi} \left(x - M(X)\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx = 0{,}566.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = 0{,}753.$$

Нижче наведемо лістинг обчислення цих числових характеристик з використанням MATLAB:

```
a = 0;
b = pi;

% Функція щільності розподілу f_x(x)
function fx = dens_f(x)
    fx = zeros(size(x));
    fx(x > 0 & x <= pi) = 1/2*cos(1/2*x(x > 0 & x <= pi));
end

% Інтегрування для обчислення M(X), M(X^2), початкових та центральних моментів
M_X = integral(@(x) x .* dens_f(x), a, b);
M_X_squared = integral(@(x) x.^2 .* dens_f(x), a, b);
M_X_cubed = integral(@(x) x.^3 .* dens_f(x), a, b);

% Обчислення середнього значення, дисперсії та стандартного відхилення
mean_X = M_X;
var_X = M_X_squared - M_X^2;
std_X = sqrt(var_X);

% Виведення результатів
fprintf('Середнє значення (M(X)): %.4f\n', mean_X);
fprintf('Дисперсія (D(X)): %.4f\n', var_X);
fprintf('Стандартне відхилення (σ(X)): %.4f\n', std_X);
```

Отриманий результат:

```
Середнє значення (M(X)): 1.1416
Дисперсія (D(X)): 0.5664
Стандартне відхилення (σ(X)): 0.7526
```

ЗАВДАННЯ ТА ВАРІАНТИ ДЛЯ ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Варіанти для виконання

Робота містить 4 завдання. Варіант для виконання роботи обирається з кожного завдання відповідно до номера за списком у підгрупі: номер варіанта збігається з номером за списком від 1 до 10, з 11-го номера – з останньою цифрою.

Завдання для виконання

4.1. Для побудованого закону розподілу дискретної випадкової величини X у завданні 3.1 лабораторної роботи № 3 знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ і початкові та центральні моменти порядків 1, 2, 3:

1) Чотири прилади потрібно перевірити на надійність. Ймовірність того, що прилад витримає перевірку на надійність, для кожного дорівнює 0,8. Дискретна випадкова величини X – кількість приладів, які пройшли випробування.

2) Двічі кидають монету. Нехай дискретна випадкова величина X – кількість випадань герба.

3) Під час роботи певного пристрою час від часу виникають збої, які можна вважати випадковими подіями, розподіленими за законом Пуассона. Середнє число збоїв за добу роботи машини дорівнює 1,5. Дискретна випадкова величини X – кількість збоїв роботи пристрою за добу.

4) Стріляють у ціль до першого влучення. Влучення під час різних пострілів – незалежні події, ймовірність влучення під час кожного пострілу $p = 0{,}85$. Нехай випадкова величина X – кількість зроблених пострілів.

5) Радіотелефонна станція отримує цифровий текст. Внаслідок атмосферних завад ймовірність спотворення цифри в середньому дорівнює 0,001. Було отримано текст, що налічує 2 000 цифр. Дискретна випадкова величини X – кількість спотворених цифр в отриманому тексті.

6) Дискретна випадкова величини X – кількість появ події в 8-ми незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події рівна 0,7.

7) Телефонна станція обслуговує 1 000 абонентів. Ймовірність того, що протягом години абонент розмовлятиме по телефону, дорівнює в середньому 0,002. Дискретна випадкова величини X – кількість абонентів, які розмовляють протягом години.

8) Ймовірність влучення в мішень дорівнює 0,5. Стрілець, маючи в запасі 6 патронів, робить постріли по мішені до першого попадання або до використання усіх патронів. Дискретна випадкова величини X – кількість використаних набоїв.

9) Серед 12 однотипних телевізорів 8 відповідають вимогам стандарту, а решта – ні. Дискретна випадкова величини X – кількість телевізорів, що відповідають вимогам стандарту серед s навмання взятих, якщо: $s = 4$.

10) Монету підкидають доти, поки випаде герб. Нехай випадкова величина X – кількість зроблених підкидань.

4.2. Для побудованого закону розподілу дискретної випадкової величини X у завданні 3.2 лабораторної роботи № 3 знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$:

1) Дискретна випадкова величини X – сума числа очок, які можуть з'явитися під час кидання грального кубика та монети, якщо вважати, що випадання орла дає 0 очок, а решки – 1 очко.

2) Пристрій складається з чотирьох приладів, які працюють незалежно один від одного. Ймовірності відмови приладів $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}4$, $p_3 = 0{,}5$, $p_4 = 0{,}6$. Дискретна випадкова величини X – кількість приладів, які відмовили.

3) Підприємство використовує чотири види сировини. Ймовірність зриву поставок кожної з них дорівнює відповідно 0,1; 0,05; 0,01; 0,08. Дискретна випадкова величини X – кількість видів сировини, поставку яких буде зірвано.

4) Маршрут руху вантажівки пролягає через чотири перехрестя, які регулюються світлофорами, що зі ймовірностями відповідно 0,8, 0,5, 0,6, 0,4 дозволяють рух без зупинки. Дискретна випадкова величини X – кількість зупинок машини на перехрестях по цьому маршруту, якщо світлофори працюють незалежно один від одного.

5) Ймовірності зростання вартості кожного з чотирьох видів сировини за прогнозний період становлять відповідно 0,2, 0,8, 0,1, 0,5. Дискретна випадкова величини X – кількість видів сировини, для яких відбудеться зростання ціни за цей період.

6) Під час виготовлення деталі робітникові необхідно виконати чотири незалежні між собою технологічні операції. Ймовірність того, що під час виконання першої операції робітник не допустить дефекту, дорівнює 0,95; для другої, третьої і четвертої операцій ця ймовірність становить відповідно 0,9; 0,85; 0,8. Дискретна випадкова величини X – кількість операцій, під час виконання яких робітник не допустить браку.

7) За даними відділу маркетингу підприємства зі ймовірностями 0,8, 0,6, 0,2 прогнозується підвищення попиту на кожен із трьох видів продукції. Дискретна випадкова величини X – кількість видів продукції, для яких прогнозується підвищення попиту.

8) В цеху можуть одночасно працювати три однотипні верстати, які вмикаються незалежно. Ймовірність того, що в даний момент працює перший, другий чи третій верстат, дорівнює 0,2; 0,5; 0,3 відповідно. Дискретна випадкова величини X – кількість одночасно працюючих верстатів.

9) У першому ящику міститься 7 стандартних і 3 браковані деталі, у другому – 6 стандартних і 4 браковані. Навмання з першого ящика беруть дві деталі, а з другого – одну. Дискретна випадкова величини X – кількість появ стандартних деталей серед трьох навмання взятих.

10) Троє складають іспит із теорії ймовірностей. Ймовірність того, що перший студент складе екзамен, становить 0,9, для другого та третього студентів ця ймовірність дорівнює відповідно 0,85; 0,8. Дискретна випадкова величини X – кількість студентів, які складуть іспит з теорії ймовірностей.

4.3. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу $F_X(x)$. На основі отриманої у завданні 3.3 лабораторної роботи № 3 функції щільності розподілу знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$:

1) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le -4;\\ \frac{(x+4)^2}{16}, & -4<x\le 0;\\ 1, & x>0;\end{cases}$ $\quad a=-2,\ b=5.$

2) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{\sqrt{2x}}{4}, & 0<x\le 8;\\ 1, & x>8;\end{cases}$ $\quad a=1,\ b=6.$

3) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le -\frac{\pi}{2};\\ \frac{1+\sin x}{2}, & -\frac{\pi}{2}<x\le \frac{\pi}{2};\\ 1, & x>\frac{\pi}{2};\end{cases}$ $\quad a=0,\ b=\frac{\pi}{4}.$

4) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \frac{x+2}{7}, & -2<x\le 5;\\ 1, & x>5;\end{cases}$ $\quad a=0,\ b=3.$

5) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ \frac{x-2}{3}, & 2<x\le 5;\\ 1, & x>5;\end{cases}$ $\quad a=0,\ b=3.$

6) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{x}{2}, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2;\end{cases}$ $\quad a=1,\ b=2.$

7) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \frac{(x+4)^3}{64}, & -1<x\le 3;\\ 1, & x>3;\end{cases}$ $\quad a=0,\ b=2.$

8) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ \frac{x-2}{3}, & 2<x\le 5;\\ 1, & x>5;\end{cases}$ $\quad a=2,\ b=4.$

9) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-\cos x, & 0<x\le \frac{\pi}{2};\\ 1, & x>\frac{\pi}{2};\end{cases}$ $\quad a=\frac{\pi}{4},\ b=\frac{\pi}{2}.$

10) $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{\sqrt{2x}}{4}, & 0<x\le 8;\\ 1, & x>8;\end{cases}$ $\quad a=2,\ b=7.$

4.4. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, початкові та центральні моменти порядків 1, 2, 3 неперервної випадкової величини X, якщо відома її диференціальна функція розподілу $f_X(x)$:

1) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{2x}{9}, & 0 < x \le 3; \\ 0, & x > 3; \end{cases}$ $\qquad a = 0, \ \ b = 2.$

2) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 2\cos x, & 0 < x \le \frac{\pi}{6}; \\ 0, & x > 3; \end{cases}$ $\qquad a = \frac{\pi}{12}, \ \ b = \frac{\pi}{6}.$

3) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{\sin x}{2}, & 0 < x \le \pi; \\ 0, & x > \pi; \end{cases}$ $\qquad a = \frac{\pi}{6}, \ \ b = \frac{\pi}{3}.$

4) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le -\frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{\pi}(1 + \cos 2x), & -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ $\qquad a = -\frac{\pi}{6}, \ \ b = \frac{\pi}{2}.$

5) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le \frac{\pi}{6}; \\ 3\sin 3x, & \frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{3}; \\ 0, & x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$ $\qquad a = \frac{\pi}{6}, \ \ b = \frac{\pi}{4}.$

6) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 3x^2, & 0 < x \le 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$ $\qquad a = 0{,}5, \ \ b = 1.$

7) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ 2(x-2), & 2 < x \le 3; \\ 0, & x > 3. \end{cases}$ $\qquad a = 2{,}2, \ \ b = 3.$

8) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ x - \frac{1}{2}, & 1 < x \le 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$ $\qquad a = \frac{1}{2}, \ \ b = \frac{3}{2}.$

9) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \sin x, & 0 < x \le \frac{\pi}{2}; \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ $\qquad a = \frac{\pi}{12}, \ \ b = \frac{\pi}{6}.$

10) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{2}(2x-1), & 0 < x \le 2; \\ 0, & x > 2; \end{cases}$ $\qquad a = \frac{2}{5}, \ \ b = \frac{3}{2}.$

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Що називається математичним сподіванням?

2. Що називають дисперсією?

3. Що називають середнім квадратичним відхиленням?

4. У яких одиницях вимірюється математичне сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення відносно одиниць вимірювання випадкової величини?

5. За якими формулами обчислюються числові характеристики дискретних випадкових величин?

6. Обчислення числових характеристик біноміального закону розподілу.

7. Обчислення числових характеристик закону розподілу Пуассона.

8. Обчислення числових характеристик геометричного закону розподілу.

9. За якими формулами обчислюються числові характеристики неперервних випадкових величин?

10. Обчислення числових характеристик рівномірного закону розподілу.

11. Обчислення числових характеристик нормального закону розподілу.

12. Обчислення числових характеристик показникового закону розподілу.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 5
Системи двох випадкових величин

Мета: формування навичок обчислення числових характеристик системи двох випадкових величин з використанням пакетів Microsoft Excel та MATLAB.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1. Система двох випадкових величин

Законом розподілу двох дискретних випадкових величин називають перелік усіх можливих значень $X = x_i$, $Y = y_i$ та відповідних їм ймовірностей спільної появи. У табличній формі цей закон запишеться так:

$X = x_i$ / $Y = y_i$	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_m
y_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\dots$	p_{1m}
y_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\dots$	p_{2m}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_k	p_{k1}	p_{k2}	p_{k3}	$\dots$	p_{km}

Умова нормування:

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = \sum_{i=1}^{k} py_i = \sum_{j=1}^{m} px_j = 1.$$

Нехай (X, Y) – двовимірна випадкова величина.

Функцією розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) називають функцію $F(x, y)$, що визначає для кожної пари чисел (x, y) ймовірність того, що X набуде значення, менше x, і водночас Y набуватиме значення, менше y:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Щільністю спільного розподілу ймовірності $f(x, y)$ *двовимірної неперервної випадкової величини* (X, Y) називають другу мішану частинну похідну від функції розподілу:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

2. Числові характеристики системи двох випадкових величин

2.1. (X, Y) – двовимірна дискретна випадкова величина

$$M(X) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_j p_{ij}, \qquad M(Y) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_i p_{ij}.$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_j^2 p_{ij} - M^2(X);$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_i^2 p_{ij} - M^2(Y);$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \qquad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}.$$

2.2. (X, Y) – двовимірна неперервна випадкова величина

$$M(X) = \iint_{\Omega} xf(x,y)dxdy, \qquad M(Y) = \iint_{\Omega} yf(x,y)dxdy.$$

$$D(X) = \iint_{\Omega} x^2 f(x,y)dxdy - M^2(X), \qquad D(Y) = \iint_{\Omega} y^2 f(x,y)dxdy - M^2(Y).$$

3. Кореляційний момент, коефіцієнт кореляції

Щоб з'ясувати наявність зв'язку між випадковими величинами X і Y та його характер, застосовують *кореляційний момент:*

$$cov(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_i x_j p_{ij} - M(X)M(Y),$$

якщо X і Y – дискретні;

$$cov(X,Y) = \iint_{\Omega} xyf(x,y)dxdy - M(X)M(Y),$$

якщо X і Y – неперервні.

Якщо $cov(X,Y) = 0$, то зв'язок між величинами X і Y відсутній. Коли $cov(X,Y) \neq 0$, то між величинами X і Y існує кореляційний зв'язок.

Для характеристики кореляційного зв'язку вводять коефіцієнт кореляції:

$$r(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)},$$

де $|r(X,Y)| \leq 1$.

ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ

Приклад 5.1. Дискретна двовимірна випадкова величина задана законом розподілу.

$X \backslash Y$	1	3	4	8
3	0,15	0,06	0,25	0,04
6	0,3	0,1	0,03	0,07

1. Побудувати ряди розподілу компонент Xта Y.

2. Обчислити M_X, D_X, σ_X, M_Y, D_Y, σ_Y.

Розв'язання

1. Доповнимо ряд розподілу ДДВВ (X, Y) додатковими рядком, в якому вкажемо $q_i = p_{1i} + p_{2i}$, $i = 1,2,3,4$ та стовпчиком для $p_k = p_{k1} + p_{k2} + p_{k3} + p_{k4}$, $k = 1,2$, тоді матриця розподілу буде мати вигляд:

$X \backslash Y$	1	3	4	8	p_k
3	0,15	0,06	0,25	0,04	0,5
6	0,3	0,1	0,03	0,07	0,5
q_k	0,45	0,16	0,28	0,11	1

Отже, ряди розподілу компонент Xта Y мають вигляд:

Y	1	3	4	8
q_k	0,45	0,16	0,28	0,11

X	3	6
p_k	0,5	0,5

2. Знайдемо числові характеристики компонент:

$$M_X = 4{,}5, \quad D_X = 2{,}25, \quad \sigma_X = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5,$$

$$M_Y = 2{,}93, \quad D_Y = 4{,}815, \quad \sigma_X = \sqrt{4{,}815} = 2{,}194.$$

Приклад 5.2. Система випадкових величин (X, Y) має щільність розподілу ймовірностей:

$$f(x, y) = a(xy + y^2),$$

де $(x, y) \in D = \{(x, y): 0 \le x \le 1; \quad 0{,}5x \le y \le x\}$ та $f(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin D$.

Знайти значення константи a, математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$, середні квадратичні відхилення $\sigma(X)$ і $\sigma(Y)$, кореляційний момент $cov(X, Y)$ і коефіцієнт кореляції $r(X, Y)$.

Розв'язання. Щоб знайти константу a, скористаємося характеристичною властивістю функції щільності розподілу ймовірностей $f(x, y)$:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = 1.$$

Обчислимо інтеграл:

$$\iint\limits_{D} a(xy+y^2)dxdy = a\iint\limits_{D}(xy+y^2)dxdy = a\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0,5x}^{x}(xy+y^2)dxdy =$$

$$= a\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{0,5x}^{x}(xy+y^2)dy\right)dx = a\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{xy^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{0,5x}^{x}dx =$$

$$= a\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{x^3}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{0,25x^3}{2}-\frac{0,125x^3}{3}\right)dx = a\int\limits_{0}^{1}\frac{4x^3}{6}dx = \frac{4a}{6}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{a}{6},$$

звідки $\frac{a}{6} = 1$, тому $a = 6$.

Функцію $f(x,y)$ можна записати так:

$$f(x,y) = \begin{cases} 6(xy+y^2), & \text{якщо } (x,y)\in D; \\ 0, & \text{якщо } (x,y)\notin D. \end{cases}$$

Математичне сподівання $M(X)$ обчислюємо за формулою:

$$M(X) = \iint\limits_{D} xf(x,y)dxdy.$$

Маємо:

$$M(X) = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0,5x}^{x}6x(xy+y^2)dxdy = 6\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{0,5x}^{x}(x^2y+xy^2)dy\right)dx =$$

$$= 6\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{x^2y^2}{2}+\frac{xy^3}{3}\right)\Bigg|_{0,5x}^{x}dx = 6\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{x^4}{2}+\frac{x^4}{3}-\frac{0,25x^4}{2}-\frac{0,125x^4}{3}\right)dx =$$

$$= 6\int\limits_{0}^{1}\frac{4}{6}x^4dx = 4\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_{0}^{1} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Аналогічно обчислюємо $M(Y)$:

$$M(Y) = \iint\limits_{D} yf(x,y)dxdy;$$

$$M(Y) = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{0,5x}^{x}6y(xy+y^2)dxdy = 6\int\limits_{0}^{1}\left(\int\limits_{0,5x}^{x}(xy^2+y^3)dy\right)dx =$$

$$= 6\int_0^1 \left(\frac{xy^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{0,5x}^{x} dx = 6\int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{0,125x^4}{3} - \frac{0,0625x^4}{4}\right) dx =$$

$$= 6\int_0^1 \frac{6,3125}{12} x^4 dx = \frac{1}{2} \cdot 6,3125 \frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1 = 0,63125.$$

Дисперсія:

$$D(X) = \iint\limits_{\mathrm{D}} x^2 f(x,y) dxdy - M^2(X).$$

Отже,

$$D(X) = \int_0^1 \int_{0,5x}^{x} 6x^2(xy + y^2) dxdy - 0,64 =$$

$$= 6\int_0^1 \left(\frac{x^3y^2}{2} + \frac{x^2y^3}{3}\right)\Bigg|_{0,5x}^{x} dx - 0,64 =$$

$$= 6\int_0^1 \left(\frac{x^5}{2} + \frac{x^5}{3} - \frac{0,25x^5}{2} - \frac{0,125x^5}{3}\right) dx - 0,64 =$$

$$= 4 \cdot \frac{x^6}{6}\Bigg|_0^1 - 0,64 = \frac{2}{3} - 0,64 = \frac{2}{75} \approx 0,0267.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{2}{75}} \approx 0,163.$$

Аналогічно обчислюємо $D(Y)$:

$$D(Y) = \iint\limits_{\mathrm{D}} y^2 f(x,y) dxdy - M^2(Y).$$

Отже,

$$D(Y) = \int_0^1 \int_{0,5x}^{x} 6y^2(xy + y^2) dxdy - 0,398 =$$

$$= 6\int_0^1 \left(\frac{xy^4}{4} + \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_{0,5x}^{x} dx - 0,398 =$$

$$= 6\int_0^1 \left(\frac{x^5}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{0,0625x^5}{4} - \frac{0,03125x^5}{5}\right) dx - 0,398 \approx 0,032.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{0{,}032} \approx 0{,}179.$$

Кореляційний момент:

$$cov(X,Y) = \iint\limits_{D} xyf(x,y)dxdy - M(X)M(Y) =$$

$$= 6\int_0^1 \int_{0,5x}^{x} xy(xy + y^2)dxdy - 0{,}8 \cdot 0{,}63125 =$$

$$= 6\int_0^1 \left(\frac{x^2y^3}{3} + \frac{xy^4}{4}\right)\Bigg|_{0,5x}^{x} dx - 0{,}505 =$$

$$= 6\int_0^1 \left(\frac{x^5}{3} + \frac{x^5}{4} - \frac{0{,}125x^5}{3} - \frac{0{,}0625x^5}{4}\right)dx - 0{,}505 =$$

$$= \frac{6{,}3125x^6}{12}\Bigg|_0^1 - 0{,}505 \approx 0{,}021.$$

За формулою:

$$r(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$$

обчислимо коефіцієнт кореляції:

$$r(X,Y) = \frac{0{,}021}{0{,}163 \cdot 0{,}654} \approx 0{,}2.$$

Отже, це означає, що випадкові величини X і Y корельовані.

Наведемо лістинг MATLAB із частковим виконанням прикладу 5.2 (на прикладі числових характеристик випадкової величини X):

```
     clear all; clc; % чистимо пам'ять та консоль
syms a x y      % символьні змінні

% вхідні дані
disp('Задана функція щільності розподілу випадкової величини:');
f = @(x,y) a*(x*y + y^2)

disp('Заданий діапазон значень випадкової величини:');
x_min = 0
x_max = 1
y_min = @(x) x./2
y_max = @(x) x

disp('Знаходимо невідому величину (а) з умови нормування щільності:');
int_xy = int(int(f, y, y_min, y_max), x, x_min, x_max)
```

```
eqn = int_xy == 1
a = solve(eqn)

     % числові характеристики компонент (символьні обчислення)

disp('Числові характеристики компонент (символьний спосіб)...');
% оновлюємо функцію для урахування визначеного значення константи
f = @(x,y) a*(x*y + y^2)

disp('Математичне сподівання компонент:');
M_X = int(int(x*f, y, y_min, y_max), x, x_min, x_max)
fprintf('Mx = %14.8f\n\n', double(M_X));

disp('Дисперсія компонент:');
D_X = int(int(x^2*f, y, y_min, y_max), x, x_min, x_max) - M_X^2
fprintf('Dx = %14.8f\n\n', double(D_X));

disp('Середньоквадратичне відхилення компонент:');
sigma_X = D_X^(1/2);
fprintf('sx = %14.8f\n\n', double(sigma_X));

     % числові характеристики компонент
     % (числові розрахунки 2-ма способами)

clear x y; % забуваємо зайве
a = double(a);

     disp('Числові характеристики компонент (числовий спосіб 1)...');
% з урахуванням області значень випадкових величин
% через межі інтегрування
f = @(x,y) a.*(x.*y + y.^2);

disp('Математичне сподівання компонент:');
xf = @(x,y) x.*f(x,y);
M_X = integral2(xf, x_min, x_max, y_min, y_max);
fprintf('Mx = %14.8f\n\n', M_X);

disp('Дисперсія компонент:');
x2f = @(x,y) x.^2.*f(x,y);
D_X = integral2(x2f, x_min, x_max, y_min, y_max) - M_X^2;
fprintf('Dx = %14.8f\n\n', D_X);

disp('Середньоквадратичне відхилення компонент:');
sigma_X = D_X^(1/2);
fprintf('sx = %14.8f\n\n', sigma_X);

disp('Числові характеристики компонент (числовий спосіб 2)...');
% з урахуванням області значень випадкових величин
% у вигляді умовної функції щільності
f = @(x,y) a.*(x.*y + y.^2) .* (x>=0).*(x<=1).*(y>=x/2).*(y<=x);

disp('Математичне сподівання компонент:');
xf = @(x,y) x.*f(x,y);
M_X = integral2(xf, 0, 1, 0, 1);
```

```
fprintf('Mx = %14.8f\n\n', M_X);

disp('Дисперсія компонент:');
x2f = @(x,y) x.^2.*f(x,y);
D_X = integral2(x2f, 0, 1, 0, 1) - M_X^2;
fprintf('Dx = %14.8f\n\n', D_X);

disp('Середньоквадратичне відхилення компонент:');
sigma_X = D_X^(1/2);
fprintf('sx = %14.8f\n\n', sigma_X);
```

Отриманий результат:

```
Задана функція щільності розподілу випадкової величини:
f =
  function_handle with value:
    @(x,y)a*(x*y+y^2)

Заданий діапазон значень випадкової величини:
x_min =
     0
x_max =
     1

y_min =
  function_handle with value:
    @(x)x./2
y_max =
  function_handle with value:
    @(x)x

Знаходимо невідому величину (a) з умови нормування щільності:
int_xy =
a/6

eqn =
a/6 == 1

a =
6

Числові характеристики компонент (символьний спосіб)...
f =
  function_handle with value:
    @(x,y)a*(x*y+y^2)

Математичне сподівання компонент:
M_X =
4/5

Mx =     0.80000000

Дисперсія компонент:
```

```
D_X =
2/75

Dx =     0.02666667

Середньоквадратичне відхилення компонент:
sx =     0.16329932

Числові характеристики компонент (числовий спосіб 1)...
Математичне сподівання компонент:
Mx =     0.80000000

Дисперсія компонент:
Dx =     0.02666667

Середньоквадратичне відхилення компонент:
sx =     0.16329932;  sy =     0.17218722

Числові характеристики компонент (числовий спосіб 2)...
Математичне сподівання компонент:
Mx =     0.80013309

Дисперсія компонент:
Dx =     0.02654701

Середньоквадратичне відхилення компонент:
sx =     0.16293253

>>
```

ЗАВДАННЯ ТА ВАРІАНТИ ДЛЯ ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Варіанти для виконання

Робота містить 2 завдання. Варіант для виконання роботи обирається з кожного завдання відповідно до номера за списком у підгрупі: номер варіанта збігається з номером за списком від 1 до 10, з 11-го номера – з останньою цифрою.

Завдання для виконання

5.1. Дискретна двовимірна випадкова величина задана законом розподілу. За допомогою MS Excel і MATLAB:

1. Побудувати ряди розподілу компонент X та Y.
2. Обчислити M_X, D_X, σ_X, M_Y, D_Y, σ_Y.
3. Обчислити кореляційний момент $cov(X,Y)$, коефіцієнт кореляції $r(X,Y)$.

1)

Y \ X	–10	–8	–6	–4
10	0,023	0,027	0,05	0,1
20	0,05	0,1	0,025	0,025
30	0,05	0,05	0,025	0,025
40	0,027	0,023	0,05	0,35

2)

Y \ X	5	10	15	20
–10	0,012	0,038	0,2	0,1
–8	0,038	0,012	0,05	0,05
–6	0,05	0,05	0,012	0,038
–4	0,1	0,2	0,038	0,012

3)

Y \ X	–8	–6	–4	–2
5	0,023	0,027	0,05	0,1
10	0,05	0,1	0,025	0,025
15	0,05	0,05	0,025	0,025
20	0,027	0,023	0,05	0,35

4)

Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	0,02	0,08	0,1	0,06	0,04	0,02
1	0	0,03	0,07	0,09	0,1	0,12
2	0	0	0,02	0,04	0,06	0,08
3	0	0	0	0,01	0,02	0,04

5)

Y \ X	–1	0	4	7
0	0,17	0,05	0,01	0,13
4	0,15	0,08	0,018	0,02
5	0,04	0,06	0,01	0,1

6)

Y \ X	–1	0	2	4
3	0,12	0,05	0,01	0,14
5	0,03	0,08	0,2	0,12
6	0,04	0,16	0,01	0,04

7)

Y \ X	0	4	8	10
0	0,09	0,11	0,01	0,12
2	0,17	0,08	0,15	0,02
7	0,04	0,08	0,01	0,12

8)

Y \ X	–1,5	0	1	3
0	0,12	0,09	0,01	0,13
2	0,17	0,08	0,2	0,02
5	0,04	0,06	0,01	0,07

9)

Y \ X	0	7	8	10
–2	0,08	0,11	0,01	0,12
0	0,13	0,08	0,12	0,02
6	0,04	0,16	0,01	0,12

10)

Y \ X	0	4,5	8	10
0	0,16	0,11	0,01	0,12
1	0,11	0,08	0,15	0,02
5	0,04	0,08	0,01	0,11

5.2. Знайти значення константи a, математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$, середні квадратичні відхилення $\sigma(X)$ і $\sigma(Y)$, кореляційний момент $cov(X,Y)$ і коефіцієнт кореляції $r(X,Y)$ системи випадкових величин (X,Y) із щільність розподілу ймовірностей $f(x,y)$ за допомогою MATLAB:

1) $f(x,y)=\begin{cases} axy, & (x,y)\in D; \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$

де $D=\{(x,y)\colon 0\le x\le 1;\quad 0\le y\le 1-x\}$.

2) $f(x,y)=\begin{cases} a(2xy+y^2), & (x,y)\in D; \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$

де $D=\{(x,y)\colon 0\le x\le 2;\quad 0\le y\le 2\}$.

3) $f(x,y)=\begin{cases} a(x+y), & (x,y)\in D; \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$

де $D=\{(x,y)\colon 0\le x\le 1;\quad 0\le y\le x\}$.

4) $f(x,y)=\begin{cases} a(x^2+2y), & (x,y)\in D; \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$

де $D=\{(x,y)\colon -1\le x\le 1;\quad 0\le y\le 2\}$.

5) $f(x,y)=\begin{cases} a(x^2+2y), & (x,y)\in D; \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$

де $D=\{(x,y)\colon -1\le x\le 1;\quad 0\le y\le 1-x\}$.

6) $f(x,y)=\begin{cases} a(x+y^2), & (x,y)\in D; \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$

де $D=\{(x,y)\colon -1\le x\le 1;\quad 0\le y\le 1-x\}$.

7) $f(x,y)=\begin{cases} axy^2, & (x,y)\in D; \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$

де $D=\{(x,y): 0\le x\le 1;\quad 0\le y\le 2x\}$.

8) $f(x,y)=\begin{cases} ax^2y, & (x,y)\in D; \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$

де $D=\{(x,y): 0\le x\le 1;\quad 0\le y\le 2x\}$.

9) $f(x,y)=\begin{cases} 2axy, & (x,y)\in D; \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$

де $D=\{(x,y): 0\le x\le 1;\quad 0\le y\le 1-x\}$.

10) $f(x,y)=\begin{cases} a(x^2+3y), & (x,y)\in D; \\ 0, & (x,y)\notin D, \end{cases}$

де $D=\{(x,y): -1\le x\le 1;\ 0\le y\le 1-x\}$.

КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Що таке система двох випадкових величин?
2. Яка двовимірна випадкова величина називається дискретною?
3. Що таке закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини?
4. Як, маючи закон розподілу двовимірної дискретної випадкової величини, знайти закон розподілу кожної з компонент?
5. Яка двовимірна випадкова величина називається неперервною?
6. Що називається функцією розподілу двовимірної випадкової величини?
7. Які властивості має функція розподілу двовимірної випадкової величини?
8. Що таке щільність розподілу неперервної двовимірної випадкової величини?
9. Які властивості має щільність розподілу двовимірної неперервної випадкової величини?
10. Які числові характеристики має двовимірна випадкова величина?
11. Що називають коваріацією системи випадкових величин?
12. Що називають коефіцієнтом кореляції?
13. Які випадкові величини називають некорельованими?

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Гончаров О. А., Князь І. О., Хоменко О. В. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч. посіб. Суми: СумДУ, 2022. 174 с.

2. Жильцов О. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика у прикладах і задачах: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О. Б. Жильцов; за ред. Г. О. Михаліна. Київ: Київ. ун-т ім. Б. Грінченка, 2015. 336 с.

3. Кирилич В. М., Терещук О. В., Флюд В. М. Оптимальне керування соціально-економічними системами у середовищі MatLab: навч. посіб. Львів: ЛНУ імені Івана Франка. 2021. 412 с.

4. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. / О. І. Кушлик-Дивульська, Н. В. Поліщук, Б. П. Орел, П. І. Штабалюк. Київ: НТУУ «КПІ», 2014. 212 с.

5. Король І. Ю., Мамай Л. М., Гапак О. М. Методичні вказівки і завдання до лабораторних робіт з курсу «Теорія ймовірностей та математична статистика» (частина 1) для студентів 2-го курсу інженерно-технічного факультету спеціальності «Комп’ютерні системи та мережі». Ужгород: видавництво УжНУ «Говерла», 2013. 60 с.

6. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. Львів: ЛьвДУВС, 2017. 292 с.

7. Теорія ймовірностей: навч. посіб. / О. Ю. Дюженкова, М. Є. Дудкін, І. В. Степахно. Київ: НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2021. 103 с. Бібліогр. електронне видання.

8. Теорія ймовірностей та математична статистика. лекції і практикум: навч. посіб. / укл.: І. В. Веригіна, О. В. Островська, О. В. Сугакова. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 254 с.

9. Теорія ймовірностей та математична статистика (конспект лекцій + тести): навч. посіб. Вид. 2-ге, допов. / Я. Т. Соловко, П. Г. Остафійчук, О. З. Гарпуль, С. А. Войтик. Івано-Франківськ: Репозитарій / ЗВО «Університет Короля Данила», 2021. 150 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ГАУССА

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3478	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2813	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2293	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1646	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1107
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0978	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0525	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0279	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0164	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0118	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0040	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0014	0014	0013	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	000

Додаток 2

ТАБЛИЦЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ЛАПЛАСА

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

X	Φ (*x*)	X	Φ (*x*)	X	Φ (*x*)	X	Φ (*x*)	X	Φ (*x*)
00	0.0000	0.50	0.1915	1.00	0.3413	1.50	0.4332	2.02	0.4783
01	0.0040	0.51	0.1950	1.01	0.3448	1.51	0.4345	2.04	0.4793
02	0.0080	0.52	0.1985	1.02	0.3461	1.52	0.4357	2.06	0.4803
03	0.0120	0.53	0.2019	1.03	0.3485	1.53	0.4370	2.08	0.4812
04	0.0160	0.54	0.2054	1.04	0.3508	1.54	0.4382	2.10	0.4821
05	0.0199	0.55	0.2088	1.05	0.3531	L55	0.4394	2.12	0.4830
06	0.0239	0.56	0.2123	1.06	0.3554	1.56	0.4406	2.14	0.4838
07	0.0279	0.57	0.2157	1.07	0.3577	1.57	0.4418	2.16	0.4846
08	0.0319	0.58	0.2190	1.08	0.3599	1.58	0.4429	2.18	0.4854
09	00359	0.59	0.2224	1.09	0.3621	1.59	0.4441	2.20	0.4861
10	0.0398	0.60	0.2257	1.10	0.3643	1.60	0.4452	2.22	0.4868
11	0.0438	0.61	0.2291	1.11	0.3665	1.61	0.4463	2.24	0.4875
12	0.0478	0.62	0.2324	1.12	0.3686	1.62	0.4474	2.26	0.4881
13	0.0517	0.63	0.2357	1.13	03708	1.63	0.4484	2.28	0.4887
14	0.0557	0.64	0.2389	1.14	0.3729	1.64	0.4495	2.30	0.4893
15	0.0596	0.65	0.2422	1.15	0.3749	1.65	0.4505	2.32	0.4898
16	0.0636	0.66	0.2454	1.16	0.3770	1.66	0.4515	2.34	0.4904
17	0.0675	0.67	0.2486	1.17	0.3790	1.67	0.4525	2.36	0.4909
18	0.0714	0.68	0.2517	1.18	0.3810	1.68	0.4535	2.38	0.4913
19	0.0753	0.69	0.2549	1.19	0.3830	1.69	0.4545	2.40	0.4918
20	0.0793	0.70	0.2580	1.20	0.3849	1.70	0.4554	2.42	0.4922
21	0.0832	0.71	0.2611	1.21	0.3869	1.71	0.4564	2.44	0.4927
22	0.0871	0.72	0.2642	1.22	0.3883	1.72	0.4573	2.46	0.4931
23	0.0910	0.73	0.2673	1.23	0.3807	1.73	0.4582	2.48	0.4934
24	0.0948	0.74	0.2703	1.24	0.3925	1.74	0.4591	2.50	0.4938
25	0.0987	0.75	0.2734	1.25	0.3944	1.75	0.4599	2.52	0.4941
26	0.1026	0.76	0.2764	1.26	0.3962	1.76	0.4608	2.54	0.4945
27	0.1064	0.77	0.2794	1.27	0.3980	1.77	0.4616	2.56	0.4948
28	0.1103	0.78	0.2823	1.28	0.3997	1.78	0.4625	2.58	0.4951
29	0(1141	0.79	0.2852	1.29	0.4015	1.79	0.4633	2.60	0.4953
30	0.1179	0.80	0.2881	1.30	0.4032	1.80	0.4641	2-62	0.4956
31	0.1217	0.81	0.2910	1.31	0.4049	1.81	0.4649	2.64	0.4959
32	0.1255	0.82	0.2939	1.32	0.4066	1.82	0.4656	2.66	0.4961
33	0.1293	0.83	0.2967	1.33	0.4082	1.83	0.4664	2.68	0.4963
34	0.1331	0.84	0.2995	1.34	0.4099	1.84	0.4671	2.70	0.4965
35	0.1368	0.85	0.3023	1.35	0.4115	1.85	0.4678	2.72	0.4967
36	0.1406	0.86	0.3051	1.36	0.4131	1.86	0.4686	2.74	0.4969
37	0.1443	0.87	0.3076	1.37	0.4147	1.87	0.4693	2.76	0.4971
38	0.1480	0.88	0.3106	1.38	0.4162	1.88	0.4699	2.78	0.4973
39	0.1517	0.89	0.3133	1.39	0.4177	1.89	0.4706	2.80	0.4974
40	0.1554	0.90	0.3159	1.40	0.4192	1.90	0.4713	2.82	0.4976

X	Φ (*x*)	X	Φ (*x*)	X	Φ (*x*)	X	Φ (*x*)	X	Φ (*x*)
41	0.1591	0.91	0.3186	1.41	0.4207	1.91	0.4719	2.84	0.4977
42	0.1628	0.92	0.3212	1.42	0.4222	1.92	0.4726	2.86	0.4979
43	0.1664	0.93	0.3238	1.43	0.4236	1.93	0.4732	2.88	0.4980
44	0.1700	0.94	0.3264	1.44	0.4251	1.94	0.4738	2.90	0.4981
45	0.1736	0.95	0.3289	1.45	0.4265	1.95	0.4744	2.92	0.4982
46	0.1772	0.96	0.3315	1.46	0.4279	1.96	0.4750	2.94	0,4985
47	0.1808	0.97	0.3340	1.47	0.4292	1.97	0.4756	2.96	0.4985
0.48	0.1884	0.98	0.3365	1.48	0.4306	1.98	0.4761	2.98	0.4986
0.49	0.1879	0.99	0.3389	1.49	0.4319	1.99	0.4767	3.00	0.49865
								3.20	0.49931
								3.40	0.49966
								3.60	0.499841
								3.62	0.499928
								4.00	0.499468
								4.50	0.499997
								5.00	0.499997

Додаток 3

ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ПУАССОНА

$$P_m(\lambda) = \frac{a^{\lambda}}{m!} e^{-\lambda}$$

λ / m	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	0.904837	0.818731	0.740818	0.670320	0.065310	0.548812	0.496585	0.449329	0.406570
1	090484	163746	222245	268128	303265	329287	347610	359463	365913
2	004524	016375	033337	353626	065816	098786	121663	143785	164661
3	000151	001092	003334	007150	012636	019757	028388	038343	049398
4	000004	000055	000250	000715	001580	002764	004968	007669	011115
5		000002	000015	000057	000158	000356	000696	001227	002001
6			000001	000004	000013	000036	000081	000164	000300
7					000001	000003	000008	000019	000039
8							000001	000002	000004

λ / m	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.367879	0.135335	0.49787	0.018316	0.006738	0.002479	0.000912	0.000335	0.000123
1	367879	270671	149361	073263	033690	014873	006383	002684	001111
2	183940	270671	224042	146525	084224	044618	022341	010735	004998
3	061313	180447	224042	195367	140374	089235	052129	028626	014994
4	015328	090224	168031	195367	175467	133853	091226	057252	033737
5	003066	036089	100819	156293	175467	160623	127717	091604	060727
6	000511	012030	050409	104196	146223	160623	149003	122138	091090
7	000073	003437	021604	059540	104445	137677	149003	139587	117126
8	000009	000859	008102	029770	065278	103258	130377	138587	131756
9	000001	000191	002701	013231	036266	068838	101405	124077	131756
10		000038	000810	005292	018138	041303	070983	099262	118580
11		000007	000221	001295	008242	022529	045171	072190	097020
12		000001	000055	000642	003434	011264	026350	048127	072765
13			000013	000197	001321	005199	014188	029616	050376
14			000003	000056	000472	002228	007094	016924	Q32384
15			000001	000015	000157	000891	003311	009026	019431
16				000004	000049	000334	001448	004513	010930
17				000001	000014	000118	000596	002124	005786
18					000004	000039	000232	000944	002893
19					000001	000012	000085	000397	001370
20						000004	000030	000159	000617
21						000001	000010	000061	000264
22							000003	000022	000108
23							000001	000008	000042
24								000003	000016
25								000001	000006
26									000002
27									000001

Навчально-методичне видання

Фриз *Ірина Василівна*
Волонтир *Людмила Олексіївна*

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА В ПРОГРАМНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

ЧАСТИНА 1

Методичні рекомендації для виконання лабораторних робіт для здобувачів ОС «Бакалавр» спеціальності 122 Комп'ютерні науки

Редактор О. А. Солдатова
Технічний редактор Т. О. Важеніна-Гопрак

Підписано до друку 09.12.2024.
Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Друк – цифровий. Умовн. друк. арк. 5,34.
Тираж 30. Зам. 48.

Донецький національний університет імені Василя Стуса
21021, м. Вінниця, 600-річчя, 21.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК № 5945 від 15.01.2018