

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ І ПРИКЛАДНИХ ТЕХНОЛОГІЙ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

**О. М. ДАНИЛЬЧУК, Л. П. ПОЛОВЕНКО**

## **ВИЩА МАТЕМАТИКА**

*Методичні вказівки до організації та планування  
самостійної роботи студентів (частина I)*

**для студентів денної та заочної форм навчання**

**Вінниця  
ДонНУ імені Василя Стуса  
2020**

УДК 51(075.4)  
Д 183

*Затверджено на засіданні вченої ради  
факультету інформаційних і прикладних технологій  
(протокол № 3 від 27.11.2019 р.)*

**Рецензенти:** *Н. В. Добровольська, канд. пед. наук, доцент;  
С. М. Марущак, канд. екон. наук, доцент.*

**Данильчук О. М., Половенко Л. П.**

**Д 183** *Вища математика: методичні вказівки до організації та планування  
самостійної роботи студентів (частина I) (для студентів денної та  
заочної форм навчання) / укладачі: О. М. Данильчук, Л. П. Половенко.  
Вінниця: ДонНУ імені Василя Стуса, 2020. 185 с.*

У методичних рекомендаціях викладено найбільш характерні для модульної системи форми та методи організації й планування самостійної роботи з вищої математики. Цими рекомендаціями студент може користуватися під час слухання лекцій, складання конспектів-схем, підготовки до практичних занять, змістових модулів, іспитів та заліків, опорних конспектів до розділів «Лінійна алгебра», «Аналітична геометрія», «Вступ до математичного аналізу». Крім того, для самостійного опрацювання до кожного з розділів додаються опитувальні листи (до лекційних та практичних занять), зразки виконання домашніх контрольних робіт, тести до атестаційного контролю та автоматизоване рецензування задач.

УДК 51(075.4)

© Данильчук О. М., 2020  
© Половенко Л. П., 2020  
© ДонНУ імені Василя Стуса, 2020

# ЗМІСТ

|                                                                                           |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>ВСТУП.....</b>                                                                         | <b>5</b>  |
| <b>1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ .....</b>                                                        | <b>6</b>  |
| 1.1. Зміст дисципліни .....                                                               | 6         |
| 1.2. Уміння, на формування яких націлене навчання .....                                   | 7         |
| <b>2. СТИСЛА РОБОЧА ПРОГРАМА (І семестр).....</b>                                         | <b>9</b>  |
| 2.1. Тематика лекцій.....                                                                 | 9         |
| 2.2. Тематика практичних занять.....                                                      | 11        |
| 2.3. Питання для самоперевірки .....                                                      | 13        |
| <b>3. АНОТАЦІЇ РЕКОМЕНДОВАНИХ ПІДРУЧНИКІВ ТА<br/>    МЕТОДИЧНИХ ПОСІБНИКІВ .....</b>      | <b>15</b> |
| <b>4. ВИДИ ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ.....</b>                                        | <b>17</b> |
| 4.1. Види організації самостійної роботи у процесі проведення занять .....                | 17        |
| 4.1.1. Лекційні заняття .....                                                             | 17        |
| 4.1.2. Практичні заняття.....                                                             | 18        |
| <b>5. ОПОРНІ КОНСПЕКТИ ЛЕКЦІЙ.....</b>                                                    | <b>26</b> |
| 5.1. Опорний конспект лекцій в таблицях на тему «Визначники».....                         | 26        |
| 5.2. Опорний конспект лекцій в таблицях на тему «Матриці».....                            | 30        |
| 5.3. Опорний конспект лекцій в таблицях на тему «Системи<br>алгебраїчних рівнянь».....    | 37        |
| 5.4. Опорний конспект лекцій в таблицях на тему «Векторна алгебра» .....                  | 41        |
| 5.5. Опорний конспект лекцій в таблицях на тему «Аналітична геометрія» ..                 | 48        |
| 5.6. Опорний конспект лекцій в таблицях на тему «Вступ до<br>математичного аналізу» ..... | 67        |
| 5.7. Опорний конспект лекцій в таблицях на тему «Теорія границь» .....                    | 74        |
| <b>6. ОПИТУВАЛЬНІ ЛИСТИ (допуск до лекцій) .....</b>                                      | <b>83</b> |
| <b>7. САМОСТІЙНІ ДОМАШНІ РОБОТИ.....</b>                                                  | <b>91</b> |
| <b>8. КОРЕКЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ.....</b>                                                | <b>93</b> |
| <b>9. ТЕСТИ ДО АТЕСТАЦІЙНОГО КОНТРОЛЮ .....</b>                                           | <b>94</b> |

|                                      |            |
|--------------------------------------|------------|
| <b>10. ЗАПИТАННЯ ДО ІСПИТУ .....</b> | <b>109</b> |
| <b>11. ДОДАТКИ .....</b>             | <b>112</b> |
| ДОДАТОК А .....                      | 112        |
| ДОДАТОК Б.....                       | 136        |
| ДОДАТОК В .....                      | 169        |
| ДОДАТОК Г.....                       | 170        |

## ВСТУП

Самостійне навчання передбачає активне засвоєння знань і свідоме користування ними: осмислене читання підручника, додаткової літератури, застосування інформаційних засобів навчання, розкриття змісту спеціальних термінів і понять, точне їх визначення, доведення тих чи інших положень при розв'язуванні задач та під час відповідей на поставлені запитання. Запропоновані методичні вказівки з «Вищої математики» призначенні для поглибленого самостійного опрацювання студентом курсу і самоперевірки своїх знань.

Методичні рекомендації розроблені з метою забезпечення єдиного підходу до організації та планування самостійної роботи до розділів «Лінійна алгебра», «Аналітична геометрія», «Вступ до математичного аналізу».

Нами передбачене застосування таких завдань.

- З метою полегшення сприйняття та конспектування навчального матеріалу студентам заздалегідь для попереднього ознайомлення видаються конспекти-схеми або опорні конспекти лекцій в електронному вигляді (до кожного розділу – відповідний конспект). Студентам в процесі лекцій або в позаурочний час необхідно доповнити ці конспекти-схеми для власного користування.
- Опрацювання опитувальних листів до лекцій для перевірки знань теоретичного матеріалу, що пропонуються або на початку лекції для активізації розумової діяльності, або наприкінці лекції для перевірки усвідомленого сприйняття матеріалу.
- Активна участь під час лекцій, для чого є необхідним домашнє опрацювання літератури та підготовка відповідей на контрольні запитання, що можуть пропонуватися на початку лекції.
- Опрацювання опитувальних листів до практичних занять для перевірки знань практичного матеріалу, що пропонуються на початку практичних занять для активізації розумової діяльності.
- Активна підготовка до практичних занять, на яких застосовуються методи та форми евристичного навчання.
- Виконання домашніх контрольних робіт за зразком.
- Автоматизоване рецензування задач, що пропонуються в домашніх контрольних роботах.
- Підготовка до атестаційного тестування з використанням завдань для самоперевірки у вигляді тестів та контрольних запитань, які самостійно опрацьовуються із застосуванням літератури та засобів мережі Інтернет.

# 1. ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

## 1.1. Зміст дисципліни

**Метою** вивчення навчальної дисципліни є: розвиток аналітичного мислення, озброєння знаннями з основних розділів вищої математики; надання студентам теоретичної бази і навичок із застосування математичного апарату для дослідження математичних процесів, медико-біологічних, аналізу та обробки даних, а також формування теоретичного підґрунтя для вивчення ряду курсів, які тісно пов'язані з вищою математикою (фізика, інформатика та інформаційні технології, облік та обробка даних, статистика, хімія, математичні методи в екології, біології та медицині та ін.); відповідними вміннями застосування знань до вивчення фахових дисциплін спеціальності, вміння складати математичні моделі процесів і конструкцій, пов'язаних з діяльністю фахівців, вивчення моделей, інтерпретація результатів.

**Зміст дисципліни:** лінійна і векторна алгебра, диференціальне та інтегральне числення, аналітична геометрія, функції однієї змінної, диференціальні рівняння, функції декількох змінних, ряди, теорія ймовірностей та математична статистика.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен набути таких **результатів навчання:**

1. Виконання дій над матрицями, знаходження оберненої матриці.
2. Розрізнення геометричних образів кривих і поверхонь другого порядку.
3. Формування системи знань і умінь, пов'язаних з поданням інформації за допомогою математичних засобів.
4. Актуалізація міжпредметних знань, що сприяють розумінню особливостей подання та обробки інформації засобами математики.
5. Уявлення про комплексні числа, похідну та розв'язування рівнянь вищих порядків.
6. Ознайомлення з основними математичними моделями і типовими для області математики, документознавства та інформаційних технологій завданнями їхнього використання.
7. Вміння застосовувати набуті знання під час обчислення визначених та невизначених інтегралів.
8. Забезпечення умов для активізації пізнавальної діяльності студентів та формування у них досвіду математичної діяльності під час розв'язання прикладних завдань, специфічних для області їхньої професійної діяльності.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен **знати:**

- координатні і векторні методи, методи знаходження коренів систем лінійних рівнянь за допомогою елементів лінійної алгебри;

- що таке похідна, інтегральне і диференціальне числення, особливості їхнього застосування при розв'язуванні задач;
- ефективність використання цих методів та особливості застосовування їх до задач за зразком, типових та нових задач;
- лінійну алгебру, векторну геометрію, інтегральне і диференціальне числення та їхні зв'язки з іншими розділами математики.

**вміти:**

- розв'язувати задачі з доведенням розв'язку до практичного результату і розвивати на цій основі логічне та алгоритмічне мислення;
- математично досліджувати прикладні задачі і розвивати необхідну інтуїцію в питаннях застосування математики;
- оперувати математичним апаратом, пов'язаним з майбутньою спеціальністю, і під час розв'язування задач обирати і використовувати необхідні обчислювальні методи і засоби;
- отримувати знання щодо складання адекватних моделей і визначення умов їхнього застосування до біолого-екологічних досліджень.

## **1.2. Уміння, на формування яких націлене навчання**

*Навчально-організаційні уміння:*

1. Сприймати, ставити навчальну задачу, планувати діяльність.
2. Раціонально виконувати завдання.
3. Прогнозувати результати роботи.
4. Здійснювати самоконтроль і самооцінку.
5. Керувати роботою групи.

*Навчально-евристичні уміння:*

1. Спостереження явищ у плані логічних та математичних категорій.
2. Аналіз фактів, сприйняття їх через призму математичних відношень.
3. Виділення об'єктів, важливих для пошуку розв'язання задачі.
4. Урахування та співвіднесення всіх даних задачі між собою та з вимогами задачі, з'ясування їхньої узгодженості та суперечливості.
5. Висування різних припущень з обґрунтуванням їхніх можливостей (гіпотези), передбачення результатів.
6. Формулювання узагальненого принципу, що пояснює суть задачі.
7. З'ясування узагальненого принципу дії.
8. Переформулювання ідей у різних варіантах.
9. Побудова варіантів плану дії, розв'язання.
10. Переведення узагальнених схем дії у конкретні операції.
11. Пошук асоціацій у зв'язку з об'єктом задачі.
12. Відшукування нових функцій одного і того ж об'єкта.
13. Співвіднесення кроків пошуку розв'язання між собою та з питанням задачі.

14. Комбінування відомих прийомів та способів з іншими.
15. Формулювання висновків.
16. Доведення кожного висновку.
17. Прагнення до вичерпності всіх можливих висновків відповідно до питань евристичної задачі.
18. Перевірка розв'язання та його відповідності вимозі задачі.
19. Перевірка правильності дій, що виконуються.
20. Перевірка повноти та достатності доведень.
21. Оцінка значень дій.
22. Зіставлення результатів з еталонними, нормативними.

*Навчально-комунікативні уміння:*

1. Уміння володіти монологічним мовленням: повідомлення, розповідь, тематична відповідь, у тому числі з використанням міжпредметних зв'язків, доповідь, повідомлення інформаційні та проблемні, реферат.
2. Оволодіння діалогічним, монологічним і полілогічним мовленням, участь у творчому обміні думками і дискусії.

## 2. СТИСЛА РОБОЧА ПРОГРАМА (I семестр)

### 2.1. Тематика лекцій

| № з/п                                                | Найменування теми лекцій                                                                                                                                | Назва вмінь, що формуються                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1                                                    | 2                                                                                                                                                       | 3                                                                                                                                                                     |
| <b>Лінійна алгебра</b>                               |                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                       |
| 1                                                    | Визначники. Властивості визначників. Обчислення визначників                                                                                             | обчислювати визначники 2-го і 3-го порядків різними способами                                                                                                         |
| 2                                                    | Визначники вищих порядків                                                                                                                               | знаходити найбільш раціональні методи обчислення визначників                                                                                                          |
| 3                                                    | Матриці та дії над ними. Обернена матриця                                                                                                               | працювати з матрицями, розуміти, чим вони відрізняються від визначників і де застосовуються                                                                           |
| 4                                                    | Системи лінійних рівнянь. Правило Крамера. Метод Гауса. Розв'язання систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці                              | з великої кількості властивостей, що характеризують реальний об'єкт або процес, відокремлювати та розглядати невелику кількість властивостей, абстрагуючись від інших |
| 5                                                    | Застосування елементів лінійної алгебри                                                                                                                 | розглянути задачі, які безпосередньо стосуються професійної діяльності                                                                                                |
| <b>Векторна алгебра</b>                              |                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                       |
| 6                                                    | Означення векторів, операції над векторами, їхні властивості                                                                                            | здійснювати самоконтроль та самооцінку                                                                                                                                |
| 7                                                    | Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів. Властивості та застосування                                                                           | навчитися застосовувати добутки векторів при розв'язуванні задач                                                                                                      |
| <b>Аналітична геометрія на площині та в просторі</b> |                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                       |
| 8.                                                   | Системи координат: прямокутна, циліндрична, сферична                                                                                                    | застосовувати загальні евристичні прийоми основних розумових дій                                                                                                      |
| 9                                                    | Рівняння лінії 1-го порядку на площині. Види рівнянь прямої на площині                                                                                  | застосовувати допоміжні побудови; переходити від однієї форми рівняння до інших                                                                                       |
| 10                                                   | Пряма на площині її рівняння та розташування. Полярна система координат. Умови паралельності та перпендикулярності прямих. Відстань від точки до прямої | розуміти формули та застосовувати їх під час розв'язання типових задач; застосовувати специфічні прийоми: підведення під поняття й одержання наслідків                |
| 11.                                                  | Криві 2-го порядку                                                                                                                                      | будувати криві                                                                                                                                                        |
| 12                                                   | Прямокутна система координат у просторі                                                                                                                 | здійснювати перехід до рівносильної задачі                                                                                                                            |

|                                                       |                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                        |
|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 13                                                    | Полярна система координат. Рівняння прямої, площини                                                                                                                | застосовувати специфічні прийоми: підведення під поняття й одержання наслідків                                                                                                         |
| 14                                                    | Площина і пряма лінія в просторі. Відстань між прямою та площиною, між прямими, між площинами. Умови паралельності та перпендикулярності прямих і площин           | застосовувати специфічні евристичні орієнтири: намалювати, розглянути декілька моделей задачі, знайти зв'язок між ними                                                                 |
| 15                                                    | Поверхні другого порядку                                                                                                                                           | будувати поверхні 2 порядку                                                                                                                                                            |
| 16                                                    | Застосування аналітичної геометрії при розв'язанні прикладних задач                                                                                                | навчитися застосовувати елементи аналітичної геометрії під час розв'язування задач прикладного спрямування                                                                             |
| <b>Диференціальне числення функцій однієї змінної</b> |                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                        |
| 17                                                    | Функція. Область її визначення. Способи задання. Основні елементарні функції, їхні властивості і графіки                                                           | аналізувати і систематизувати існуючі знання, робити узагальнені висновки                                                                                                              |
| 18                                                    | Границя числової послідовності. Границя функції неперервного аргументу. Точки розриву функції першого і другого роду. Неперервність функції в точці та на відрізку | застосовувати спеціальні базові евристичні розв'язання задач: розбиття складної задачі на підзадачі; вміння розрізняти точки розриву першого і другого роду, знаходити стрибок функції |
| 19                                                    | Нескінченно малі та нескінченно великі функції                                                                                                                     | переходити від нескінченно малих до нескінченно великих і навпаки; застосовувати їх                                                                                                    |
| 20                                                    | Задачі, що приводять до поняття похідної. Означення, геометричний зміст. Таблиця похідних. Правила диференціювання. Знаходження похідних різних видів              | використовувати правила обчислення похідних під час розв'язування задач                                                                                                                |
| 21                                                    | Схема дослідження функції за допомогою похідної                                                                                                                    | здійснювати повне дослідження функції                                                                                                                                                  |
| 22                                                    | Застосування диференціального числення функцій однієї змінної під час розв'язування прикладних задач                                                               | застосовувати похідну під час розв'язування задач математичного циклу, інтерполяції щодо обробки експериментальних залежностей у хімії, екології та біохімії                           |

## 2.2. Тематика практичних занять

| № з / п                                              | Найменування теми лекцій                                                                                                                                 | Назва вмінь, що формуються                                                                                                                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1                                                    | 2                                                                                                                                                        | 3                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <b>Лінійна алгебра</b>                               |                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 1                                                    | Обчислення визначників. Обчислення визначників вищих порядків                                                                                            | обчислювати визначники 2-го і 3-го порядків різними способами; обчислювати визначники вищих порядків; знаходити раціональний метод обчислення визначників                                                                                                           |
| 2                                                    | Дії над матрицями. Знаходження оберненої матриці                                                                                                         | додавати, віднімати, множити матриці; знаходити обернені матриці двома способами                                                                                                                                                                                    |
| 3                                                    | Система лінійних рівнянь. Правило Крамера                                                                                                                | вміти розв'язувати системи рівнянь за правилом Крамера                                                                                                                                                                                                              |
| 4                                                    | Розв'язання систем лінійних рівнянь за допомогою метода Гауса                                                                                            | вміти розв'язувати системи рівнянь за допомогою методу Гауса                                                                                                                                                                                                        |
| 5                                                    | Розв'язання систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці                                                                                       | вміти розв'язувати системи рівнянь за допомогою оберненої матриці                                                                                                                                                                                                   |
| <b>Векторна алгебра</b>                              |                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 6                                                    | Вектори, операції над векторами, їхні властивості. Системи координат                                                                                     | вміти користуватися правилами трикутника та паралелограма під час арифметичних дій з векторами; аналізувати та знаходити раціональні шляхи розв'язання завдань; будувати фігури у різних системах координат; вміти переходити від однієї до іншої системи координат |
| 7                                                    | Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів. Властивості та застосування                                                                            | засвоїти основні поняття та формули добутків; вміти вміло застосовувати набуті знання під час розв'язування задач прикладного змісту                                                                                                                                |
| <b>Аналітична геометрія на площині та в просторі</b> |                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 8                                                    | Рівняння лінії 1-го порядку на площині. Види рівнянь прямої на площині                                                                                   | записувати рівняння прямої у різних формах та вміло їх застосовувати                                                                                                                                                                                                |
| 9                                                    | Пряма на площині, її рівняння та розташування. Полярна система координат. Умови паралельності та перпендикулярності прямих. Відстань від точки до прямої | вміти використовувати геометричну складову під час розв'язування задач                                                                                                                                                                                              |

|                                                       |                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 10                                                    | Криві 2-го порядку. Еліпс, гіпербола, парабола                                                                                                        | будувати криві 2 порядку, та вміти застосовувати їхні числові характеристики під час розв'язування задач                                                                                                                |
| 11                                                    | Прямокутна система координат у просторі. Полярна система координат. Рівняння прямої, площини                                                          | розвивати просторову уяву, абстрактне мислення; складати рівняння площини та прямої, що задані в різних системах координат; вміти застосовувати та аналізувати формули під час розв'язування задач                      |
| 12                                                    | Поверхні другого порядку: сфера, еліпсоїд, циліндр, гіперболоїд, параболоїд                                                                           | будувати поверхні 2 порядку; вміти застосовувати числові характеристики до даних поверхонь                                                                                                                              |
| 13                                                    | Застосування аналітичної геометрії під час розв'язування прикладних задач                                                                             | застосовувати елементи аналітичної геометрії під час розв'язування задач прикладного спрямування                                                                                                                        |
| <b>Диференціальне числення функцій однієї змінної</b> |                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                         |
| 14                                                    | Обчислення ОДЗ функцій. Поняття функції. Класифікація функцій. Поняття послідовності                                                                  | знаходити область визначення функцій; знати графіки основних елементарних функцій                                                                                                                                       |
| 15                                                    | Обчислення границь числової послідовності                                                                                                             | обчислювати границі числових послідовностей                                                                                                                                                                             |
| 16                                                    | Обчислення границі функції неперервного аргументу. Неперервність функції в точці та на відрізку                                                       | обчислювати границі функцій, позбавлятися невизначеностей; аналізувати та досліджувати функції на неперервність                                                                                                         |
| 18                                                    | Точки розриву функції першого і другого роду. Дії над нескінченно малими та нескінченно великими функціями                                            | розрізняти точки розриву першого і другого роду, знаходити стрибок функції; обчислювати границі за допомогою таблиць еквівалентних величин; раціонально та ефективно використовувати формули під час обчислення границь |
| 19                                                    | Задачі, що приводять до поняття похідної. Означення, геометричний зміст. Таблиця похідних. Правила диференціювання. Знаходження похідних різних типів | застосовувати таблицю похідних під час розв'язування задач; знаходити границі функцій, використовуючи правило Лопіталя                                                                                                  |
| 20                                                    | Дослідження функції за допомогою похідної                                                                                                             | проводити повне дослідження функції, використовуючи різні методи та шляхи, а саме: аналітично, геометрично та таблично                                                                                                  |
| 21                                                    | Застосування похідної під час розв'язування прикладних задач                                                                                          | знаходити та використовувати похідні під час розв'язання задач прикладного спрямування                                                                                                                                  |

### 2.3. Питання для самоперевірки

| №<br>з / п              | Зміст питань для самоперевірки                                                                       |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Лінійна алгебра</b>  |                                                                                                      |
| 1                       | Що називається детермінантом?                                                                        |
| 2                       | Чим обумовлений порядок визначника?                                                                  |
| 3                       | Як називаються величини, що входять до визначника?                                                   |
| 4                       | Що означають індекси елементів?                                                                      |
| 5                       | Що називається транспонуванням визначника?                                                           |
| 6                       | Які властивості визначників Вам відомі?                                                              |
| 7                       | Дати означення мінору елемента.                                                                      |
| 8                       | Дати означення алгебраїчного доповнення елемента.                                                    |
| 9                       | Сформулювати правило розкриття визначників 2 порядку.                                                |
| 10                      | Перерахувати методи розкриття визначників 3 порядку.                                                 |
| 11                      | Як обчислити визначники вищих порядків?                                                              |
| 12                      | Дати означення матриці.                                                                              |
| 13                      | Чим відрізняються матриці від визначників?                                                           |
| 14                      | Чи можна матрицю обчислити?                                                                          |
| 15                      | Які види матриць існують?                                                                            |
| 16                      | Які дії над матрицями існують?                                                                       |
| 17                      | Чи завжди існує добуток матриць?                                                                     |
| 18                      | Які характерні властивості матриць Вам відомі?                                                       |
| 19                      | Чи завжди існує обернена матриця?                                                                    |
| 20                      | Як знайти обернену матрицю?                                                                          |
| 21                      | Дати означення системи лінійних алгебраїчних рівнянь.                                                |
| 22                      | Які види систем Вам відомі?                                                                          |
| 23                      | У чому сутність методу Крамера?                                                                      |
| 24                      | У чому сутність методу Гауса?                                                                        |
| 25                      | У чому сутність методу оберненої матриці?                                                            |
| 26                      | Перерахувати переваги та недоліки методу Крамера.                                                    |
| 27                      | Перерахувати переваги та недоліки методу Гауса.                                                      |
| 28                      | Перерахувати переваги та недоліки методу оберненої матриці.                                          |
| 29                      | Який із методів є більш загальним: метод Гауса чи правило Крамера? Обґрунтуйте.                      |
| 30                      | Як виявити, згідно за правилом Крамера, чи є система сумісною, несумісною, визначеною, невизначеною? |
| <b>Векторна алгебра</b> |                                                                                                      |
| 1                       | Що називається вектором?                                                                             |
| 2                       | Які дії над векторами Вам відомі?                                                                    |
| 3                       | Які вектори називаються колінеарними?                                                                |
| 4                       | Які вектори називаються компланарними?                                                               |
| 5                       | Що називається скалярним добутком векторів?                                                          |
| 6                       | Де застосовується скалярний добуток векторів?                                                        |

|                                                       |                                                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 7                                                     | Дати означення векторного добутку векторів.                                                                                                             |
| 8                                                     | Де застосовується векторний добуток векторів?                                                                                                           |
| 9                                                     | Дати означення мішаного добутку векторів.                                                                                                               |
| 10                                                    | Де застосовується мішаний добуток векторів?                                                                                                             |
| <b>Аналітична геометрія на площині та в просторі</b>  |                                                                                                                                                         |
| 1                                                     | Які системи координат Вам відомі?                                                                                                                       |
| 2                                                     | Які види рівнянь прямої на площині Вам відомі?                                                                                                          |
| 3                                                     | Які криві 2 порядку існують?                                                                                                                            |
| 4                                                     | Що Ви знаєте про полярну систему координат?                                                                                                             |
| 5                                                     | Як поділити відрізок в даному відношенні?                                                                                                               |
| 6                                                     | Які види рівнянь прямої в просторі Вам відомі?                                                                                                          |
| 7                                                     | Які поверхні 2 порядку існують?                                                                                                                         |
| 8                                                     | Що Ви знаєте про полярну систему координат?                                                                                                             |
| 9                                                     | Які види рівнянь площини в просторі Вам відомі?                                                                                                         |
| 10                                                    | Як знайти відстань між прямими?                                                                                                                         |
| 11                                                    | Як знайти відстань між прямою і площиною?                                                                                                               |
| 12                                                    | Як знайти відстань між площинами?                                                                                                                       |
| <b>Диференціальне числення функцій однієї змінної</b> |                                                                                                                                                         |
| 1                                                     | Дати означення функції.                                                                                                                                 |
| 2                                                     | Які обмеження є для області визначення функцій?                                                                                                         |
| 3                                                     | Дати означення границі числової послідовності.                                                                                                          |
| 4                                                     | Дати означення границі функції неперервного аргументу.                                                                                                  |
| 5                                                     | Які невизначеності існують?                                                                                                                             |
| 6                                                     | Яка теорема дає змогу позбутися невизначеностей?                                                                                                        |
| 7                                                     | Як дослідити функцію на неперервність в точці?                                                                                                          |
| 8                                                     | Як дослідити функцію на неперервність на відрізку?                                                                                                      |
| 9                                                     | Які точки розриву функцій Вам відомі?                                                                                                                   |
| 10                                                    | Чи можна усунути розрив першого роду?                                                                                                                   |
| 11                                                    | Чи можна усунути розрив другого роду?                                                                                                                   |
| 12                                                    | Які чудові границі Ви знаєте?                                                                                                                           |
| 13                                                    | Коли використовують шкалу нескінченно малих функцій?                                                                                                    |
| 14                                                    | У чому полягає геометричний та фізичний зміст похідної?                                                                                                 |
| 15                                                    | Які формули знаходження похідної показникової, логарифмічної, степеневі, степенєво-показникової, тригонометричної та обернено-тригонометричної функцій? |
| 16                                                    | Які умови зростання та спадання функцій?                                                                                                                |
| 17                                                    | Що є необхідною і достатньою умовою існування екстремуму?                                                                                               |
| 18                                                    | Які достатні умови існування опуклості функції?                                                                                                         |
| 19                                                    | Яка необхідна і достатня умова існування точки перегину функції?                                                                                        |
| 20                                                    | Сформулювати рівняння та властивості асимптоти функції?                                                                                                 |
| 21                                                    | Які існують способи задання функцій?                                                                                                                    |

### 3. АНОТАЦІЇ РЕКОМЕНДОВАНИХ ПІДРУЧНИКІВ ТА МЕТОДИЧНИХ ПОСІБНИКІВ

**Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М.**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА:** підручник. У 2-х ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко; за заг. ред. П. П. Овчинникова; пер. з рос. П. М. Юрченка. 2-ге вид., стереотип. Київ: Техніка, 2000. 592 с.

Розглянуто основні розділи вищої математики. Узагальнено досвід застосування дидактичних методів і прийомів з метою активізації розумової діяльності студентів під час вивчення курсу математики. Виклад теорії супроводжується прикладами розв'язання задач. З метою закріплення навчального матеріалу пропонуються завдання для самостійної роботи. Особливість підручника – в узагальненому підході до формулювання і доведення основних методів аналітичної геометрії, лінійної алгебри і математичного аналізу. Для студентів технічних вищих навчальних закладів.

**Соколенко О. І.**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА:** підручник. Київ: «Академія», 2003. 432 с.

Підручник відповідає програмам з вищої математики для студентів нематематичних спеціальностей вищих навчальних закладів. У ньому розглянуто елементи аналітичної геометрії та математичного аналізу, а також теорії ймовірностей і математичної статистики. Більшість тверджень подано з доведенням. А приклади і вправи, маючи здебільшого ілюстративний характер, передусім потребують пошукового, творчого підходу.

**Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О.**

**ВИЩА МАТЕМАТИКА.** Приклади і задачі. Посібник для студентів нематематичних спеціальностей вищих навчальних закладів. Київ: Техніка, 2000. 592 с.

Посібник охоплює всі основні розділи курсу вищої математики: елементи математичного аналізу, вищої алгебри, аналітичної геометрії, теорії ймовірностей і математичної статистики. Кожен параграф містить стисло викладений теоретичний матеріал, проілюстрований багатьма прикладами, рисунками, зразками розв'язування типових вправ. Обов'язковий елемент – задачі для самостійного розв'язування, серед яких є вправи для перевірки теоретичного матеріалу.

**ВИЩА МАТЕМАТИКА:** зб. задач: у 2-х ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення: навч. посіб. для студентів ВТНЗ / Х. І. Гаврильченко, С. П. Полушкін, П. С. Кропив'янський та ін.; за заг. ред. П. П. Овчинникова. Київ: Техніка, 2003. 279 с.; іл.

Вміщено задачі і вправи з вищої математики для самостійної роботи студентів, наведено приклади розв'язання типових задач, а до решти надані відповіді.

**Запорожец Г. И.**

**РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ.** Москва: Высшая школа, 1996. 460 с.

Посібник призначений для студентів вищих навчальних закладів і особливо для тих, хто самостійно вивчає математичний аналіз і бажає отримати необхідні навички в розв'язанні задач. Зміст відповідає програмі з математичного аналізу для машинобудівельних, енергетичних, будівельних, технологічних, механічних, спеціальностей.

**Шнейдер В. Е., Слуцкий А. И., Шумов А. С.**

**КРАТКИЙ КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ:** учеб. пособ. для втузов. Москва: Высшая школа, 1992. 640 с.

Навчальний посібник призначено для студентів вищих технічних навчальних закладів. Він охоплює матеріал, передбачений обов'язковою програмою. Достатня кількість розв'язаних прикладів і задач сприяє кращому засвоєнню теоретичного матеріалу.

**Каплан И. А.**

**ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ:** (Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. Дифференциальное исчисление функций одной и многих переменных). Харьков: ХГУ, 1990. 576 с.

Навчальний посібник призначено для студентів вищих технічних навчальних закладів. Вміщено задачі і вправи з вищої математики для самостійної роботи студентів, наведено приклади розв'язування типових задач, а до решти надані відповіді.

**Лосева Н. М.**

**АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ В ІНТЕРАКТИВНІЙ ФОРМІ: ПРАКТИЧНИЙ КУРС:** навч. посіб. для студентів / Н. М. Лосева, Д. Є. Губар. Київ: Кафедра, 2014. 236 с.

Посібник містить теоретичний матеріал з дисципліни у вигляді опорних конспектів, тестів актуалізації знань, приклади розв'язування базових задач, задачі прикладного змісту, контрольні питання, детальні інструкції до лабораторних робіт, вправи з використанням можливостей сучасних педагогічних програмних засобів, завдання для розвитку творчого потенціалу, а також цікаві факти з навчальної дисципліни.

**Лосева Н. М.**

**ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ З КУРСУ «АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ»:** навч.-метод. посіб. / Н. М. Лосева, Д. Є. Терменжи, В. Є. Пузирьов. Вінниця: ДонНУ, 2015. 60 с.

Навчально-методичний посібник містить 20 варіантів індивідуальних завдань з курсу аналітичної геометрії. Наведено приклади розв'язання деяких завдань. Самостійна робота студента за навчально-методичним посібником також передбачає використання авторського інтерактивного порталу «Аналітична геометрія»: [www.agportal.org.ua](http://www.agportal.org.ua)

## 4. ВИДИ ОРГАНІЗАЦІЇ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

### 4.1. Види організації самостійної роботи у процесі проведення занять

#### 4.1.1. Лекційні заняття

Студентам заздалегідь (для попереднього ознайомлення з метою полегшення сприйняття та конспектування навчального матеріалу) видаються опорні конспекти лекцій або лекції в таблицях, де тезово, в стислому вигляді пропонується лекційний матеріал (наводиться нижче). Студенти у процесі лекцій або в позаурочний час мають можливість доповнювати свої лекції, а також перевіряти рівень засвоєння матеріалу шляхом закриття однієї сторони конспекту.

Сучасна дидактика і особливості соціальної діяльності вимагають урізноманітнення класичної лекції, бо вона спрямована на просте інформування, передавання готових знань шляхом монологічної форми спілкування. Лекції посідають значне місце у навчальному процесі на всіх рівнях освіти, хоча їхня кількість різко зменшилася у навчальних планах. У зв'язку з цим від педагогів вимагається творче ставлення до них. Лекція, що відповідає сучасним дидактичним і виховним цілям, повинна формувати інтерес і прагнення до навчання, наблизити навчальний процес до умов професійної діяльності, сприяти обмінові знаннями, досвідом і почуттями. З цією метою використовуються певні прийоми і способи активізації лекцій.

**Лекція-бесіда** («діалог з аудиторією») – найбільш поширена й проста форма активного залучення студентів до навчального процесу. Вона передбачає безпосередній контакт педагога з аудиторією, що дає змогу зосередити увагу студентів на найважливіших проблемах теми, яка вивчається, визначити зміст і темп викладу навчального матеріалу з урахуванням рівня підготовленості та освіти аудиторії.

**Евристична лекція** – форма навчання, у якій викладач допомагає студентам у процесі викладання нового матеріалу здобувати нові знання або знаходити нові методи, формулювати проблеми, робити власні відкриття.

Евристичний ефект досягається завдяки сформульованим під час лекції завданням чи проблемам. Наведемо можливі види таких завдань:

1) дати відповідь на декілька питань, які перед лекцією записані на дошці. План лекції також може бути записаний у вигляді запитань. У кінці лекції студенти зачитують свої відповіді та порівнюють їх (приклади питань додаються нижче у пункті «Контрольні запитання»);

2) виявити спільні та відмінні риси між операційними системами, поняттями, програмами, що розглядаються в лекції;

3) самостійно скласти план лекції. У кінці лекції студенти зачитують свої плани та порівнюють їх;

4) сформулювати та поставити свої питання за змістом лекції;

5) заповнити самостійно місця, що замінені крапочками (...) в лекції;

6) зробити власні висновки з лекції;

7) дати відповідь на ряд тестових запитань (опитувальні листи), що пропонуються або на початку лекції для активізації розумової діяльності, або наприкінці лекції для перевірки усвідомленості сприймання матеріалу.

Після конспектів-схем наводяться приклади опитувальних листів з відповідних тем.

Велику увагу на лекціях з вищої математики необхідно звертати на прикладний, професійний аспект навчального матеріалу. Студенти повинні бачити міжпредметні зв'язки та вміти застосовувати отримані знання на практиці.

#### 4.1.2. Практичні заняття

Практичні заняття – важливий етап навчання математиці. Для отримання максимальної користі їхній зміст має узгоджуватися з лекційним матеріалом. Закріплення теоретичних знань, як в результаті обговорення та аналізу лекційного матеріалу, так і за допомогою розв'язування задач, дасть змогу студентам не тільки добре засвоїти матеріал і навчитися застосовувати його на практиці, а й отримати додатковий стимул для активної підготовки до лекцій.

Практичні заняття з вищої математики – це колективна форма діяльності, а тому для них важлива атмосфера доброзичливості, довіри, розкутості, єдності, коли студенти сміливо проголошують свої міркування, усвідомлюють незрозуміле, допомагають один одному.

Зупинимося більш докладно на характеристиці деяких спеціальних евристичних методів, що можна використовувати на різних етапах проведення практичних занять з математичних курсів. Джерелами багатьох із них є методи технічного конструювання.

**Аналогії.** Щоб перебудувати модель, зуміти побачити ситуацію в новому світлі, «родити» свіжу ідею, насамперед потрібно, щоб хоча б деякі думки почали приходити нам у голову. До аналогій звертаються хоча б для того, щоб створити прецедент руху. Розглянутій проблемі знаходять аналогію, а потім подібна ситуація одержує свій власний розвиток. На кожному етапі проміжний результат співвідносять із первинною проблемою. Тим самим проблема розвивається слідом за аналогією.

Наприклад, у математиці ми заміняємо об'єкти символами, а потім виконуємо з ними різні математичні операції. При цьому ми забуваємо, що за цими символами стоїть. Виконавши необхідні дії, перетворюємо символи у вихідні об'єкти і визначаємо, що з ними відбулося. Необхідно зазначити, що використовувати аналогії в евристичній діяльності – далеко не те ж саме, що вести доведення за допомогою аналогій. Роблячи висновок шляхом аналогії, ми, звісно ж, припускаємо, що, оскільки в аналогічній ситуації щось відбувається у певний спосіб, то й в обставинах, що нас цікавлять, повинна повторюватися та ж сама картина.

Використовуючи аналогії в евристичній діяльності, ми переслідуюмо зовсім іншу мету: зрушитися з мертвої точки. Аналогії нам потрібні не для того, щоб щось довести. Ми використовуємо їх лише як стимул.

Наприклад, на практичних заняттях з розділу «Аналітична геометрія» нами була запропонована студентам задача, що пов'язана зі шкільним курсом геометрії: «Дано коло радіуса  $r$  і точка  $A$ , розташована поза колом. Проведіть із точки  $A$  січну до кола таким чином, щоб внутрішня і зовнішня частини січної були рівними».

Зрозуміло, що алгоритму для розв'язання цієї задачі немає. Логічне мислення не дає нам чіткої, обґрунтованої відповіді, тому що ми навіть не знаємо, із чого почати розв'язання цієї задачі, у якому напрямі міркувати. Студенти розпочали пошук можливих варіантів: як провести відрізок січної так, щоб він точкою перетину з колом ділився навпіл? І виникли такі аналогії: відрізок, розділений навпіл, – це, можливо, одна з діагоналей прямокутника, паралелограма, ромба, що, як відомо, точкою перетину діляться навпіл. А можливо, це основа рівнобедреного трикутника, у якому проведена медіана до основи (вона ж і висота, і бісектриса).

Як бачимо, аналогії корисні тим, що виражають різні відношення, які можна потім перенести на поставлену проблему і легше переосмислити її.

**Виклик припущенням.** Під час розв'язування різних проблем ми встановлюємо для себе якісь межі, що самі ж і не наважуємося переступити. Вони значною мірою полегшують розв'язання задачі, тому що звужують зону пошуку. Якщо хтось раптом знаходить розв'язання, вийшовши за зазначені межі, ми обурюємося: «Це – порушення правил». Але межу, звичайно, встановлюємо ми самі. Навіть більше: робимо це лише для власної зручності. Оскільки евристики ринуться перебудовувати будь-який фіксований зразок, їхня задача саме і полягає в тому, щоб кидати виклик усяким вихідним припущенням.

**Метод «від супротивного».** Якщо ми не хочемо сидіти, схрестивши руки, й очікувати, коли ж нас відвідає натхнення, кращий спосіб із чогось почати – відштовхнутися від того, що в нас є. «Коли під час змагань спортсмени допливають до кінця водяної доріжки, вони різко відштовхуються ногами від борта басейну і тим самим збільшують свою швидкість». Застосовуючи метод «від супротивного», ми також різко відштовхуємося ногами від чогось вже існуючого і нам добре знайомого, щоб почати рух в протилежному напрямку.

**«Мозковий штурм»** (А. Осборн). («Мозковий штурм» (brainstorming) вперше був запропонований Алексом Осборном (Alex F. Osborn) наприкінці 30-х рр. минулого століття, спрямований на колективний пошук ідей, розділення процесів генерації і критики в часі). Основна задача методу – збір якнайбільшої кількості ідей внаслідок звільнення учасників обговорення від інерції мислення і стереотипів. При цьому важливо дотримуватися таких вимог:

- 1) свобода висловлення ідей (задач) будь-яким членом групи;
- 2) заборона критикувати запропоновані ідеї (етап критики і добору – попереду);
- 3) свобода комбінації, варіації і доповнення вже запропонованих ідей.

Потім отримані в групах ідеї систематизуються, об'єднуються за загальними принципами і підходами. Далі розглядаються різні перешкоди до реалізації відібраних ідей. Оцінюються критичні зауваження. Відбираються ті ідеї, що не були заперечені критичними зауваженнями і контрідіями.

Пропонуємо декілька результатів мозкового штурму (задач, придуманих студентами), отриманих із такої задачі:

Багатокутна область, задана координатами вершин ламаної, і точка, задана координатами. Як з'ясувати, чи належить точка області?

1. Дана ламана, визначена координатами послідовних вершин. Як з'ясувати, чи належить точка, задана координатами, цій ламаній?

2. У ситуації, описаній в 1), задана пряма своїми рівняннями. Як знайти число точок її перетинання з ламаною?

Метод «мозкового штурму» можна застосовувати не тільки у групах, але й індивідуально, проте можна припустити, що колективне застосування сприяє зростанню ефективності, оскільки передбачає виникнення більшої кількості ідей та більш неупереджене їх обговорення та відбір.

Метод «мозкового штурму» у вищеописаному вигляді застосовується найчастіше, проте він має кілька поширених різновидів:

- зворотна «мозкова атака» / «мозковий штурм» (різновид, спрямований на виявлення недоліків предмета або явища);
- тіньова «мозкова атака» / «мозковий штурм» (різновид, що передбачає наявність «тіньової команди», яка відсторонено аналізує діяльність іншої, відкритої частини команди);
- «корабельна рада» (різновид мозкового штурму за умови гостро обмеженого часу та наявної інформації);
- «мозковий штурм» з оцінкою ідей (перший та другий етапи почергово змінюють один одного кілька разів);
- метод «365» (6 учасників висувають по 3 ідеї за 5 хвилин, після чого учасники обмінюються ідеями).

Є також ціла низка методів психологічної активізації, подібних до методу «мозкового штурму»: метод фокальних об'єктів (або «метод каталогу», «метод випадкових об'єктів»), синектика (метод пошуку нових ідей через аналогії), оператор РЧВ (метод, який базується на таких якостях продукту або явища, як розмір, час, вартість), конференція ідей («творча нарада», «круглий стіл»), метод «гірлянд асоціацій і метафор» (асоціативний, інтуїтивний пошук нових ідей); різноманітні методи систематизованого пошуку.

Це особлива форма роботи, що дає можливість забути на якийсь час про мислення вертикальне, яке не відрізняється гнучкістю. «Мозковий штурм» припускає колективні дії і використовується як відправна точка для розвитку власних ідей. Під час «мозкового штурму» спонукальним поштовхом для нас служить ідея інших людей. Висловлена кимось думка може сприяти появі наших власних ідей. Навіть якщо ми неправильно тлумачимо чиюсь думку, як стимул вона все одно може виявитися дуже корисною.

Недоліком застосування методу «мозкового штурму» загалом є те, що він не гарантує, що буде знайдено оптимальне, єдино правильне рішення проблеми. Практика показує, що не більше 15 % напрацьованих таким чином ідей є справді дієвими. Ще одним недоліком застосування цього методу є те, що часто «генеровані» ідеї важко або неможливо реалізувати.

Незважаючи на ці недоліки, за умов правильної організації, застосування методу «мозкового штурму» є дуже доцільним для підвищення ефективності професійно-орієнтованого навчання вищої математики, оскільки він не тільки сприяє розвитку креативного мислення, тренуванню вміння шукати нові підходи до вирішення конкретних проблем і задач, поліпшенню навичок роботи в команді, які можуть знадобитися майбутнім молодим спеціалістам у професійній діяльності, а й робить студентів більш впевненими в собі та розкутими.

Метод «мозкового штурму» активно застосовується провідними компаніями в Україні та світі, особливо у сферах ІТ-технологій та реклами, тому практичне ознайомлення студентів з основами роботи за цим методом поліпшить їхню конкурентоспроможність не тільки на українському, але й на міжнародному ринку праці.

**Метод морфологічного ящика**, або метод багатомірних матриць (Ф. Цвікки). Знаходження нових, несподіваних і оригінальних ідей шляхом утворення різних комбінацій відомих і невідомих елементів. Аналіз ознак і зв'язків які одержуються із різноманітних комбінацій елементів, застосовується як для виявлення проблем, так і для пошуку нових ідей.

Метод морфологічного ящика є простим і універсальним, тому активно використовується фахівцями різних професій.

Причини популярності методу такі: він є єдиним «алгоритмізованим» методом з набору Ф. Цвікки і найдоступнішим для розуміння звичайним інженерам.

Весь морфологічний аналіз складається з 5 кроків, сформульованих Цвікки:

- а) точно сформулювати проблему, що підлягає розв'язанню;
- б) виявити і охарактеризувати всі параметри, які могли б увійти до розв'язання заданої проблеми;
- в) сконструювати морфологічний ящик або багатовимірну матрицю, що містить всі розв'язання заданої проблеми;
- г) всі розв'язання, що містяться в морфологічному ящику, уважно проаналізувати і оцінити з погляду цілей, які повинні бути досягнуті;
- д) вибрати і реалізувати якнайкращі розв'язання (за умови наявності необхідних засобів). Цей етап практичної реалізації вимагає додаткового морфологічного дослідження.

Кожний з етапів вимагає системного підходу і творчої діяльності. Точне формулювання задачі дає змогу морфологу скласти список усіх морфологічних ознак, тобто всіх важливих характеристик об'єкта, його параметрів, від яких залежить рішення проблеми і досягнення основної мети. На третьому етапі морфолог розкриває всі можливі варіанти з кожної морфологічної ознаки шляхом складання матриці. Кожна з  $n$  характеристик (морфологічних ознак) володіє певним числом  $k_i$  різних варіантів, незалежних властивостей, форм конкретного виразу. Поєднання одного з можливих варіантів морфологічної ознаки з іншими від кожної ознаки дає одне з можливих технічних рішень. Структура технічної системи може бути виражена морфологічними ознаками, але поєднання їхніх конкретних варіантів – лише одне з безлічі технічних рішень, що витікають із закономірностей будови системи. Сукупність всіх можливих варіантів, кожної з перерахованих морфологічних ознак, виражена у вигляді

матриці, дає можливість визначити повне число рішень. Найвідповідальнішим етапом методу є визначення функціональної цінності всіх одержаних варіантів рішень. Оцінка характеристик повинна проводитися на універсальній і, якщо можна, простій основі. Повинні бути розглянуті всі  $N$  варіантів рішень, що витікають зі структури морфологічної таблиці, і проведене їхнє порівняння за одним або декількома найважливішими для даної технічної системи показникам. Знаходження оптимального варіанта може здійснюватися за кращими значеннями найважливішого показника технічної системи.

У чому переваги та недоліки «методу морфологічного ящика»? Найбільш доцільно використовувати «метод морфологічного ящика» при рішенні конструкторських задач загального плану: під час проектування машин і пошуку компоновальних або схемних рішень.

*Переваги «методу морфологічного ящика»:*

- у короткий строк можна запропонувати величезне число нових розв'язків за схемою технічних систем;
- серед запропонованих варіантів можуть виявитися надзвичайно ефективні й перспективні;
- у таблиці наводиться все пошукове поле відповідно до обраних морфологічних ознак;
- пошукове поле може бути легко розширене за рахунок додавання нових ознак і варіантів зі здійснення.

*Недоліки «методу морфологічного ящика»:*

- відсутні правила вибору морфологічних ознак і варіантів їхнього здійснення (вибір залежить від досвіду й кругозору фахівців, ведучих «методу морфологічного ящика»);
- немає критеріїв відбору найкращих варіантів розв'язку.

**Метод гіпотез.** Студентам пропонується сконструювати версії відповідей на поставлене питання або проблему. Спочатку розглядають вихідні позиції або точки зору на проблему. Потім навчаються найбільш повно і чітко формулювати варіанти своїх відповідей на питання, спираючись на логіку й інтуїцію. Питання тестових завдань, що звучать як: Чи завжди? Чи правильно? Що буде, якщо...? породжують часто різноманітні гіпотези студентів, що надалі обговорюються.

Наприклад: «Чи може функція, визначена усюди на осі, мати похідну тільки на множині раціональних чисел? Функція додатня в деякому інтервалі. Чи обов'язково додатня її похідна? Чи правильне обернене твердження?».

Окремим випадком методу гіпотез є **метод прогнозування**. Він відрізняється від методу гіпотез тим, що застосовується до реального або планованого процесу.

Формувати вміння висувати гіпотези, аналізувати наперед задану структуру розв'язання, робити оцінку отриманого розв'язання, у тому числі і з розмірності, є важливим чинником навчально-пізнавальної евристичної діяльності.

Наприклад: «Знайти, чому дорівнює сума квадратів  $n$  послідовних чисел». Для розв'язання цієї задачі корисно розглянути більш прості випадки, узагальнити отримані результати і застосувати гіпотези розв'язання до вихідної.

Отже, знайдемо спочатку, чому дорівнює сума  $n$  послідовних чисел, що стоять у нульовому ступені:  $1+1+1\dots+1=1\cdot n$ .

Далі вирішимо задачу для  $n$  доданків, що стоять у першому ступені, скориставшись формулою суми арифметичної прогресії:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

Спостерігаємо, що в першому випадку – структура розв’язання – багаточлен першого ступеня, у другому випадку – багаточлен другого ступеня, розумно припустити, що структура розв’язання для нашої задачі буде мати вигляд багаточлена третього ступеня, тобто:  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = an^3 + bn^2 + cn + d$ . Далі, скориставшись методом невизначених коефіцієнтів, можна знайти, що  $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{6}, d = 0$ .

Отже, одержимо, що  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ , або  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ . Доведення правильності отриманого результату можна одержати методом математичної індукції.

**Метод придумування.** Створення невідомого студентам раніше продукту внаслідок їхньої деякої творчої діяльності. Метод реалізується за допомогою таких прийомів:

- заміщення якостей одного об’єкта якостями іншого з метою одержання нового об’єкта;
- пошук властивостей об’єкта в іншому середовищі;
- зміна елемента досліджуваного об’єкта й опис властивостей нового, зміненого об’єкта.

Цей метод особливого значення набуває під час конструювання студентами нових задач, при цьому виникає потреба змінювати ролі елементів у формулюванні задачі або використовувати «малі зміни».

**Метод синектики** – це спосіб стимуляції уяви студентів через поєднання різнорідних елементів (Дж. Гордон, США, 1952), який базується на методі «мозкового штурму», різних за видами аналогій (словесної, образної, особистої), інверсії, асоціації тощо. Сутність методу синектики полягає у наступному: на перших етапах його використання йде процес навчання «механізму творчості». Частину цих механізмів автори методики (Дж. Гордон, Г. Буш та ін.) пропонують розвивати навчанням, розвиток інших не гарантується. Перші називають «операційними механізмами», до них зараховують пряму, особисту та символічну аналогію. Такі явища, як-от інтуїція, абстрагування, вільні роздуми, використання можливостей, які не стосуються справи, використання неочікуваних метафор та елементів гри, вважаються «неопераційними механізмами», розвиток яких не гарантується навчанням, хоч і може позитивно вплинути на його активізацію.

Характерними особливостями методу є:

- вихід за межі вузькопрофільних можливостей шляхом залучення до вирішення проблеми спеціалістів із різних галузей (група синектики);
- розширення поля дій, вироблення нових підходів до вирішення проблеми через зіткнення несподіваних думок, незвичайних аналогій (прямих, суб’єктивних, символічних, фантастичних), які розвивають мислення;

- підвищення медитації особистості, що допомагає гранично зосередитися на об'єкті, створюючи оптимальні умови для активізації інтуїтивного процесу.

Спочатку обговорюються загальні ознаки проблеми, висувуються та відсіюються перші рішення, генеруються та розвиваються аналогії, використовуються аналогії для розуміння проблеми, вибираються альтернативи, ведеться пошук нових аналогій. Уже після цього повертаються до проблеми. При застосуванні методу синектики отримані результати рекомендується не оцінювати, тому що вербалізація ідеї гальмує її розвиток.

Методика синектики складається з таких етапів:

- I. Окреслення викладачем напряму наукового пошуку.
- II. Висунення ідей. Приймаються всі без винятку пропозиції.
- III. Здійснюється сумісний короткий аналіз кожної запропонованої ідеї.
- IV. Ідеї бажано згрупувати, доповнити та інтегрувати.
- V. Конструктивно проаналізувати інтегровані ідеї.
- VI. Здійснити відбір найбільш оригінальних ідей, їхніх груп чи варіантів.
- VII. Підбити підсумки роботи, позитивно оцінити діяльність кожного учасника, оригінальність думок та бажання творчості.

До позитивних якостей методу синектики можна віднести його евристичні можливості. До недоліків належить зниження продуктивності пошуку та генерування нових ідей після 30–40 хвилин інтенсивної розумової діяльності. Варто зазначити, що часте використання синектики може спричинити інтелектуальне та емоційне виснаження.

**Вибір точки входу і зони уваги.** «Зона уваги» відповідає тій частині розглянутої проблеми, що знаходиться в полі нашого зору. А точка входу першою потрапляє в поле нашого зору, і її вибір є дуже важливим тому, що послідовність, з якої ідеї йдуть одна за іншою, може здійснити вирішальний вплив на остаточний результат.

Наприклад, студентам була запропонована така задача: в тенісному турнірі беруть участь 111 спортсменів. Це одиночні змагання і проходять вони по системі «той, хто програв, вибуває». Визначити мінімальне число матчів при даній кількості учасників. Дехто починає викреслювати схеми, що показують пари гравців і учасників, вільних від гри. Інші намагаються розв'язати задачу за допомогою піднесення до ступеня числа 2 (4, 8, 16, 32 тощо). Але знаходиться студент, що підтверджує, що відповідь дуже проста: сто десять матчів. І ми можемо одержати його відразу, не здійснюючи ніяких математичних операцій. Щоб знайти його, потрібно переключити увагу від переможців у кожному матчі до переможеного (які, звичайно, цікавлять нас якось менше). Оскільки в турнірі може бути тільки один переможець, має виявитися сто десять переможених. Кожний із них може програти тільки одну зустріч, отже, треба провести сто десять матчів.

**Метод інверсії (звернення)** орієнтований на пошук ідей у нових, несподіваних напрямках, здебільшого протилежних традиційним поглядам та переконанням. Характерними особливостями цього методу є: орієнтація на принцип дуалізму; розвиток діалектики мислення студентів; вплив на рівень розвитку творчих здібностей.

**Пошук альтернатив.** Основним принципом цього методу є такий: будь-яка точка зору на щось – це тільки одна з багатьох можливих точок зору і ви намагаєтесь знайти найбільше число різних підходів. Ми відходимо від фіксованих моделей і створюємо умови для появи нових. Коли ми підходимо до розв’язання якоїсь проблеми з позицій розвитку творчого мислення, то розглядаємо кожну точку зору як корисну, але не приймаємо її за деякий абсолют. Іншими словами, ми визнаємо корисність тієї або іншої моделі, але, замість того, щоб приймати її за єдину, своєрідну, бачимо в ній лише один із засобів розв’язання. Навіть якщо в якомусь випадку пошук альтернатив виявиться безрезультатним, у студентів виробиться навичка шукати нові можливості, замість того, щоб приймати найбільш очевидний варіант.

**Метод проєктів у навчанні** – спосіб розвитку пізнавальних навичок особистості, умінь самостійно конструювати свої знання, орієнтуватися в інформаційному просторі, розвиток критичного мислення. Метод проєктів завжди припускає вирішення якоїсь проблеми, яка передбачає, з одного боку, використання різноманітних методів, засобів навчання, а з іншого – інтегрування знань, умінь з різних галузей науки, техніки, технології, творчих сфер.

*Основні вимоги до використання методу проєктів:*

- 1) наявність значущої в дослідницькому, творчому плані проблеми / задачі, що вимагає інтегрованого знання, дослідницького пошуку для її вирішення;
- 2) практична, теоретична, пізнавальна значущість передбачуваних результатів;
- 3) індивідуальна, парна, групова діяльність;
- 4) структурування змістовної частини проєкту (із зазначенням поетапних результатів);
- 5) використання дослідницьких методів (визначення проблеми, висунення гіпотези, обговорення методів дослідження, оформлення кінцевих результатів, аналіз отриманих даних, підбиття підсумків, коригування, висновки (використання в процесі спільного дослідження методу «мозкової атаки», «круглого столу», статистичних методів творчих звітів, переглядів тощо).

Практикою доведено, що тільки активні дослідження та метод проєктів перетворюють особистість на суб’єкт педагогічного процесу. Набуті в процесі реалізації проєкту знання, вміння та навички не тільки здобувають особливу міцність і свідомість, а й асоціативно пов’язані з отриманням задоволення, що стає стимулом для нового пошуку. Використання інноваційних педагогічних технологій формує стійкий інтерес до навчання, сприяє розвитку творчості, спрямованої на використання та підвищення мотивації студентів, розвиток навичок високого рівня та практичних життєвих навичок.

Отже, використання активних методів навчання сприяє формуванню у студентів навчально-пізнавальної діяльності. Така діяльність прямо пов’язана з інтуїцією і творчістю і дає змогу цілком свідомо використовувати інформацію, щоб викликати до життя й інтуїцію, і творчість. Студенти задіяні в процесі навчання: висловлюють свої думки, розробляють власні варіанти підходів до завдання, аналізують роботу своїх однокурсників, підходять до неї креативно. Кожний студент переосмислює свій початковий результат, покращує його та засвоює матеріал більш якісно.

## 5. ОПОРНІ КОНСПЕКТИ ЛЕКЦІЙ

### 5.1. Опорний конспект лекцій в таблицях на тему «Визначники»

|                                |                                                                                                                                       |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Лаплас</b> (фр.)<br>1772 р. | отримав загальне правило обчислення визначників будь-якого порядку, що довів <b>Лаплас</b> , який довів і 9-у властивість визначників |
| <b>Коші</b> (фр.)<br>1815 р.   | ввів термін «детермінант» і розробив основні питання теорії визначників                                                               |
| <b>Келі</b> (англ.)<br>1841 р. | ввів для позначення визначників квадратну схему з вертикальними рисочками                                                             |
| <b>Якобі</b> (нім.)<br>1844 р. | розробив теорію, довів теореми. Ввів <i>якобіані</i> – функціональний визначник                                                       |
| <b>Саррюс</b> (фр.)            | ввів правило обчислення визначників 3 порядку                                                                                         |

### ВИЗНАЧНИКИ – ДЕТЕРМИНАНТИ

|                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ | це величина, яка представлена у вигляді впорядкованої квадратної таблиці числових або літерних значень, що розкривається за певним математичним законом $\Delta$ , $\det A$ , $ A $ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

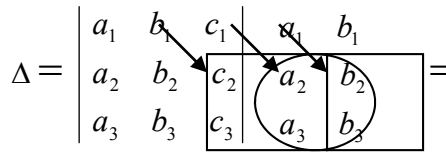
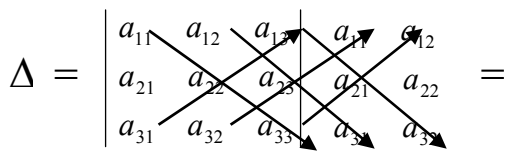
### Характеристики визначників

|                                                                        |                                                                                                                                           |
|------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Елементи <math>a_{ij}</math></b>                                    | величини, що входять до визначника ( <i>i</i> – номер рядка, <i>j</i> – стовпця)                                                          |
| <b>Порядок визначника</b>                                              | зумовлений кількістю його рядків і стовпців                                                                                               |
| <b>Головна діагональ</b>                                               | спрямована зверху донизу, зліва направо                                                                                                   |
| <b>Побічна діагональ</b>                                               | протилежна головній діагоналі                                                                                                             |
| <b>Квадратна таблиця</b>                                               | кількість рядків і стовпців однакова                                                                                                      |
| <b>Алгебраїчні доповнення елементів <math>A_{ij}</math> (ад'юнкта)</b> | мінори цих елементів, взяті зі знаком $(-1)^{i+j}$<br>$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$                                                  |
| <b><math>M_{ij}</math> – мінор елемента <math>a_{ij}</math></b>        | визначник, на порядок нижчий попереднього визначника, що залишається після викреслювання рядка та стовпця, які стоять на їхньому перетині |
| <b>Пропорційні рядки (стовпці)</b>                                     | якщо елементи одного з них отримані з іншого множенням на одне число                                                                      |
| <b>Транспонування</b>                                                  | математична операція, при якій рядки змінюються відповідними стовпцями                                                                    |

### Властивості визначників

| №               | Формула                                                                                                                                                                                       | Формулювання                                                                                                                                                                        |
|-----------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Наслідки</b> |                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                     |
| 1               | $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$                   | Величина визначника не зміниться при заміні всіх його рядків відповідними стовпцями, тобто при транспонуванні.                                                                      |
| 2               | $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$                 | При перестановці двох рядків або стовпців визначник змінює знак на протилежний.                                                                                                     |
| 3               | $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ ka_1 & kb_1 & kc_1 \end{vmatrix} = 0$                                                                                                  | Якщо рядки або стовпці визначника пропорційні іншим його рядкам або стовпцям, то визначник дорівнює нулю.<br><br><i>Визначник з однаковими рядками або стовпцями дорівнює нулю.</i> |
| 4               | $\begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$                                                                                                           | Якщо будь-який рядок (стовпець) визначника має всі нульові значення, то визначник дорівнює нулю.                                                                                    |
| 5               | $\begin{vmatrix} a_1 & kb_1 & c_1 \\ a_2 & kb_2 & c_2 \\ a_3 & kb_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$              | Множник, загальний для елементів деякого рядка або стовпця, можна виносити за знак визначника.                                                                                      |
| 6               | $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + ka_1 \\ a_2 & b_2 + ka_2 \end{vmatrix}$                                                                   | Величина визначника не зміниться, якщо до елементів деякого рядка чи стовпця додати елементи іншого рядка або стовпця, заздалегідь домножені на один і той самий множник.           |
| 7               | $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$              | Якщо елементи рядка або стовпця визначника є сумою двох величин, то визначник можна представити у вигляді суми двох визначників.                                                    |
| 8               | $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} \dots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{mn}$ | Якщо всі елементи визначника з одного боку від головної діагоналі дорівнюють нулю, то визначник дорівнює добутку елементів головної діагоналі.                                      |
| 9               | $a_{1i} \cdot A_{1j} + a_{2i} \cdot A_{2j} + a_{3i} \cdot A_{3j} = 0,$<br>де $i \neq j$ .<br>Наприклад:<br>$a_{11} \cdot A_{13} + a_{21} \cdot A_{23} + a_{31} \cdot A_{33} = 0$              | Сума добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення елементів будь-якого іншого рядка або стовпця дорівнює нулю.                              |

## Обчислення визначників

| Порядок                               | Закон                                                                                                                                                                              | Формула                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|---------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| I                                     | Число                                                                                                                                                                              | $\Delta =  a_{11} $                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| II                                    | 2 рядки та 2 стовпці                                                                                                                                                               | $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| III<br><br>3 рядка<br>та 3<br>стовпця | <p><b>1. За елементами будь-якого рядка або стовпця - Правило Лапласа:</b><br/>визначник дорівнює сумі додатків елементів рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення</p> | $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} +$ $+ b_1(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} +$ $+ c_1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ $\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{s=1}^n a_{is} A_{is}$ |
|                                       | <p><b>2. Правило трикутника</b></p> $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$                                                 |  $= a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 c_1 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - a_2 b_1 c_3$                                                                                                                                                                                                                                                             |
|                                       | <p><b>3. Штучного доповнення:</b></p>                                                                                                                                              | $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$  $= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$                                                             |
|                                       | <p><b>4. Правило Саррюса:</b><br/>визначник доповнюється двома першими рядками або стовпцями, і записується сума добутоків елементів, що стоять на діагоналях</p>                  | $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$  $= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} -$ $- a_{31} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12}.$                                                                     |

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - =$ $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$ $- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| $n$ | <p><b>Визначники вищих порядків</b></p> <p>Розкриття здійснюється двома способами:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. За елементами будь-якого рядка або стовпця зі зниженням порядку визначника.</li> <li>2. Створенням якнайбільшої кількості нулів в будь-якому рядку або стовпці.</li> </ol> | $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ <p>Визначник <math>n</math>-го порядку дорівнює сумі добутоків елементів:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) будь-якого стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення: <math>\Delta = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}</math></li> <li>2) будь-якого рядка на відповідні алгебраїчні доповнення: <math>\Delta = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}</math></li> </ol> |

## 5.2. Опорний конспект лекцій в таблицях на тему «Матриці»

|                                   |                                                                                                                                        |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Келі</b> (англ.)<br>1858 р.    | відкриття: систему чисел у вигляді таблиці можна розглядати як єдиний алгебраїчний об'єкт, і над ним можна здійснювати алгебраїчні дії |
| <b>Сільвестр</b><br>(анг.)1851 р. | ввів терміни «власні числа» і «власні вектори»; роботи з лінійної алгебри і теорії інваріантів                                         |
| <b>Якобі</b> (нім.)<br>1841 р.    | ввів подвійну індексацію елементів                                                                                                     |
| <b>Додгсон</b> (анг.)<br>1867р.   | ввів поняття рангу і довів основні теореми (це дитячий письменник Льюїс Керрол)                                                        |

### МАТРИЦІ

|                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ | <p>Це впорядковані таблиці числових або літерних значень з <math>m</math> рядків та <math>n</math> стовпців</p> <p><math>A_{m \times n}</math>, <math>(a_{ij})</math>, <math>A</math></p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### Характеристики матриць

|                                                                 |                                                                                                                                                                               |
|-----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Елементи <math>a_{ij}</math></b>                             | величини, що входять до матриці ( $i$ – номер рядка, $j$ – стовпця) $i \in \overline{1, m}$ , $j \in \overline{1, n}$ і знаходяться на перетині $i$ – го рядка, $j$ – стовпця |
| <b>Розмір матриці <math>m \times n</math></b>                   | зумовлений кількістю його рядків і стовпців                                                                                                                                   |
| <b>Головна діагональ</b>                                        | спрямована зверху донизу, зліва направо                                                                                                                                       |
| <b>Побічна діагональ</b>                                        | протилежна головній діагоналі                                                                                                                                                 |
| <b>Алгебраїчні доповнення</b>                                   | <b>(ад'юнкта)</b> - мінори елементів, взяті зі знаком $(-1)^{i+j}$ : $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$                                                                       |
| <b><math>M_{ij}</math> – мінор елемента <math>a_{ij}</math></b> | визначник, на порядок нижчий попереднього, що залишається після викреслювання рядка та стовпця, які стоять на їхньому перетині                                                |
| <b>Пропорційні рядки (стовпці)</b>                              | якщо елементи одного з них отримані з іншого множенням на одне число                                                                                                          |
| <b>Транспонування</b>                                           | математична операція, при якій рядки стають відповідними стовпцями                                                                                                            |
| <b>Діагональні</b>                                              | елементи з однаковими індексами $i = j$                                                                                                                                       |
| <b>Еквівалентні</b>                                             | матриці, якщо одна з них отримана з іншої шляхом елементарних перетворень. $A \sim B$                                                                                         |

### Види матриць

| №  | Назва та означення                                                                                                         | Формула                                                                                                                                                                                                                                                  |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | <b>Матриця-рядок</b>                                                                                                       | $A = (3 \quad 8 \quad 9 \quad 1 \quad 4)$ , $A = (a_{11} \quad a_{12} \dots a_{1n})$                                                                                                                                                                     |
| 2  | <b>Матриця-стовпець</b>                                                                                                    | $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$                                                                                                                                               |
| 3  | <b>Квадратна</b> матриця – якщо кількість рядків і стовпців збігається: $i = j$                                            | $K = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ , $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ |
| 4  | <b>Прямокутна</b> матриця – якщо кількість рядків і стовпців різна: $i \neq j$                                             | $T = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ , $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$                                                 |
| 5  | <b>Нульова</b> матриця – якщо всі елементи дорівнюють нулю.                                                                | $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$                                                                    |
| 6  | <b>Особлива (вироджена)</b> – квадратна матриця, визначник якої дорівнює нулю.                                             | $B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$                                                                                                                            |
| 7  | <b>Невироджена</b> – квадратна матриця, визначник якої відмінний від нуля.                                                 | $D = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ , $B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$                                                                                                                            |
| 8  | <b>Ступінчаста</b> – квадратна матриця, якщо в окремих рядках один елемент відмінний від нуля, а всі інші дорівнюють нулю. | $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ , $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$                                                                                               |
| 9  | <b>Діагональна</b> – ступінчаста матриця, якщо відмінні від нуля елементи стоять на головній діагоналі.                    | $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , $D = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$                                                                                               |
| 10 | <b>Скалярна</b> – діагональна матриця, елементи якої рівні між собою.                                                      | $P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ , $P = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$                                                                                                        |
| 11 | <b>Одинична</b> – скалярна матриця, елементи якої на головній діагоналі одиниці.                                           | $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                  |

## Дії над матрицями

| <b>Матрицю неможливо обчислити!</b>                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>При будь-яких діях над матрицями завжди отримують матрицю</i>                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <b>Матриці рівні</b> тоді і тільки тоді, коли вони мають однаковий розмір та однакові відповідні елементи:<br>$A = B \Leftrightarrow (a_{ij} = b_{ij}, A_{m \times n} = B_{m \times n}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ |                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| №                                                                                                                                                                                                                                  | Дія, закон                                                                                                                                                                                                   | Формула                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 1                                                                                                                                                                                                                                  | <b>Додавання матриць</b><br>Сума двох матриць – інша матриця, кожен елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць.                                                                                | $A + B = C$ , тобто $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$<br>$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$ де $A_{m \times n} = B_{m \times n}$                                                                                                                    |
| 2                                                                                                                                                                                                                                  | <b>Віднімання матриць</b><br>Різниця двох матриць – інша матриця, кожен елемент якої дорівнює різниці відповідних елементів матриць.                                                                         | $A - B = D$ , тобто $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$<br>$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix}$ де $A_{m \times n} = B_{m \times n}$                                                                                                                    |
| 3                                                                                                                                                                                                                                  | <b>Множення матриць на число</b><br>Добутком матриці на число є інша матриця, кожен елемент якої дорівнює добутку елементів матриці на число.                                                                | $kA = C$ , тобто $c_{ij} = ka_{ij}$<br>$kA = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 4                                                                                                                                                                                                                                  | <b>Множення матриць</b><br>Добуток двох матриць $A$ і $B$ – інша матриця, кожен елемент якої дорівнює сумі добутків елементів $i$ -го рядка матриці $A$ на відповідні елементи $j$ -го стовпця матриці $B$ . | $A \cdot B = C$ , де $A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$ тобто<br>$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$<br>$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$ |
| 5                                                                                                                                                                                                                                  | <b>Піднесення матриці <math>A</math> до степеня <math>n</math></b> – множення матриці саму на себе $n$ разів.                                                                                                | можливе лише для квадратних матриць<br>$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n = A^{n-1} \cdot A$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 6                                                                                                                                                                                                                                  | <b>Обернена матриця</b>                                                                                                                                                                                      | $\frac{A}{B} = A \cdot B^{-1},$ де $B^{-1}$ – обернена до $B$ матриця                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 7                                                                                                                                                                                                                                  | <b>Транспонування матриць</b>                                                                                                                                                                                | $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 8                                                                                                                                                                                                                                  | <b>Обертання</b> – процес знаходження оберненої матриці                                                                                                                                                      | $A^{-1} = \frac{1}{ A } \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |

### Властивості суми та добутку матриць

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Добуток прямокутних матриць існує лише тоді, коли кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої матриці</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Лише квадратну матрицю можна помножити саму на себе<br>$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>A + B = B + A</math> <span style="float: right;"><math>A, B, C, E</math> – матриці</span></li> <li>2) <math>A + 0 = A</math> <span style="float: right;"><math>\alpha, \beta</math> – числа</span></li> <li>3) <math>AE = EA = A</math> <span style="float: right;"><math>A, B, C</math> одного розміру</span></li> <li>4) <math>A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C</math></li> <li>5) <math>k(A + B) = kA + kB</math></li> <li>6) <math>(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A</math></li> <li>7) <math>\beta(\alpha \cdot A) = (\alpha\beta)A</math></li> <li>8) <math>A(BC) = (AB)C = ABC</math></li> <li>9) <math>\beta(AB) = A(\beta B) = (\beta A)B = \beta AB</math></li> <li>10) <math>(A + B)C = AC + BC</math></li> <li>11) <math>C(A + B) = CA + CB</math></li> <li>12) <math>1 \cdot A = A</math></li> <li>13) <math>A \cdot A^{-1} = E</math>, де <math>A^{-1}</math> – обернена</li> </ol> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <b>Специфічні властивості матриць:</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>A \cdot B \neq B \cdot A</math>;</li> <li>2) якщо <math>A \cdot B</math> та <math>B \cdot A</math> існують, то отримані матриці можуть бути різних розмірів;</li> <li>3) <math>A \cdot B</math> існує, а <math>B \cdot A</math>, можливо, не існує;</li> <li>4) <math>A \cdot B = 0</math>, то з цього не випливає, що <math>B = 0</math>, або <math>A = 0</math>.</li> </ol> |
| <b>Властивості транспонованих матриць</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| $ A  =  A^T $                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | визначники квадратної і транспонованої матриць рівні                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| $A^{mm} = (A^m)^m = A$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 2 рази транспонована матриця дорівнює попередній матриці                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| $A_{m \times n}, A^T_{n \times m}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | розміри матриці і транспонованої до неї матриці взаємно обернені                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| $(kA)^T = kA^T$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | якщо матриця множиться на число, то при транспонуванні множник виносять                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| $(A + B)^T = A^T + B^T$<br>$(AB)^T = B^T A^T$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | транспонування суми матриць дорівнює сумі транспонованих матриць                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |

## Алгоритми знаходження оберненої матриці

*У будь-якої невиродженої матриці існує єдина матриця обернена до неї.*

### 1. За допомогою алгебраїчних доповнень

|                                                                                                                                  |                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Delta =  A  = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  | 1) обчислити визначник матриці: $\Delta =  A $ , якщо $\Delta \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ для $A$ |
| $A^{\text{пр}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$ | 2) замінити елементи матриці її алгебраїчними доповненнями (проміжна матриця)                            |
| $A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$           | 3) транспонувати проміжну матрицю (матриця приєднання)                                                   |
| $\frac{1}{ A } \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$   | 4) записати обернену матрицю: $A^{-1} = \frac{1}{ A } \cdot \tilde{A}$                                   |
| $A \cdot A^{-1} = E.$                                                                                                            | 5) перевірити умову існування оберненої матриці                                                          |

### 2. За допомогою елементарних перетворень рядків: $A/E \sim E/A$

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ | 1) до матриці $A$ праворуч приписати одиничну матрицю                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix}$ | 2) за допомогою елементарних перетворень рядків об'єднаної матриці привести $A$ до $E$ , звідки<br>$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} \quad \text{— метод Гауса—Жордано}$ |

### Ранг матриці

|                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                             |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $r(A), R(A), rangA$<br>1. Це порядок її найбільшого ненульового мінору.<br>2. Це вищий порядок визначника із її елементів. |                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Елементарні операції</b> – операції, що не змінюють рангу матриці                                                       | 1. Транспонування<br>2. Множення рядка на ненульове число<br>3. Перестановка рядків (стовпців)<br>4. Додавання до елементів рядка елементів іншого рядка, помножених на ненульове число<br>5. Викреслювання нульового рядка |
| <b>Теорема про ранг</b>                                                                                                    | ранг матриці дорівнює максимально можливому числу її лінійно незалежних стовпців (рядків), через які лінійно виражаються всі інші стовпці (рядки)                                                                           |
| <b>Базисний міно́р матриці</b>                                                                                             | це будь-який її ненульовий міно́р, порядок якого дорівнює рангу матриці.<br><i>Матриця може мати не один, а декілька базисних міно́рів</i>                                                                                  |

### Методи визначення рангу матриць

|                                                          |                                                                                                                                                                                                                                    |
|----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Обчислення усіх визначників</b> із елементів матриці. | спочатку обчислюють визначники другого порядку, що не дорівнює нулю, потім третього, ...                                                                                                                                           |
| <b>Метод нулів та границь.</b>                           | якщо усі елементи рядка матриці дорівнюють нулю, крім одного рядка, який містить одиниці.<br><i>Кількість одиниць дорівнює рангу матриці</i>                                                                                       |
| <b>Метод обвідних міно́рів.</b>                          | <i>міно́р <math>M_{R+1}</math>, що містить у собі усі елементи міно́ру <math>M_R</math>, є обвідним;</i><br>якщо міно́р $M_{R+1}$ , породжений матрицею, дорівнює нулю, а хоча б один $M_{R+1} \neq 0$ , то ранг матриці $A \in R$ |
| <b>Приведення до спеціального виду матриці.</b>          | кількість одиниць на головній діагоналі дорівнює рангу матриці                                                                                                                                                                     |

### Властивості рангу матриць

|                                 |                                                                                         |
|---------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| $r(A) \leq \min(m; n)$          | ранг не може перевищувати меншу з розмірностей матриці                                  |
| $r(A) = n$                      | для квадратної матриці $n$ -го порядку тоді і тільки тоді, коли матриця $A$ невироджена |
| $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$     | ранг суми не перевищує суми рангів матриць                                              |
| $r(A + B) \geq  r(A) - r(B) $   | ранг суми не менший за модуль різниці рангів                                            |
| $r(AB) \leq \min\{r(A); r(B)\}$ | ранг суми не перевищує $\min$ з рангів матриць                                          |
| $r(A'A) = r(A)$                 |                                                                                         |
| $r(AB) = r(A)$                  | якщо $B$ – квадратна матриця і $ B  \neq 0$                                             |
| $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$    | $N$ – число стовпців матриці $A$ або рядків матриці $B$                                 |

### *Лінійна залежність*

| <b>Лінійна залежність рядків (стовпців) матриці означає, що хоча б один рядок (стовпець) є лінійною комбінацією інших</b>                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Необхідна і достатня умова лінійної залежності рядків (стовпців) матриці</b>                                                                                                                                                          | один з рядків або стовпців є лінійною комбінацією інших                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <b>Теорема про ранг:</b><br>$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$                                                                                              | рядки та стовпці матриці, елементи яких входять в базисний мінор, лінійно незалежні. Будь-який рядок (стовпець) матриці є лінійною комбінацією цих рядків (стовпців)                                                                                                                                                                                                              |
| $S_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \dots$ $\dots S_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ | стовпець $S_n$ – лінійна комбінація стовпців, якщо $S_1, S_2, \dots S_r$ його можна представити у вигляді: $S_n = \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \dots + \lambda_r S_r$ , де $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r$ – деякі числа                                                                                                                                               |
| <b>Лінійно залежні</b><br>стовпці $S_1, S_2, \dots S_n$<br><br><b>Лінійно незалежні</b><br>стовпці $S_1, S_2, \dots S_n$                                                                                                                 | якщо існують числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r$ (одночасно не рівні нулю), а їхня лінійна комбінація стовпців дорівнює нульовому стовпцю: $S_n = \lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \dots + \lambda_r S_r = 0$<br>лінійна комбінація стовпців дорівнює нульовому стовпцю тоді і тільки тоді, коли усі коефіцієнти $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r$ дорівнюють нулю |

### 5.3. Опорний конспект лекцій в таблицях на тему «Системи лінійних алгебраїчних рівнянь»

|                                      |                                                                                                                            |
|--------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| VI ст.                               | індійці винайшли алгебраїчний метод для розв'язання систем алгебраїчних рівнянь                                            |
| Стародавній Китай                    | відомий алгоритм методу послідовного виключення невідомих. (152 р. до н. е.)                                               |
| <b>Вієт</b> , (фр. адвокат), 1591 р. | ввів повну символізацію алгебри. Спочатку символами позначали лише невідомі. Ввів символічне позначення і для коефіцієнтів |
| <b>Крамер</b> (швейц.), 1750 р.      | розробив метод розв'язання систем алгебраїчних рівнянь за допомогою визначників                                            |
| <b>Гаус</b> (нім.)                   | розробив метод розв'язання систем алгебраїчних рівнянь (метод послідовного виключення змінних)                             |
| <b>Жордан</b> (фр.)                  | запропонував модифікацію методу Гауса – повне виключення ведучого невідомого                                               |

## Лінійні рівняння

|                                                          |                                                                                                                                                                                                                       |
|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Рівняння виду:<br>$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ | $a_i, b$ – числа, $x_i$ – невідомі, тобто в лівій частині – лінійна комбінація невідомих, в правій – число                                                                                                            |
| <b>Розв’язок рівняння</b>                                | це набір чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , при підстановці якого в дане рівняння замість відповідних невідомих отримують правильну рівність $\lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 + \dots + \lambda_na_n = 0$ |
| <b>Тривіальне</b>                                        | лінійне рівняння виду $\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \dots + \lambda_n \cdot 0 = 0$ має безліч розв’язків                                                                                                   |
| <b>Протиріччя</b>                                        | лінійне рівняння $\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \dots + \lambda_n \cdot 0 = b$ , де $b \neq 0$                                                                                                              |

## Системи лінійних рівнянь

[illegible]

## *Види систем*

|                     |                                                                     |
|---------------------|---------------------------------------------------------------------|
| <b>Однорідна</b>    | якщо всі вільні члени $b_i = 0$ , то система завжди сумісна         |
| <b>Неоднорідна</b>  | якщо хоча б один з вільних членів $b \neq 0$                        |
| <b>Сумісна</b>      | якщо вона має хоча б один розв'язок                                 |
| <b>Несумісна</b>    | якщо вона не має жодного розв'язку                                  |
| <b>Визначена</b>    | сумісна система, якщо вона має один розв'язок                       |
| <b>Невизначена</b>  | сумісна система, якщо вона має декілька розв'язків                  |
| <b>Еквівалентні</b> | дві системи рівнянь, якщо вони мають одну і ту ж множину розв'язків |
| <b>Рівносіильні</b> | дві системи рівнянь, якщо вони мають однакові розв'язки             |

## Елементарні перетворення системи

[illegible]

## Методи розв'язання систем

| Назва, сутність                                                                          | Формули та пояснення                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Переваги та недоліки                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Метод Гауса</b><br>– метод послідовного виключення невідомих<br><br>два рази почленно | Елементарними перетвореннями система зводиться до еквівалентної ступінчастого виду (трикутного або трапецевидного): $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = p_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = p_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = p_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = p_1 \\ b'_2y + c'_2z = p'_2 \\ c'_3z = p'_3 \end{cases}$ Існує 3 способи:<br>1) в одному з рівнянь одне невідоме виражають через інші і підставляють його в інші рівняння, доки не отримають одне рівняння з одним невідомим;<br>2) хід розв'язання записується за допомогою розширеної матриці системи, зводячи її поступово до діагональної матриці;<br>3) зменшують кількість невідомих, прирівнюючи коефіцієнти при одному з невідомих і потім додаючи або віднімаючи одне рівняння від іншого. | <u>Переваги:</u><br>1. Можливість використовувати при розв'язанні і однорідних, і неоднорідних систем з будь-яким співвідношенням чисел рівнянь і чисел невідомих.<br>2. Система легко піддається дослідженню.<br>3. Не треба попередньо досліджувати умову сумісності системи рівнянь<br><u>Недоліки:</u> немає     |
| <b>Різновиди методу Гауса</b>                                                            | <b>1. Метод головних елементів</b> – якщо система розв'язується наближено (на кожному кроці вибирають головний елемент – найбільший за модулем в підсистемі коефіцієнт).<br><b>2. Метод Жордано–Гауса</b> – метод повного виключення ведучого невідомого на кожному кроці з рівнянь підсистеми і з ведучих рівнянь попередніх кроків.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <u>Недолік:</u><br>великий обсяг роботи.<br><br><u>Переваги:</u><br>можна розв'язувати системи з багатьма невідомими                                                                                                                                                                                                 |
| <b>Метод Крамера</b> – складання і обчислення чотирьох визначників                       | $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = p_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = p_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = p_3 \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \text{головний визначник.}$ Допоміжні визначники: $\Delta_x = \begin{vmatrix} p_1 & b_1 & c_1 \\ p_2 & b_2 & c_2 \\ p_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & p_1 & c_1 \\ a_2 & p_2 & c_2 \\ a_3 & p_3 & c_3 \end{vmatrix}$ $\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & p_3 \end{vmatrix}$ Відповідь: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$                                                                                                          | <u>Недолік:</u><br>лише для систем $n \geq 3$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими<br><br><u>Висновок:</u><br>1) $\Delta \neq 0$ , то завжди є розв'язок;<br>2) $\Delta = 0$ , а хоча б один з $\Delta_i \neq 0$ , то розв'язків немає;<br>3) $\Delta = 0, \Delta_i = 0$ , то система сумісна або має безліч розв'язків |

|                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                    |
|--------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>За допомогою оберненої матриці – розв’язання матричного рівняння</b></p> | $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$ $A = (a_{ij}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \text{ то}$ <p>де <math>i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n},</math></p> <p>систему можна записати у вигляді</p> $A \cdot X = B, \quad X = A^{-1} \cdot B$ $A^{-1} = \frac{1}{ A } \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$ | <p><u>Недолік:</u><br/> труднощі в знаходженні оберненої матриці, якщо <math>n &gt; 3</math>;<br/> лише для систем <math>n</math> лінійних рівнянь з <math>n</math> невідомими</p> |
|--------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

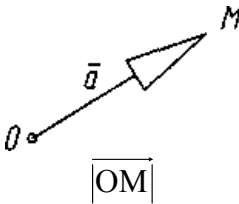
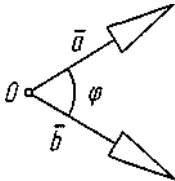
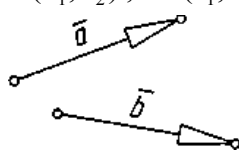
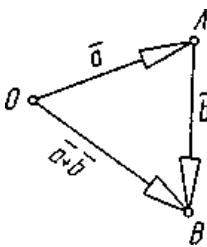
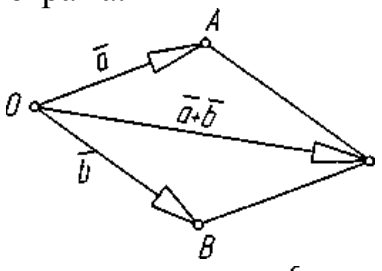
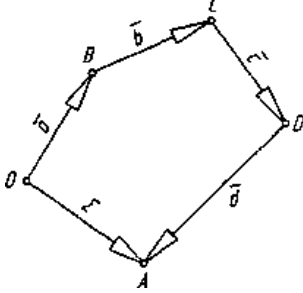
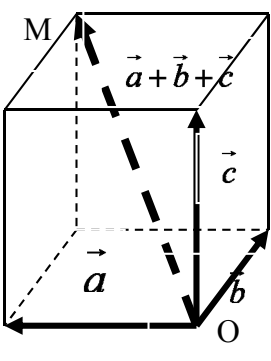
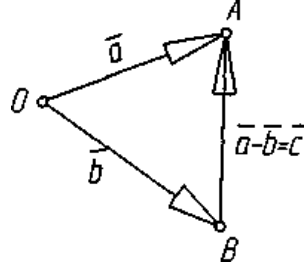
#### 5.4. Опорний конспект лекцій в таблицях на тему «Векторна алгебра»

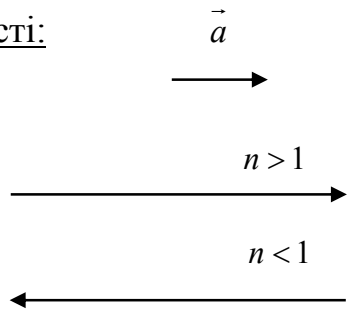
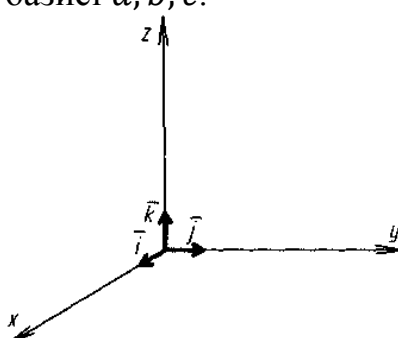
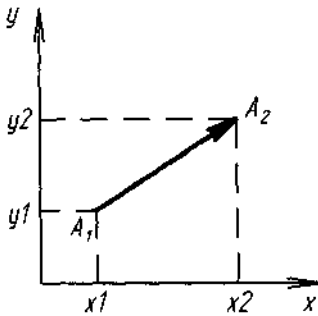
|                                    |                                                                                                                                                                         |
|------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Гамільтон</b> (ірланд.)         | 1846 р. – ввів поняття «вектор»                                                                                                                                         |
| <b>Грассман</b> (нім.),<br>1844 р. | заклав основи векторної алгебри (абстрактна). Створив векторне числення. Дав систематичну побудову багатовимірного простору. Ввів поняття «скалярного добутку векторів» |
| <b>Ганкель</b> (нім.)              | розтлумачив сутність вчення Грассмана                                                                                                                                   |

#### *Вектори*

| <i>Розрізняють скалярні величини та векторні</i>                                                                                |                                                                                                                                                         |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Скаляр</b>                                                                                                                   | величина, яка характеризується числовим значенням (модулем)                                                                                             |
| <b>Вектор <math>\vec{a}</math>, <math>\overline{AB}</math></b>                                                                  | величина, яка характеризується не лише числовим значенням, а й напрямком                                                                                |
| <b>Нульовий</b>                                                                                                                 | вектор, у якого початок і кінець співпадають, довжина дорівнює нулю. Він не має напрямку – напрямок довільний                                           |
| <b>Одиничний, або орт</b>                                                                                                       | вектор, довжина якого дорівнює одиниці                                                                                                                  |
| <b><math> \vec{a} </math>, <math> \overline{AB} </math> – довжина вектора (модуль)</b>                                          | це відстань між його початком та кінцем:<br>$ \vec{a}  =  \overline{AB}  = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$                                                |
| <b>Колінеарні</b><br>$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$<br>( $m, n, p$ – числа:<br>$m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = 0$ ) | вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Кут між ними дорівнює нулю, відповідні координати пропорційні                            |
| <b>Вектори рівні (еквівалентні)</b>                                                                                             | якщо вони сполучаються паралельним переносом (рівні за величиною та співнапрямлені). У них рівні координати, довжини та напрямки. Це колінеарні вектори |
| <b>Протилежні</b>                                                                                                               | паралельні вектори з однаковою довжиною і протилежним напрямком                                                                                         |
| <b>Компланарні</b>                                                                                                              | вектори, які лежать в одній площині або на паралельних площинах                                                                                         |
| <b>Вільні</b>                                                                                                                   | вектори, початкова точка яких вибирається довільно. Сукупність усіх рівних між собою векторів                                                           |
| <b>Ковзаючими</b>                                                                                                               | називають такі вектори, які вважаються еквівалентними, якщо вони не лише рівні, але і лежать на одній прямій                                            |
| <b>Присьдані (зв'язані)</b>                                                                                                     | називають вектори, які вважають еквівалентними, якщо вони не лише рівні, але й мають спільний початок                                                   |

## Арифметичні дії з векторами

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  <p>О – початок,<br/>М – кінець</p>  <p><b>Кут між векторами</b> – кут між рівними векторами зі спільним початком.</p> <p><b>Координати</b> <math>\vec{a} = \overrightarrow{AB}</math>, де <math>A(x_1, y_1)</math>, <math>B(x_2, y_2)</math> – числа.<br/> <math>a_1 = x_2 - x_1</math>,<br/> <math>a_2 = y_2 - y_1</math>, тобто<br/> <math>\vec{a} = (a_1, a_2)</math></p> <p><u>Властивості суми:</u></p> <ol style="list-style-type: none"> <li><math>\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}</math></li> <li><math>(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}</math></li> <li><math>\forall a \exists \vec{0}</math>, що <math>\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}</math></li> <li><math>\forall a \exists \vec{-a}</math>, що <math>\vec{a} + (\vec{-a}) = \vec{0}</math></li> </ol> | <p><b>Операції над векторами</b></p> <p><u>На площині:</u>      <b>Додавання:</b><br/> <math>\vec{a}(a_1, a_2), \vec{b}(b_1, b_2), \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}</math></p>  <ol style="list-style-type: none"> <li>Правило трикутника.</li> <li>Правило паралелограма.</li> </ol>    <p>3. Правило многокутника.</p> <p><u>У просторі:</u><br/> <math>\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}</math></p>  |
| $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b}),$ $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ $\lambda(\overrightarrow{a_1, a_2}) = (\lambda a_1, \lambda a_2)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <p><b>Різниця</b> – це третій вектор, сума якого з вектором <math>\vec{b}</math> дорівнює вектору <math>\vec{a}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><u>Вектор <math>\lambda \vec{a}</math>:</u></p> <p>а) збільшений у <math>\lambda</math> разів, якщо <math>\lambda &gt; 1</math>;<br/> б) в <math>\lambda</math> разів зменшений, якщо <math>0 &lt; \lambda &lt; 1</math>;<br/> в) протилежно спрямований, якщо <math>\lambda &lt; 0</math></p>                                                                                                                                                                                   | <p><b>Множення вектора на число</b> – це новий вектор <math>\lambda \vec{a}</math>, довжина якого <math> \lambda  \cdot  \vec{a} </math>, а напрямок збігається з напрямком <math>\vec{a}</math>, якщо <math>\lambda &gt; 0</math>, і протилежно напрямлений, якщо <math>\lambda &lt; 0</math>.</p> <p><u>Властивості:</u></p> <ol style="list-style-type: none"> <li><math>\lambda \vec{a} = \vec{a} \lambda</math></li> <li><math>\lambda(n\vec{a}) = (\lambda n)\vec{a}</math></li> <li><math>(\alpha + \beta)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \beta\vec{a}</math></li> <li><math>\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}</math></li> <li><math>(-\alpha)\vec{a} = \alpha(-\vec{a}) = -(\alpha\vec{a})</math></li> <li><math>\alpha\vec{a} = 0</math>, якщо <math>\beta = 0</math> або <math>\vec{a} = 0</math></li> </ol>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <p><math>\alpha, \beta, \gamma</math> – координати <math>\vec{d}</math> в базисі <math>\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}</math>.</p>  <p>Вектори <math>\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}</math> утворюють базис ортоспрямований.</p> $\cos \alpha = \frac{x}{ a }, \cos \beta = \frac{y}{ a },$ $\cos \gamma = \frac{z}{ a }$  | <p><u>Орти</u> – одиничні вектори, спрямовані вздовж вісі координат <math>\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}</math>. Їхні координати <math>\vec{i}(1,0,0), \vec{j}(0,1,0), \vec{k}(0,0,1)</math>.</p> <p><math>\vec{d}</math> можна розкласти по трьом некопланарним векторам: <math>\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}</math>.</p> <p>Кожний вектор <math>\vec{a}(a_1, a_2, a_3)</math> представлений у вигляді: <math>\vec{a}(a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}</math>.</p> <p><u>Проекція вектора на вісь</u> – це довжина напрямленого відрізка прямої, кінці якого – основи перпендикулярів, що проведені із початку і кінця вектора на вісь координат, причому зі знаком «+» або «-» залежно від того, гострий або тупий кут між віссю і вектором.</p> <p><u>Кут між вектором і віссю (або між двома векторами)</u> – найменший кут, на який треба повернути вектор, щоб його напрямок співпав з напрямком вісі.</p> <p><math>np_x(\vec{a} + \vec{b}) = np_x\vec{a} + np_x\vec{b};</math></p> <p><math>a_x =  \vec{a}  \cos \alpha, a_y =  \vec{a}  \cos \beta =  \vec{a}  \sin \beta;</math></p> <p><math>a_x + b_x = x(\vec{a} + \vec{b})</math> – проекція суми векторів на кожну вісь дорівнює сумі проєкцій вихідних векторів.</p> |

Якщо вектор утворює з віссю ОХ кут  $\varphi$ , то проєкція вектора на вісь – це добуток модуля вектора на  $\cos \varphi$ :

$$pr_x \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi$$

$$pr_e m \vec{a} = m \cdot pr_e \vec{a}$$

$$pr_a \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$$

*Властивості:*

1. Рівні вектори мають рівні проєкції на одну вісь:

$$pr_l \vec{a} = pr_l \vec{b}, \text{ якщо } \vec{a} = \vec{b}.$$

2. Проєкція суми векторів дорівнює сумі проєкцій векторів на цю вісь:  $pr_l(\vec{a} + \vec{b}) = pr_l \vec{a} + pr_l \vec{b}$ .

$$pr_l \vec{b}.$$

3.  $pr_l(\lambda \vec{a}) = \lambda pr_l \vec{a}$ ,

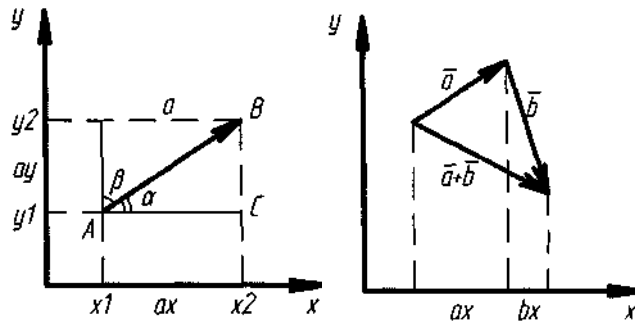
де  $\lambda$  – дійсне число.

4. Гострий кут  $\varphi$ .

$$pr_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi, \quad \varphi = (\vec{a}, l).$$

5. Проєкція замкненої векторної лінії на вісь є нуль.

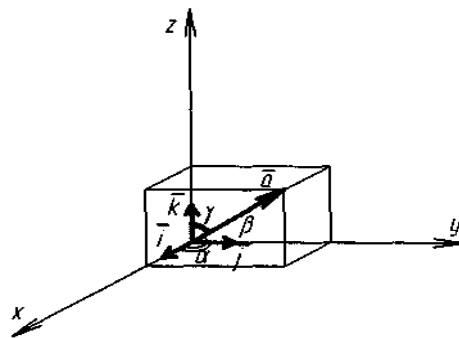
(2 і 3 – лінійні властивості проєкції).



$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$  – діагональ паралелепіпеда, побудованого на своїх проєкціях.

Проєкції вектора на вісі: 
$$\begin{cases} x = a_x = |\vec{a}| \cdot \vec{i} \\ y = a_y = |\vec{a}| \cdot \vec{j} \\ z = a_z = |\vec{a}| \cdot \vec{k} \end{cases}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$



$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$  – розкладання вектора за базисом (на компоненти) або  $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ .  
 $\vec{a} = a \cos \alpha + a \cos \beta + a \cos \gamma$ .

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , де

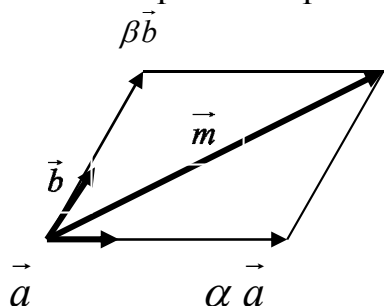
$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} \quad - \quad \text{напрямні}$$

косинуси векторів – це косинуси кутів, що утворюються вектором з осями декартової системи координат.

Радіус-вектор точки A – це вектор  $\vec{OA}$  з початком в точці O (початок координат) і координати якого співпадають з координатами точки A.

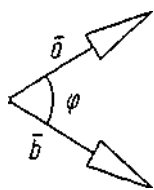
### На площині

$\vec{m}$  – довільний вектор площини.  $\vec{m} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$  – існує розкладання завжди.  $\vec{a}, \vec{b}$  – неколінеарні вектори.



Механічний сенс:

$$A = F \cos \varphi$$



$$\vec{a}(x_1, y_1, z_1) \quad \vec{b}(x_2, y_2, z_2)$$

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = 0$$

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}$$

необхідна і достатня умова колінеарності

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$$

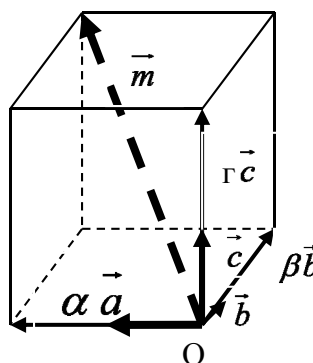
$$\vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b},$$

$$(\vec{a}, \vec{b} \subset \alpha) \perp \vec{c}$$

### Розкладання вектора

#### У просторі

$\vec{m}$  – довільний вектор простору  
 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  – некопланарні вектори  
 Існує завжди розкладання:  $\vec{m} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$



### Скалярний добуток векторів

- 1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$  – добуток модулів векторів на косинус кута між ними;
- 2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$  – сума добутків відповідних координат;
- 3)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = b \cdot \text{пр}_b \vec{a}$ .

Властивості:

- 1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$ ;
- 2)  $\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}$ ;
- 3)  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$ ;
- 4)  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2, \quad \cos(\vec{a}, \vec{a}) = \cos 0 = 1$ .

#### 5) умова перпендикулярності:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{або} \quad x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0,$$

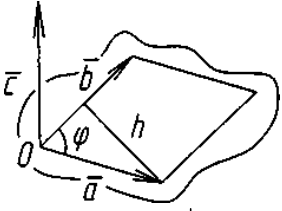
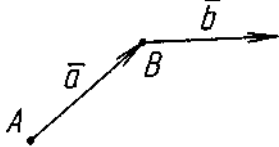
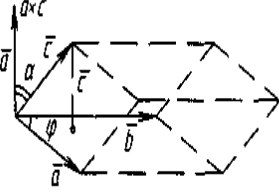
$$\text{оскільки} \quad \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0;$$

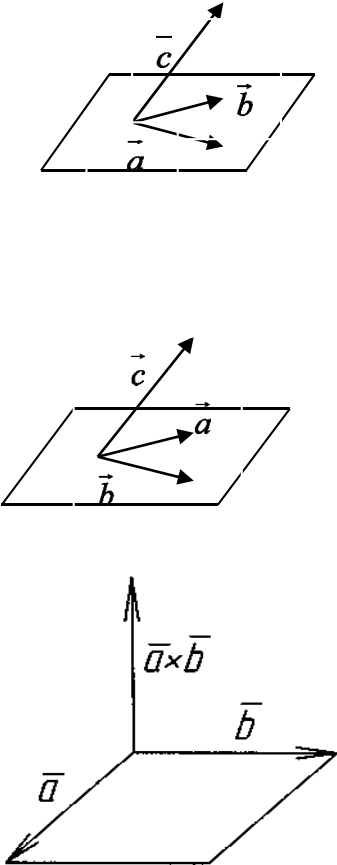
#### 6) умова паралельності:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \left( \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \right).$$

Скалярний добуток використовується для знаходження кута між векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$ $ \vec{a} \times \vec{b}  =  \vec{a}  \cdot  \vec{b}  \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b}).$ <p><i>Механічна інтерпретація</i> – це момент вектора <math>\vec{b}</math> відносно точки А.</p> $M_A(\vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}$  | <p style="text-align: center;"><b>Векторний добуток векторів</b></p> <p><b>Векторний добуток двох векторів</b> – це інший вектор <math>\vec{a} \times \vec{b}</math>, перпендикулярний до площини, що утримує вектори <math>\vec{a}, \vec{b}</math>, який задовольняє умови:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) довжина <math>\vec{a} \times \vec{b}</math> дорівнює добутку довжин векторів <math>\vec{a}</math> і <math>\vec{b}</math> на синус кута між ними;</li> <li>2) вектор векторного добутку <math>\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}</math> перпендикулярний до обох векторів <math>\vec{a}</math> і <math>\vec{b}</math>;</li> <li>3) <math>\vec{a} \times \vec{b}</math> спрямований так, що вектори <math>\vec{a}, \vec{b}</math> і <math>\vec{a} \times \vec{b}</math> мають ту саму орієнтацію, що і вектори базису.</li> </ol> <p style="text-align: center;"><i>Властивості:</i></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Порядок множників важливий.</li> <li>2. <math>\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}</math>.</li> <li>3. <math>\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}</math>.</li> <li>4. <math>(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})</math>.</li> </ol> |
| $S_{\text{пар.}} =  \vec{a} \times \vec{b} ,$ $S_{\Delta} = \frac{1}{2}  \vec{a} \times \vec{b} $                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <p>Векторний добуток використовується для <b>обчислення площі паралелограма</b>, побудованого на двох неколінеарних векторах.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| $\vec{a} \neq 0, \quad \vec{b} \neq 0$ $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <p style="text-align: center;"><b>Умова колінеарності</b></p> <p>Вектор, перпендикулярний до площини, в якій розташовані <math>\vec{a}</math> і <math>\vec{b}</math>, спрямований в сторону, суміщення одного вектора з другим, буде здаватися минаючим проти годинникової стрілки (величина його чисельно дорівнює площі паралелограма на векторах).</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \pm V$                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | <p><b>Мішаний добуток трьох векторів:</b> це скалярно-векторний добуток трійки векторів. <math>(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}</math>. Результат скалярного множення векторного добутку двох векторів на третій.</p> $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = V_{\text{пар.}}$ $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} =  \vec{a}  \cdot  \vec{b}  \cdot \sin \alpha, \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{d} \cdot \vec{c} =  \vec{d}  \cdot  \vec{c}  \cdot \cos \varphi$ $\vec{a}(x_1, y_1, z_1), \vec{b}(x_2, y_2, z_2), \vec{c}(x_3, y_3, z_3)$ <p><b>Трійка векторів</b> – три вектори, для яких визначений порядок наступності.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |

|                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                    | <p>Трійка некомпланарних векторів <math>\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}</math> <b>права (ліва)</b>, якщо після перенесення їх до спільного початку розташовується вектор <math>\vec{c}</math> по той бік від площини, обумовленої векторами <math>\vec{a}, \vec{b}</math>, звідки здається, що найкоротший поворот від <math>\vec{a}</math> до <math>\vec{b}</math> проти годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою).</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|  | <p><b>Властивості мішаного добутку:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Порядок множників важливий: при круговій перестановці векторів їхній добуток незмінний, при перестановці двох множників – змінює знак на протилежний.</li> <li>2. <b>Умова компланарності:</b> <math>(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0</math>.<br/> <math>\vec{a} \times \vec{b}</math> є ортогональним площині векторів <math>\vec{a}</math> і <math>\vec{b}</math>, тобто <math>\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{c}</math>.</li> <li>3. <math>(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0</math>, якщо хоча б один вектор дорівнює нулю.</li> <li>4. <math>(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})</math>.</li> </ol> <p>Мішаний добуток використовується для <b>обчислення об'єму паралелепіпеда</b>, побудованого на трьох некомпланарних векторах.</p> <p>Геометрична інтерпретація:</p> $V_{\text{пар.}} =  (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} .$ <p><b>Праві системи координат</b> – системи, базисні вектори яких утворюють праву трійку.</p> |

## 5.5. Опорний конспект лекцій в таблицях на тему «Аналітична геометрія»

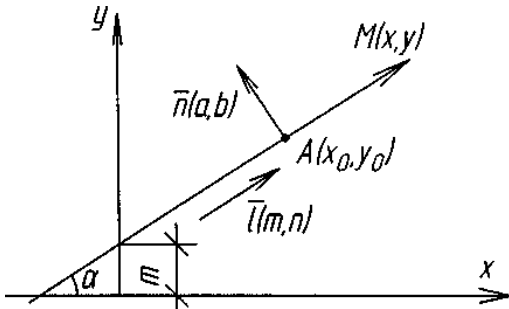
|                                                                |                                                                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Виникла в XVII ст. <b>Декарт</b> (фр.).                        | геометричні об'єкти вивчають засобами алгебри на основі методу координат, не вводячи іншу вісь                                                                                                      |
| <b>Ферма</b> (фр. юрист), 1636 р. XVIII ст.                    | система координат, сучасна координатна система                                                                                                                                                      |
| <b>Лагіра</b> (фр.), <b>Лакруа</b> (фр.)                       | розвинув координати в просторі, ввів термін «аналітична геометрія»                                                                                                                                  |
| <b>Ейлер</b> (швейц.), <b>Кеплер</b> (нім.), <b>Монж</b> (фр.) | видали повний курс математики (у дев'яти томах)                                                                                                                                                     |
| <b>Шухов</b> (рос. інженер)                                    | отримав канонічні рівняння поверхонь другого порядку; займався кривими другого порядку, довів, що існує лише дев'ять поверхонь другого порядку; довів застосування поверхонь другого порядку (вежі) |

### Основні поняття

| Основним методом аналітичної геометрії є метод координат |                                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Основні задачі аналітичної геометрії</i>              | складання рівняння об'єкта геометричного, який розглядають як геометричне місце точок; дослідження і побудова об'єкта геометричного за його рівнянням                           |
| <i>Найпростіші задачі аналітичної геометрії</i>          | 1) знаходження відстані між двома точками;<br>2) ділення відрізка у заданому відношенні                                                                                         |
| <b>Найпростіші геометричні образи</b>                    | точки, прямі, площини, криві, поверхні другого порядку;<br>кожна точка на площині ототожнюється з упорядкованою парою, а в просторі – з трійкою чисел – координатами цієї точки |

### Найпростіші задачі аналітичної геометрії

|                                               |                                                                                                                                                                                                                                                      |
|-----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Відстань між двома точками</b>             | $ M_1M_2  = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$<br>для $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$                                                                                                                                 |
| <b>Ділення відрізка в заданому відношенні</b> | $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$ . Точка $M(x; y; z)$ поділяє відрізок $M_1M_2$ в даному відношенні:<br>$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$ |

|                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Точка <math>M</math> ділить відрізок навпіл:</b>                                                                                                                                                            | $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>Вісь</b>                                                                                                                                                                                                    | пряма лінія з вказаним на ній напрямком                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <b>Напрямлений</b>                                                                                                                                                                                             | відрізок на вісі, якщо вказано, яка з його граничних точок є початком і є кінцем                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Нульовий відрізок</b>                                                                                                                                                                                       | напрямлений відрізок, коли точки початку і кінця збігаються                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>Величина напрямленого відрізка</b>                                                                                                                                                                          | це число, що дорівнює довжині відрізка зі знаком «+», коли напрямок відрізка збігається з напрямком вісі, та зі знаком «-» – в іншому випадку                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <b>Рівні</b>                                                                                                                                                                                                   | два ненульові напрямлені відрізки, якщо їх можна сумістити накладанням                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <b>Рівняння лінії на площині – рівняння зі змінними <math>x</math> та <math>y</math>, якому задовольняють координати будь-якої точки цієї лінії і не задовольняють координати точки, що не належить лінії.</b> | <p><b>Пряма на площині</b><br/> Пряма на площині визначається точкою та напрямком.</p>  <p>Напрямок задається:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) нормальним вектором <math>\bar{n}(a, b)</math>, перпендикулярним до прямої;</li> <li>2) напрямним вектором <math>\bar{l}(m, n)</math> паралельним до <math>\alpha</math>.</li> </ol> <p><b>Напрямяючий вектор</b> – це вектор, що не дорівнює нулю, спрямований вздовж прямої <math>l</math>.</p> |

### **Пряма на площині**

| <i>Найпростіша лінія на площині – пряма.</i> |                                                                                                                                               |
|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Вид рівняння</b>                          | <b>Назва та позначення</b>                                                                                                                    |
| $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$                | рівняння прямої, що проходить <b>через точку <math>M_0(x_0; y_0)</math> перпендикулярно</b> до заданого нормального вектора $\bar{n}(a, b)$   |
| $ax + by + c = 0$                            | <b>загальне рівняння прямої</b> , де $a, b$ – координати перпендикуляра $\bar{n}$ до прямої                                                   |
| $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$      | <b>канонічне рівняння</b> прямої. $M_0(x_0; y_0) \in l$ , $(m, n)$ – координати напрямного вектора $\bar{l}$ , який паралельний до прямої $l$ |

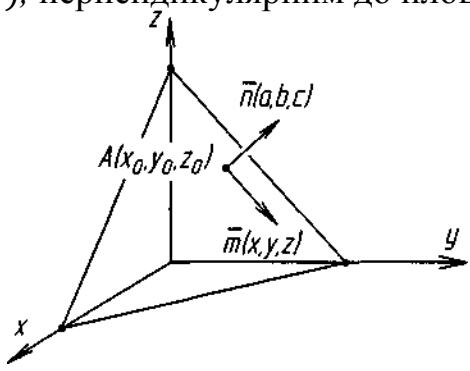
|                                                                                 |                                                                                                                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$                                 | рівняння прямої, що проходить <b>через дві точки</b> $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$ , $k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$                                                                    |
| $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$                                                 | <b>рівняння прямої у «відрізках»;</b><br>на вісі $Ox$ відрізок $a = -\frac{C}{A}$ на вісі $Oy$ – відрізок $b = -\frac{C}{B}$                                                               |
| $y - y_0 = k(x - x_0)$<br><b>пучок прямих</b><br>$M_0$ – центр пучка            | рівняння прямої, що проходить <b>через точку</b> $M_0(x_0; y_0)$ з <b>кутовим коефіцієнтом</b> $k = tg\alpha$ , де $\alpha$ – кут нахилу прямої до осі $Ox$                                |
| $y = kx + b$                                                                    | рівняння <b>прямої з кутовим коефіцієнтом</b> $k = tg\alpha$ , де $b$ – відрізок, який відтинає пряма на вісі $Oy$                                                                         |
| $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$                        | <b>параметрична форма</b> , де $t$ – параметр $M_0(x_0; y_0) \in l$ , напрямний вектор $\vec{l}(m, n)$                                                                                     |
| $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$                                         | <b>нормальне рівняння прямої</b> , де $\alpha$ – це кут, який утворює нормаль з додатним напрямком осі $Ox$ , $p$ – довжина нормалі                                                        |
| $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – числа, $(x; y)$ – координати кожної точки прямої. | переходячи від загального рівняння до нормального, потрібно:<br>загальне рівняння помножити на $N = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+b^2}}$<br>нормуючий множник (знак брати протилежний знаку $c$ ) |

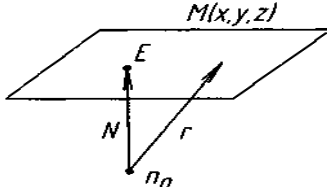
### **Пряма у просторі**

|                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Рівняння лінії в просторі</b> – рівняння зі змінними $x, y, z$ , якому задовольняють координати будь-якої точки цієї лінії і не задовольняють координати точки, що не належить площині. | <p><i>Пряма в просторі визначається точкою та напрямком.</i></p> <p><u>Напрямок задається:</u></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Нормальним вектором <math>\vec{n}(A, B, C)</math> або <math>\vec{n}(a, b, c)</math>, перпендикулярним до площини.</li> <li>2. Направляючим вектором <math>\vec{l}(m, n, p)</math>, паралельним до <math>a</math>.</li> </ol> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

| <i>Найпростіша лінія в просторі – пряма.</i>                              |                                                                                                                                                                                                                         |
|---------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Вид рівняння</i>                                                       | <i>Назва та позначення</i>                                                                                                                                                                                              |
| $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$                                            | рівняння прямої, що проходить <b>через точку</b> $M_0(x_0; y_0; z_0)$ <b>перпендикулярно</b> до $\vec{n}(a, b, c)$ – нормального вектора                                                                                |
| $Ax + By + Cz + D = 0$                                                    | <b>загальне рівняння прямої</b> , де $A, B, C$ – координати перпендикуляра $\vec{n}$ до прямої                                                                                                                          |
| $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$                     | <b>канонічне рівняння</b> прямої. $M_0(x_0; y_0; z_0) \in l$ $(m, n, p)$ – координати напрямного вектора $\vec{l}$ , який паралельний до прямої $l$                                                                     |
| $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$   | рівняння прямої, що проходить <b>через дві точки</b> $M_1(x_1; y_1)$ та $M_2(x_2; y_2)$                                                                                                                                 |
| $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$  | <b>параметрична форма</b> , де $t$ – параметр, $M_0(x_0; y_0; z_0) \in l$ , напрямний вектор $\vec{l}(m, n, p)$                                                                                                         |
| $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s} \cdot t$                                   | <b>векторне рівняння прямої</b> ;<br>$M(x; y; z)$ – координати довільної точки прямої, $\vec{s} = (m, n, p)$ – направляючий вектор прямої, $\vec{r}_0$ – радіус-вектор прямої                                           |
| $a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 + \lambda (a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2) = 0$ | <b>рівняння пучка прямих</b> (через точку перетину двох прямих) з центром в точці $M$<br>$l_1 \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ l_2 \begin{cases} a_2 x + b_2 y + c_2 = 0, \end{cases} \quad l_1 \cap l_2 = M.$ |

### *Площина у просторі*

| <i>Площина в просторі визначається точкою та напрямком.</i> |                                                                                                                                                                                  |
|-------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Вид рівняння</i>                                         | <i>Назва та позначення</i>                                                                                                                                                       |
|                                                             | напрямок задається нормальним вектором $\vec{n}(a, b, c)$ , перпендикулярним до площини.<br> |
| $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$                              | рівняння прямої, що проходить <b>через точку</b> $M_0(x_0; y_0; z_0)$ <b>перпендикулярно</b> до $\vec{n}(A, B, C)$ – до нормального вектора                                      |
| $Ax + By + Cz + D = 0$                                      | <b>загальне рівняння прямої</b> , де $A, B, C$ – координати перпендикуляра $\vec{n}$ до прямої.                                                                                  |

|                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\vec{n}^0 \cdot \vec{r} - p = 0$                                                                                                         | <p><b>у векторній формі</b>, де <math>p</math> – довжина перпендикуляра із <math>O(0;0;0)</math> на площину <math>\varphi</math>.<br/> <math>\vec{n}^0 \cdot (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{\vec{n}}{n}</math> – одиничний вектор, перпендикулярний до площини <math>\varphi</math></p>                                                      |
| $\vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$                       | <p><b>через нормуючий множник</b><br/> <math>N = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}</math>, <math>\vec{n}(A, B, C)</math> – нормальний вектор площини, <math>\vec{r}(x_1; y_1; z_1)</math> <math>M</math> – задана координата точки</p>                                                                                                                     |
| $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$                                                                                             | <p>рівняння прямої у «відрізках»;<br/> на вісі <math>Ox</math> відрізок <math>a = -\frac{D}{A}</math>, на вісі <math>Oy</math> – відрізок <math>b = -\frac{D}{B}</math>, на вісі <math>Oz</math> відрізок <math>c = -\frac{D}{C}</math></p>                                                                                                               |
| $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$                                     | <p>рівняння площини, що проходить через точку <math>M_1(x_1; y_1; z_1)</math>, паралельно до двох некопланарних векторів <math>\vec{a}(a_1; a_2; a_3)</math> і <math>\vec{b}(b_1; b_2; b_3)</math></p>                                                                                                                                                    |
| $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ | <p>рівняння площини, що проходить через три точки <math>M_1(x_1; y_1; z_1)</math>, <math>M_2(x_2; y_2; z_2)</math>, та <math>M_3(x_3; y_3; z_3)</math>, що не лежать на одній прямій що не належать одній прямій<br/> <math>(\Delta = 0) \Leftrightarrow (\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0</math></p> |

### Пряма і площина у просторі

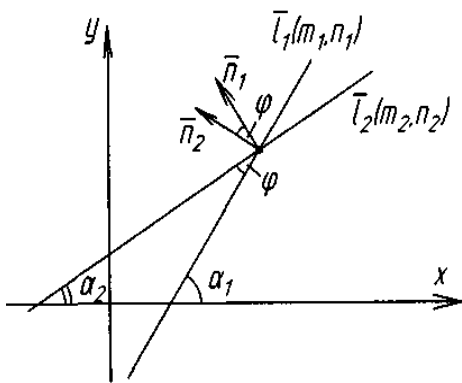
| Вид рівняння                                     | Назва та позначення                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $(Am + Bn + Cp)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0$ | <p><b>Перетин прямої і площини.</b><br/> Задано рівняння площини<br/> <math>Ax + By + Cz + D = 0</math>,<br/> і задане рівняння прямої<br/> <math display="block">\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{cases}</math><br/> Можливі такі випадки:<br/> ➤ <math>Am + Bn + Cp \neq 0</math> – пряма перетинає площину в одній точці.<br/> ➤ <math>Am + Bn + Cp = 0</math>,<br/> <math>Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0</math> – пряма паралельна до площини.<br/> ➤ <math>Am + Bn + Cp = 0</math>,<br/> <math>Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0</math> – пряма належить площині.</p> |

|                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}$                                                       | <p><b>Рівняння прямої, що проходить через точку перпендикулярно до даної площини.</b><br/> Задано координату точки <math>M_1(x_1; y_1; z_1)</math>, і рівняння площини <math>Ax + By + Cz + D = 0</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                            |
| $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$                                                                        | <p><b>Рівняння площини, яка проходить через точку паралельно до заданої площини.</b><br/> Задано координату точки <math>M_0(x_0; y_0; z_0)</math>, і рівняння площини <math>Ax + By + Cz + D = 0</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                             |
| $m(x - x_1) + n(y - y_1) + p(z - z_1) = 0$                                                                        | <p><b>Рівняння площини, яка проходить через точку перпендикулярно до даної прямої.</b><br/> Задано координату точки <math>M_1(x_1; y_1; z_1)</math> і рівняння прямої <math>\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}</math>.</p>                                                                                                                                                                                              |
| $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0$ | <p><b>Рівняння площини, яка проходить через задану пряму і задану точку.</b><br/> Задано координату точки <math>M_1(x_1; y_1; z_1)</math> і рівняння прямої <math>\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}</math>. Тоді вектори <math>\overline{M_0M}, \overline{M_0M_1}, \bar{s}</math> – компланарні, тобто <math>(\overline{M_0M}, \overline{M_0M_1}, \bar{s}) = 0</math>.</p>                                             |
| $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$             | <p><b>Рівняння площини, яка проходить через пряму паралельно до іншої прямої.</b><br/> Нехай площина проходить через пряму <math>\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}</math> і паралельна до прямої <math>\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}</math>. Якщо <math>M(x; y; z)</math> – довільна точка площини, то вектори <math>(\overline{M_1M}, \bar{s}_1, \bar{s}_2)</math> компланарні.</p> |
| $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m & n & p \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$                         | <p><b>Рівняння площини, яка проходить через задану пряму перпендикулярно до заданої площини.</b><br/> Нехай площина проходить через пряму <math>\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}</math> перпендикулярно до площини <math>Ax + By + Cz + D = 0</math>, тоді <math>(\overline{OM}, \bar{s}, \bar{n})</math> компланарні.</p>                                                                                            |

|                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0$ | <p><b>Рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі.</b><br/> Нехай площина проходить через дві паралельні прямі <math>\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}</math> і <math>\frac{x-x_2}{m} = \frac{y-y_2}{n} = \frac{z-z_2}{p}</math>. Тоді вектори <math>\overline{M_1M}</math>, <math>\overline{M_1M_2}</math>, <math>\bar{s}</math> компланарні.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$       | <p><b>Умова, при якій дві прямі лежать в одній площині.</b><br/> Нехай прямі <math>l_1</math> і <math>l_2</math> задані канонічними рівняннями <math>\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}</math> і <math>\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}</math>. Їхні направляючі вектори відповідно <math>\bar{s}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}</math> і <math>\bar{s}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$             | <p><b>Рівняння площини, яка проходить через дві прямі, що перетинаються.</b><br/> Нехай прямі <math>\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}</math> і <math>\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}</math> перетинаються. Тоді вектори <math>\overline{M_1M}</math>, <math>\bar{s}_1</math>, <math>\bar{s}_2</math> компланарні.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| $Ax + By + Cz + D = 0$                                                                                            | <p><b>Дослідження загального рівняння площини:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>D = 0 \Rightarrow Ax + By + Cz = 0</math> – площина проходить через початок координат;</li> <li>2) <math>A = 0 \Rightarrow By + Cz + D = 0</math> площина паралельна до вісі <math>Ox</math>;</li> <li>3) <math>B = 0 \Rightarrow Ax + Cz + D = 0</math> площина паралельно до вісі <math>Oy</math>;</li> <li>4) <math>C = 0 \Rightarrow Ax + By + D = 0</math> площина паралельно до вісі <math>Oz</math>;</li> <li>5) <math>\begin{cases} A = 0 \\ D = 0 \end{cases} \Rightarrow By + Cz = 0: y = -\frac{Cz}{B}</math> площина обертається навколо вісі <math>Ox</math>;</li> <li>6) <math>\begin{cases} B = 0 \\ D = 0 \end{cases} \Rightarrow Ax + Cz = 0: x = -\frac{Cz}{A}</math> площина обертається навколо вісі <math>Oy</math>;</li> <li>7) <math>\begin{cases} C = 0 \\ D = 0 \end{cases} \Rightarrow Ax + By = 0: x = -\frac{By}{A}</math> площина обертається навколо вісі <math>Oz</math>;</li> <li>8) <math>\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow Cz + D = 0: z = -\frac{D}{C} = const</math> площина проходить паралельно до площини <math>xOy</math>;</li> </ol> |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p>9) <math>\begin{cases} A = 0 \\ C = 0 \end{cases} \Rightarrow By + D = 0: y = -\frac{D}{B} = \text{const}</math><br/> площина проходить паралельно до площини <math>xOz</math>;</p> <p>10) <math>\begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases} \Rightarrow Ax + D = 0: x = -\frac{D}{A} = \text{const}</math><br/> площина проходить паралельно до площини <math>yOz</math>.</p> <p>Якщо в рівнянні площини відсутня хоча би одна з координат, то площина паралельна до цієї вісі.</p> |
|--|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

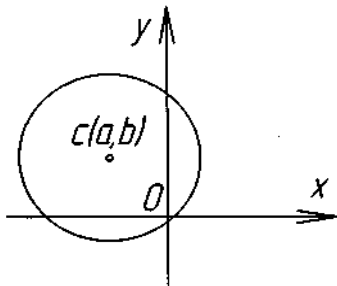
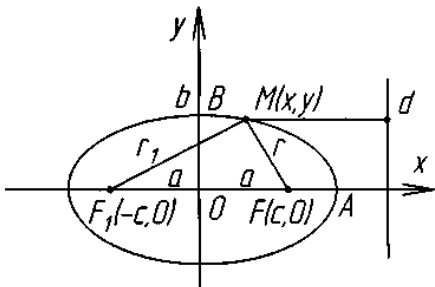
### Кути на площині і у просторі. Умови паралельності і перпендикулярності

| Вид рівняння                                                                                                                                                                         | Назва та позначення                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\cos \beta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{ \vec{n}_1  \cdot  \vec{n}_2 } = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$ | <p><b>Кути у просторі</b></p> <p><b>Між прямими</b> – між їхніми нормальними або направляючими векторами <math>\varphi = \angle(l_1, l_2)</math></p> $l_1: \frac{x - a_1}{m_1} = \frac{y - b_1}{n_1} = \frac{z - c_1}{p_1},$ $l_2: \frac{x - a_2}{m_2} = \frac{y - b_2}{n_2} = \frac{z - c_2}{p_2}$  |
| $\cos \alpha = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$                                                                  | <p><b>Між площинами</b> – між їхніми нормальними векторами:</p> <p><math>\alpha_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0,</math><br/> <math>\alpha_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0,</math><br/> <math>\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}</math> і<br/> <math>\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}</math><br/> <math>\vec{n}_1 \cdot \vec{r} + D_1 = 0, \vec{n}_2 \cdot \vec{r} + D_2 = 0</math></p>     |
| $\sin \alpha = \frac{ \vec{n} \cdot \vec{l} }{ \vec{n}  \cdot  \vec{l} } = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$                                 | <p><b>Між прямою та площиною</b> – між прямою і її проекцією на площину</p> <p><math>\alpha: Ax + By + Cz + D = 0,</math><br/> <math>l: \frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}.</math></p>                                                                                                                                                                                        |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2}$ $\cos \varphi = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$ $\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + l_1 l_2}{\sqrt{m_1^2 + l_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + l_2^2}}$ | <p><b>На площині</b></p> <p>Між прямими <math>\varphi = \angle(l_1, l_2)</math> – між їхніми нормальними або напрямлюючими векторами:</p> $l_1: \begin{cases} y = k_1 x_1 + b_1, \\ a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \end{cases}$ $l_2: \begin{cases} y = k_2 x_2 + b_2, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0. \end{cases}$ <p>Якщо <math>l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}, l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}</math>,<br/>то <math>\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}</math>.</p> |
| <b>Умова паралельності на площині</b>                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$                                                                                                                                                                                                                                                             | Якщо задані<br>$l_1: a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$<br>$l_2: a_2 x + b_2 y + c_2 = 0.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$                                                                                                                                                                                                                                                             | Якщо $l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}, l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| $k_1 = k_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Якщо $l_1: y = k_1 x_1 + b_1,$<br>$l_2: y = k_2 x_2 + b_2.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>Умова паралельності у просторі</b>                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$                                                                                                                                                                                                                                           | <b>Прямах:</b> $l_1 \parallel l_2$ , якщо задані їхні рівняння<br>$l_1: \frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{p_1},$<br>$l_2: \frac{x-a_2}{m_2} = \frac{y-b_2}{n_2} = \frac{z-c_2}{p_2}.$                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$                                                                                                                                                                                                                                           | <b>Площин:</b> $\alpha_1 \parallel \alpha_2$ , якщо<br>$\alpha_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0,$<br>$\alpha_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| $Am + Bn + Cp = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                              | <b>Прямої та площини:</b> $l \parallel \alpha$<br>$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0,$<br>$l: \frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <b>Умови перпендикулярності на площині</b>                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                         | Прямі: $l_1 \perp l_2$ . Якщо<br>$l_1: a_1 x + b_1 y + c_1 = 0,$<br>$l_2: a_2 x + b_2 y + c_2 = 0.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| $m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                         | Якщо $l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}, l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| $k_1 \cdot k_2 = -1$                                                                                                                                                                                                                                                                            | Якщо $l_1: y = k_1 x_1 + b_1,$<br>$l_2: y = k_2 x_2 + b_2.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |

| <b>Умови перпендикулярності у просторі</b>                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$                                                                                                          | <p><b>Прямі:</b> <math>l_1 \perp l_2</math>, якщо задані рівняння</p> $l_1: \frac{x-a_1}{m_1} = \frac{y-b_1}{n_1} = \frac{z-c_1}{p_1},$ $l_2: \frac{x-a_2}{m_2} = \frac{y-b_2}{n_2} = \frac{z-c_2}{p_2}.$                                                                                                                                           |
| $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$                                                                                                          | <p><b>Площини:</b></p> $\alpha_1 \perp \alpha_2$ , якщо задані рівняння<br>$\alpha_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0,$<br>$\alpha_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0.$                                                                                                                                                                             |
| $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$                                                                                                  | <p><b>Прямі та площини:</b></p> $l \perp \alpha$<br>$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0,$<br>$l: \frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}.$                                                                                                                                                                                                          |
| <b>Відстань на площині</b>                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| $d = \frac{ ax_0 + by_0 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}} > 0$                                                                                       | <p><b>Від точки <math>M_0(x_0; y_0)</math>, до прямої <math>ax + by + c = 0</math></b> довжина перпендикуляра із <math>M</math> до прямої.</p>                                                                                                                                                                                                      |
|                                                                                                                                            | <p><b>Відхилення:</b> <math>\delta = \frac{ax+by+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}, \delta = \pm d.</math><br/> Нормуючий множник <math>M = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}.</math><br/> <math>\bar{n} = (a, b)</math> – довжина вектора. Знак протилежний знаку коефіцієнта <math>c</math> в рівнянні прямої.</p>                                                  |
| <b>Відстань у просторі</b>                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| $d = \frac{ ax_0 + by_0 + cz_0 + d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} > 0$<br><br>$d = \frac{ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} > 0$ | <p><b>Від точки <math>M_0(x_0; y_0; z_0)</math> до <math>ax + by + cz + d = 0</math> прямої.</b><br/> Завжди довжина перпендикуляра із <math>M</math> до прямої.</p> <p><b>Від точки <math>M_0(x_0; y_0; z_0)</math> до площини <math>\alpha: Ax + By + Cz + D = 0</math>.</b><br/> Завжди довжина перпендикуляра із <math>M</math> до площини.</p> |
|                                                                                                                                            | <p><b>Відхилення:</b> <math>\delta = \frac{ax+by+cz+d}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},</math><br/> <math>\delta = \pm d</math><br/> Нормуючий множник<br/> <math>M = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}</math><br/> <math>\bar{n} = (a, b, c)</math> – довжина вектора.<br/> Знак протилежний знаку коефіцієнта <math>d</math> в рівнянні прямої.</p>          |

## Криві другого порядку

|                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>ГМТ</b> – фігура, яка складається із усіх точок площини або простору, що мають певні властивості                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <b>Вид рівняння</b>                                                                                                                                                   | <b>Назва та позначення</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <b>Криві 2-го порядку</b> – це лінії, координати точок яких задовольняють рівняння другого степеня                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ $x^2 + y^2 = R^2$<br><br>$xx_0 + yy_0 = R^2$                                                                                            | <p style="text-align: center;"><b>Коло</b></p> <p>Це геометричне місце точок площини (ГМТ), рівновіддалених від однієї точки – центра.<br/> <math>C(a; b)</math> – центр, <math>R</math> – радіус.<br/> Коло з центром в початку координат <math>O(0; 0)</math>.</p>  <p>Рівняння дотичної до кола в точці <math>M_0(x_0; y_0)</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$<br><br><br><br>$\varepsilon = \frac{r}{d}$ | <p style="text-align: center;"><b>Еліпс</b></p> <p>Це геометричне місце точок (ГМТ), сума відстаней яких від двох точок <math>F</math> і <math>F_1</math> (фокусів) є величина постійна.<br/> <math>O(0; 0)</math> – центр, <math>a, b</math> – піввісі.<br/> <math>a</math> – велика (на <math>Ox</math>), <math>b</math> – мала (на <math>Oy</math>).<br/> 1) якщо <math>a &gt; b</math>, то <math>F</math> і <math>F_1</math> на вісі <math>Ox</math> на відстані <math>c = \sqrt{a^2 - b^2}</math> від початку координат<br/> <math>\frac{c}{a} = l &lt; 1, \frac{c}{b} = l &lt; 1</math> – ексцентриситет;<br/> 2) якщо <math>a &lt; b</math>, то <math>F</math> і <math>F_1</math> на вісі <math>Oy</math> на відстані <math>c = \sqrt{b^2 - a^2}</math> від початку координат;<br/> 3) якщо <math>a = b</math>, то це коло <math>x^2 + y^2 = a^2</math>.</p> <p><b>Директриси еліпса</b></p> 1) якщо $a > b$ $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ – прямі паралельні до малої вісі еліпса, що знаходяться від неї на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ .<br>2) якщо $b > a$ $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$ – прямі паралельні до малої вісі еліпса, що знаходяться від неї на відстані $\frac{b}{\varepsilon}$ . <p>Директриси мають таку властивість: відношення відстаней точки кривої від фокуса і відповідної директриси є величиною сталою і дорівнює ексцентриситету кривої</p> |

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x$$

$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$R = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}$$

$$\text{або } R = \frac{b}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}$$

$$p = \frac{b^2}{a}$$

$$k = \frac{b}{a}, \quad k = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

$$1 - k = \frac{a - b}{a}$$

**Ексцентриситет еліпса**  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  – це відношення відстаней будь-якої точки еліпса до фокуса і відповідної директриси.

$$0 \leq \varepsilon < 1, \quad \varepsilon = \frac{c}{a} \quad (a > b), \quad \varepsilon = \frac{c}{b} \quad (b > a)$$

$$1) \text{ якщо } a > b, \text{ то } \varepsilon = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2};$$

$$2) \text{ якщо } b > a, \text{ то } \varepsilon = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}}$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}, \quad \frac{a}{b} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

**Коло** – частковий випадок еліпса з рівними осями і фокусами в одній точці – центрі кола.

**Фокальні радіуси** – вектори ( $\vec{r}_1$  і  $\vec{r}_2$ ) – відстань точки  $M(x, y)$  еліпса до його фокусів.

**Рівняння дотичної до еліпса в точці**  $M_0(x_0; y_0)$ .

**Рівняння еліпса з центром зміщеного у точку**  $M_0(x_0; y_0)$ .

**Радіус еліпса**  $R$  – це відрізок який з'єднує центр еліпса  $O$  з точкою на еліпсі, причому  $\varepsilon$  – ексцентриситет еліпса,  $\varphi$  – кут між радіусом та великою віссю.

**Фокальний параметр еліпса**  $p$  – відрізок, який виходить з фокуса еліпса та перпендикулярний до великої піввісі.

**Коефіцієнт стиску еліпса (еліптичність)**  $k$  – відношення довжини малої піввісі до великої піввісі. Так, як мала піввісь еліпса завжди менша великої, то  $k < 1$ , для кола  $k = 1$ .

Стисненням еліпса  $(1-k)$  називається величина, яка дорівнює різниці між одиницею та еліптичністю.

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi, \\ y = b \sin \varphi, \end{cases} \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

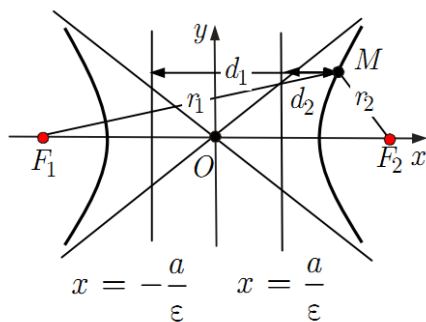
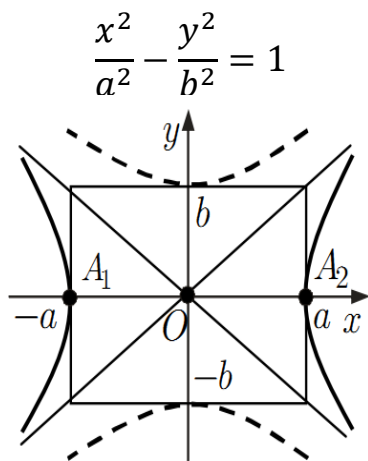
## Параметричне рівняння еліпса.

**Рівняння дотичної до еліпса у точці**  
 $M_0(x_0; y_0)$ .

**Фокально-директоріальна властивість:**  
 віддалі від точки  $M$  до лівої та правої директрис еліпса:

$$d_1 = \left| x + \frac{a}{\varepsilon} \right| = \frac{|\varepsilon x + a|}{\varepsilon} = \frac{r_1}{\varepsilon},$$

$$d_2 = \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right| = \frac{|\varepsilon x - a|}{\varepsilon} = \frac{r_2}{\varepsilon}. \text{ Отже, } \frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon < 1.$$



## Гіпербола

Це геометричне місце точок площини (ГМТ), різниця відстаней яких від двох даних точок  $F_1$  і  $F_2$  (фокусів) є величина постійна:  $2a$  ( $0 < 2a < F_1F_2$ ).  $a, b$  – піввісі.  $F_1(c; 0)$  і  $F_2(-c; 0)$  – фокуси

$|F_1F_2| = 2c$  – **фокусна відстань** (віддаль).

- 1)  $a$  – на дійсній піввісі  $Ox$ ;  $x = \pm a$  – вершина гіперболи,  $b$  – на уявній піввісі  $Oy$ ;
- 2)  $b$  – на дійсній піввісі  $Oy$ ; – вершина гіперболи  $y = \pm b$ .

вісь абсцис – **дійсна (фокальна) вісь**

вісь ординат – **уявна вісь**

$a$  – на уявній піввісі  $Ox$   $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

$c$  – відстань фокуса від початку координат.

$a$  – велика (на  $Ox$ ),  $b$  – мала (на  $Oy$ ).

Відстань точки  $M(x; y)$  від її фокусів – це **фокальні радіуси-вектори** даної точки.

**Фокальний параметр** –  $p = \frac{b^2}{a}$ .

$$r_1 = \begin{cases} a + \varepsilon x, & x > a \\ -a - \varepsilon x, & x < -a \end{cases} \quad r_2 = \begin{cases} -a + \varepsilon x, & x > a \\ a - \varepsilon x, & x < -a \end{cases}$$

$$r_1 - r_2 = \begin{cases} 2a, & x > a \\ -2a, & x < -a \end{cases} \Rightarrow |r_1 - r_2| = 2a$$

– **лівий та правий фокальні радіус-вектори** асимптоти.

Будуємо прямокутник  $x \in [-a; a], y \in [-b; b]$  і його діагоналі – асимптоти, а потім гіперболу, яка перетинає дійсну вісь.

**Фокальна властивість гіперболи:** гіпербола є множиною точок, модуль різниці віддалей яких

$$|r_1 - r_2| = 2a < 2c$$

$$x^2 - y^2 = a^2$$

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$y - y_0 = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$$

$$\begin{cases} x = \pm a \cosh t, \\ y = b \sinh t, t \in R \text{ або} \\ \begin{cases} x = \frac{a}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right), \\ y = \frac{b}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right), |t| \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

від фокусів є сталою величиною, меншою за віддаль між фокусами.

**Ексцентриситет гіперболи**  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  де  $\varepsilon > 1$ .

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Ексцентриситет рівносторонньої гіперболи дорівнює  $\sqrt{2}$ .

Якщо  $a = b$ , то гіпербола називається **рівнобічною**, а рівняння асимптот має вигляд:  $y = \pm x$ .

Рівняння **рівносторонньої** гіперболи, для якої Ох і Оу являються асимптотами, буде мати вигляд:  $y = \frac{k}{x}$  ( $k = \frac{a^2}{2}$ ).

Прямі виду  $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$   $\varepsilon \neq 0$  називаються **директрисами**.

Прямі виду  $y = \pm \frac{b}{a}x$  називаються **асимптотами** гіперболи.

Гіперболи виду  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  і  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$  називаються **спряженими**.

**Рівняння дотичної до гіперболи у точці**  $M_0(x_0; y_0)$ .

**Рівняння гіперболи з центром зміщеного у точку**  $M_0(x_0; y_0)$ .

**Рівняння асимптоти гіперболи.**

**Параметричне рівняння гіперболи.**

**Фокально-директоріальна властивість:**

для гіперболи справедливе співвідношення  $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon > 1$ .

$y^2 = 2px$  – симетрична  
відносно Ох.  $x = -\frac{p}{2}$  –  
директриса.  
 $x^2 = 2py$  – симетрична  
відносно Оу.  $y = -\frac{p}{2}$  –  
директриса.

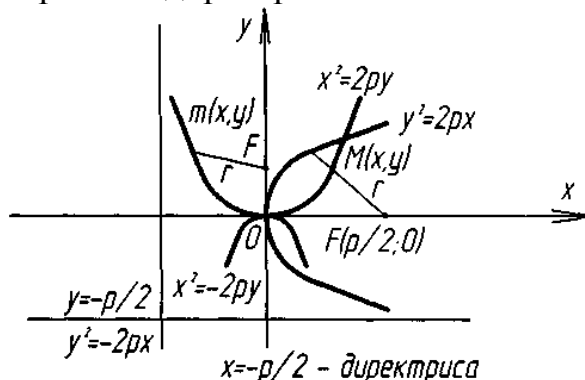
Вершина – в початку  
системи координат  
фокальний радіус-вектор.

$$yy_0 = p(x - x_0)$$

$$r = d$$

### Парабола

Це геометричне місце точок площини, рівновіддалених від даної точки – фокуса і від даної прямої – директриси.



де, число  $p$  – **фокальний параметр**;  
число  $\frac{p}{2}$  – **фокусна відстань** (віддаль);  
вісь абсцис – **фокальна вісь**;  
точка  $O(0; 0)$  – **вершина** параболі;  
точка  $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$  – **фокус**.

Фокус не належить директрисі.

Якщо  $y = Ax^2 + Bx + C$ , де  $A \neq 0$ , то це параболі зі зміщеною вершиною. Вісь симетрії паралельна до Оу або збігається з нею.

$A > 0$  – вітки параболі напрямлені вгору,  $A < 0$  – вітки донизу.

$a = -\frac{B}{2A}$ ,  $b = \frac{4AC - B^2}{4A}$  – координати вершини, де  $F\left(a; b + \frac{p}{2}\right)$ ,  $p = \left|\frac{1}{2A}\right|$ .

Рівняння директрис, які паралельні до Ох, будуть мати вигляд  $y = \pm \frac{p}{2}$ , координати

фокусів відповідно будуть

$$F\left(0; \frac{p}{2}\right) \left[F\left(0; -\frac{p}{2}\right)\right].$$

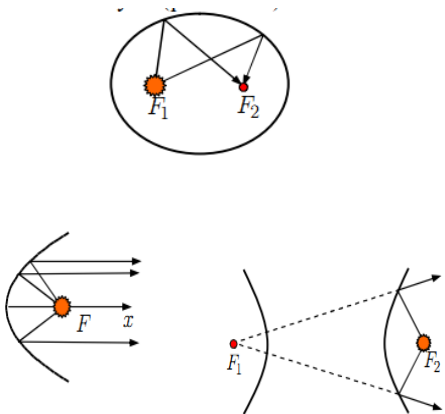
Рівняння директрис, які паралельні до Оу, будуть мати вигляд  $x = \pm \frac{p}{2}$ , координати

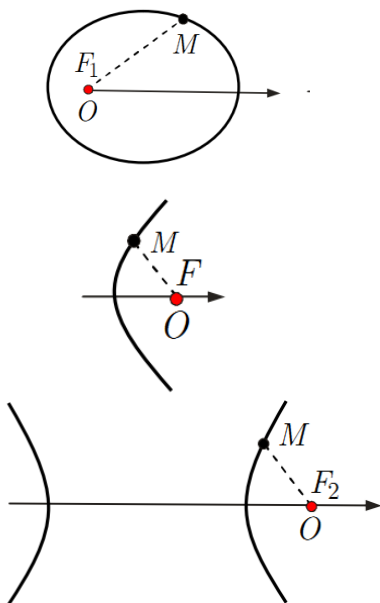
фокусів відповідно будуть

$$F\left(\frac{p}{2}; 0\right) \left[F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)\right].$$

**Фокальний радіус-вектор точки  $M_0(x_0; y_0)$**  параболі визначається рівністю  $r = x + \frac{p}{2}$ .

**Рівняння дотичної** до параболі, що містить точку  $M_0(x_0; y_0)$ .

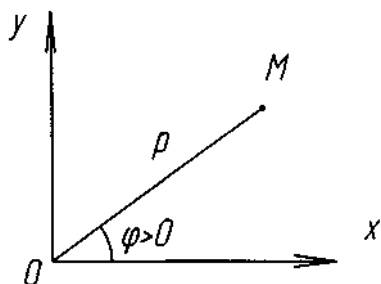
|                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                     | <p>Парабола є множиною точок, які рівновіддалені від фокуса і директриси.</p> <p><b>Фокально-директоріальна властивість:</b><br/> відстань від точки <math>M</math> до директриси параболі має вигляд: <math>d = x + \frac{p}{2} = r</math>, отже <math>\frac{r}{d} = \varepsilon = 1</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|                                                                                     | <p>Для визначення геометричного образу, який описує алгебраїчне рівняння вигляду</p> $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0,$ <p>треба звести його до одного з канонічних рівнянь ліній другого порядку шляхом виділення повних квадратів:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>A = B</math> і одного знаку – це рівняння <b>кола</b>.</li> <li>2. <math>A \neq B</math> і одного знаку – це рівняння <b>еліпса</b>.</li> <li>3. <math>A</math> і <math>B</math> різних знаків – це рівняння <b>гіперболи</b>.</li> <li>4. <math>A = 0</math>, <math>B = 0</math> – це рівняння <b>параболи</b>.</li> </ol>                                    |
|                                                                                     | <p>Якщо рівняння кривої 2-го порядку має вигляд</p> $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$ <p>де <math>A, B, C, D, E, F</math> – довільні дійсні числа, то</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) якщо <math>AC - B^2 &gt; 0</math>, то дана крива є еліпсом;</li> <li>2) якщо <math>AC - B^2 &lt; 0</math> – гіпербола;</li> <li>3) якщо <math>AC - B^2 = 0</math> – парабола.</li> </ol>                                                                                                                                                                                                                                                  |
|                                                                                     | <p>Еліпс, парабола, гіпербола є множинами точок, для яких відношення фокального радіуса <math>r</math> до віддалі точки відповідної директриси <math>d</math> є сталою величиною і дорівнює ексцентриситету <math>\varepsilon</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|  | <p><b>Оптичні властивості кривих</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) Якщо помістити в один з фокусів еліпса точкове джерело світла, то всі промені після відбиття від еліпса зійдуться в іншому його фокусі.</li> <li>2) Якщо помістити у фокус параболі точкове джерело світла, то всі промені, відбиті від параболі, спрямовуються паралельно до фокальної осі параболі. Ця властивість обґрунтовує форму параболічних антен, дзеркал для прожекторів тощо.</li> <li>3) Якщо помістити в один з фокусів гіперболи точкове джерело світла, то кожний промінь після відбиття від гіперболи начебто виходить з іншого фокуса.</li> </ol> |



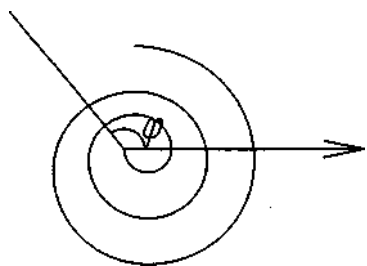
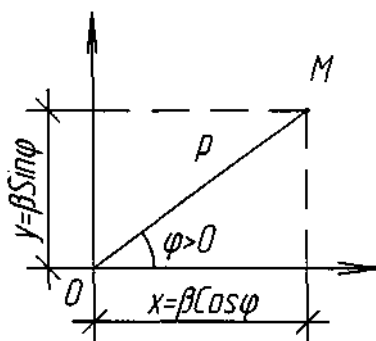
### Рівняння кривих 2-го порядку в полярних координатах

Якщо полюс полярної системи координат вибрати для еліпса в лівому фокусі, параболи – у фокусі, гіперболи – у правому фокусі; полярною віссю вибрати вісь і спрямувати її зліва направо, то еліпс, парабола та права гілка гіперболи в полярних координатах будуть містити таке рівняння

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$



$F(\rho, \varphi) = 0$  – рівняння лінії



### Полярна система координат

Беремо довільну точку  $O$  – полюс та одиницю масштабу. З неї виходить півпряма – полярна вісь.

$OP$  – промінь.

Положення точки  $M$  на площині визначається двома величинами:

- 1)  $\rho$  – радіус-вектор, який більший за нуль, відстань від  $M$  до полюса  $O$ :  $c = OM$ ;
- 2)  $\varphi$  – полярний кут величина кута, утвореного  $[OM]$  з віссю  $\varphi > 0$  проти годинникової стрілки,  $\varphi < 0$  – за годинниковою стрілкою  $\angle \varphi = \angle POM$ ;
- 3) якщо  $0 \leq \varphi \leq \alpha\pi$ , то кожній точці площини (крім  $O$ ) відповідає певна пара чисел  $c$  і  $\varphi$ .

Для полюса  $c = 0$  кут  $\varphi$  – будь-який.

Зв'язок полярних та прямокутних декартових координат

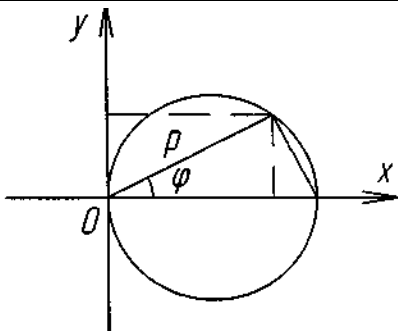
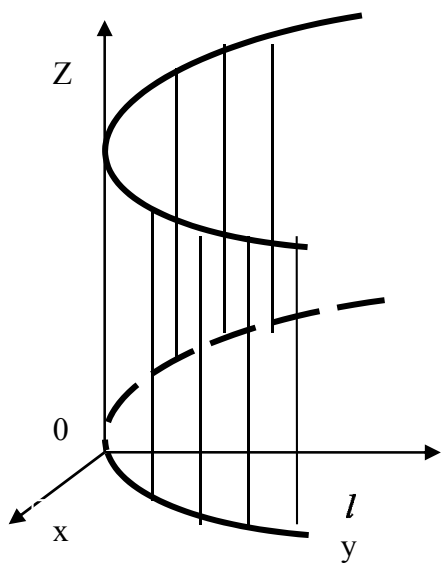
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y}{x}, & \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Відстань між точками:  $A(\rho_1, \varphi_1), B(\rho_2, \varphi_2)$

$$|AB| = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

### Приклади:

- 1)  $c = a = \text{const}$  – коло з центром в  $O$  і  $c = a, x^2 + y^2 = a^2$ ;
- 2)  $c = \alpha\varphi$  – спіраль Архімеда;

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <p>3) <math>c = 2a \cos \varphi</math> – коло з центром в точці <math>c_0 = a, \varphi = 0, R = a</math>,<br/> <math>\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}, x^2 + y^2 - 2ax = 0</math>;</p> <p>4) <math>\rho = a\sqrt{\sin 2\varphi}</math> – лемніската Бернуллі;</p> <p>5) <math>c = 2a \cos^3 \frac{\varphi}{3}</math>;</p> <p>6) <math>c = a(1 + \cos \varphi)</math> – кардіоида</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <p><math>(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2</math><br/> <b>- рівняння сфери</b> з центром <math>M(x_0; y_0)</math> і радіусом <math>R</math>.</p>  <p><b>Приклади:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1</math> еліптична циліндрична поверхня з твірною паралельною <math>Oz</math>.</li> <li>2. <math>\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1</math> гіперболічна циліндрична поверхня з твірною паралельною <math>Ox</math>.</li> <li>3. <math>\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1</math> еліпсоїд обертання навколо вісі <math>Oz</math> (обертається еліпс <math>\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1</math> навколо <math>Oz</math>).</li> <li>4. <math>\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2 + z^2}{c^2} = 1</math> еліпсоїд обертання навколо вісі <math>Oy</math></li> </ol> | <p><b>Поверхні 2-го порядку</b></p> <p>Це такі поверхні, рівняння яких містять хоча б одну з координат <math>x, y, z</math> у другому степені.</p> <p><b>Конічна</b> – поверхня, утворена прямою лінією (твірною), що проходить через задану точку (вершину поверхні) і перетинає задану лінію (напрямну лінію).</p> <p><b>Циліндрична</b> – поверхня, утворена прямою лінією (твірною), що проходить паралельно до заданої прямої <math>L</math> (вісі поверхні) і через задану лінію <math>l</math> (напрямну лінію).</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Твірна паралельна <math>Oz, l \in xOy, \begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}</math></li> <li>2. <math>l \in xOy, \begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = (-\infty; +\infty). \end{cases}</math></li> <li>3. Твірна паралельна <math>Oy, l \in xOz, \begin{cases} F(x, z) = 0, \\ y = 0. \end{cases}</math></li> <li>4. Твірна паралельна <math>Ox, l \in yOz, \begin{cases} F(y, z) = 0, \\ x = 0. \end{cases}</math></li> </ol> <p><b>Правило знаходження рівняння поверхні обертання:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. У рівнянні лінії обертання залишити незмінною координату, однакову з віссю обертання.</li> <li>2. Другу координату рівняння лінії обертання замінити на <math>\pm\sqrt{\Sigma}</math> квадратів двох інших просторових координат. Застосовується метод перерізу.</li> </ol> <p><b>Застосування кривих та поверхонь обертання:</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Будівництво водонапірних башт та радіощогл (конструкції у формі однополосних гіперболоїдів, їх можна отримати за допомогою прямолінійних твірних металевих стрижнів).</li> </ol> |

|                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>(обертається еліпс <math>\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1</math> навколо <math>Oy</math>).</p> | <ol style="list-style-type: none"> <li>2. У прожекторах, фарах, антенах радіолокаторів (параболоїди обертання, в їхніх фокусах – джерела світла).</li> <li>3. Закони Кеплера (траєкторії руху усіх планет сонячної системи – еліпси. Центр Сонця – в одному із фокусів еліпсів).</li> <li>4. Орбіти штучних супутників Землі залежно від швидкості і відстані (при <math>v = 7,8\text{км/с}</math>, <math>r = 350\text{ км}</math>, 1 космічна швидкість – коло, 2: <math>v = 11\text{км/с}</math> – парабола, при <math>v &gt; 11\text{км/с}</math> – гіпербола).</li> </ol> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## 5.6. Опорний конспект лекцій в таблицях на тему «Вступ до математичного аналізу»

|                                                   |                                                                                                     |
|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV–V ст. Стародавній Вавилон                      | ідея функціональної залежності (площа кола $S = 3r^2$ , таблиці тригонометричні, кубів)             |
| XVII ст.<br><b>Декарт, Ферма, Ньютон, Лейбніц</b> | інтуїтивне поняття функції; ідея змінних. 1673 р. Лейбніц ввів поняття «функція», «змінна», «стала» |
| 1718 р. <b>Бернуллі</b>                           | дав означення функції                                                                               |
| 1755 р. <b>Ейлер</b>                              | дав загальне означення функції, яке розвинув М. І. Лобачевський у 1834 р.                           |
| <b>Д'Аламбер, Лакруа</b>                          | аналітичне задання функції                                                                          |
| 1807 р. <b>Фур'є</b>                              | функція, складена різними формулами на різних інтервалах; обґрунтував Коші у 1821 р.                |
| 1817 р. <b>Больцано</b>                           | функція – залежність, задана законом                                                                |
| 1837 р. <b>Діріхле</b>                            | різні способи задання функції; його означення функції існувало до XX ст.                            |
| XIX ст.                                           | виникла теорія множин                                                                               |
| XX ст.                                            | <b>Дірак, Гюнтер, Шварц, Соболев, Гельфанд, Шилов</b> розвинули теорію функцій                      |

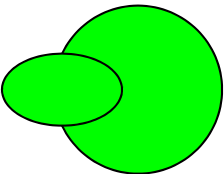
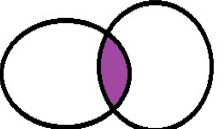
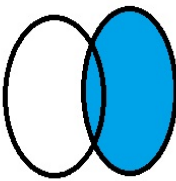
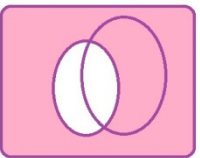
### *Характеристики змінних величин*

|                                       |                                                                                                                                                |
|---------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Величина</b>                       | те, що можна виразити в певних одиницях і характеризувати числовим значенням (змінні або постійні, розмірні або безрозмірні)                   |
| <b>Властивості величин</b>            | 1) додавати та віднімати можна величини лише однієї розмірності;<br>2) множити та ділити можна величини будь-якої розмірності                  |
| <b>Параметр</b>                       | якщо величина зберігає постійне значення лише в умовах даного процесу                                                                          |
| <b>Розмірність простору</b>           | кількість незалежних параметрів (вимірів), необхідних для опису стану об'єкта або кількості ступенів вільності фізичної чи абстрактної системи |
| <b>Постійна</b>                       | величина, числове значення якої за певних умов не змінюється                                                                                   |
| <b>Змінна</b>                         | величина, яка за певних умов може приймати різні значення. Це числа впорядкована множина                                                       |
| <b>Характеристики змінних величин</b> | неперервність (дискретність), монотонність, обмеженість (необмеженість)                                                                        |

## Множини

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Це будь-яка сукупність (клас, сімейство, збір, ....) деяких об'єктів, які об'єднані за будь-яким принципом</b></p> <p>Множина задана, якщо відома характеристика її елементів, яка дає змогу кожний елемент <math>a_i</math> відносити до неї або ні (<math>a \in A, a \notin A</math>). <math>A = \{x\}</math>, <math>A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}</math></p> |                                                                                                                                                                                |
| <b>Потужність множини</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | кількість її елементів                                                                                                                                                         |
| <b>Скінчені множини</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | містять число елементів, які можна порахувати                                                                                                                                  |
| <b>Нескінчені множини</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | містять кількість елементів, які не можна порахувати.                                                                                                                          |
| <b>Порожня (пуста)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | множина, що не містить жодного елемента                                                                                                                                        |
| <b>Множини <math>A</math> і <math>B</math> рівні</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | якщо вони складаються з одних і тих самих елементів                                                                                                                            |
| <b>Підмножина множини <math>A</math></b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | це множина $B$ , якщо кожний її елемент є елементом множини $A$ , тобто це сукупність частини елементів основної множини<br>$\forall a \in B, a \in A \Rightarrow B \subset A$ |
| <b>Числові множини</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | елементи яких – дійсні числа<br>$N \subset Z \subset Q \subset R \subset I$ ,<br>де $N$ – натуральні числа, $Z$ – цілі, $Q$ – раціональні, $R$ – дійсні, $I$ – ірраціональні   |
| <p><i>Між множиною дійсних чисел і точками числової прямої існує взаємооднозначна відповідність</i></p>                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                |
| <b>Проміжки</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                |
| <b>Відрізок <math>[a; b]</math> (сегмент)</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | множина $X$ , елементи якої задовольняють нерівності $a \leq x \leq b$                                                                                                         |
| <b>Інтервал <math>(a; b)</math></b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | множина $X$ , елементи якої задовольняють $a < x < b$                                                                                                                          |
| <b>Півінтервали <math>[a; b), (a; b]</math></b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | множина $X$ , елементи якої задовольняють нерівності $a \leq x < b, a < x \leq b$                                                                                              |

## Дії над множинами

| Дія, позначення                                                               | Рисунок                                                                            | Пояснення                                                                         | Приклад                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| <b>Об'єднання</b><br>(сума) $A \cup B$<br>множин                              |   | складається з усіх елементів множин $A$ і $B$ , і лише з них                      | $A = \{1, 2, 3, 4\}$<br>$B = \{7, 8\}$<br>$C = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$ |
| <b>Перетин</b><br>(множення)<br>$A \cap B$ множин                             |   | складається з усіх тих, і лише тих елементів, які належать кожній з даних множин  | $A = \{1, 2, 3, 4\}$<br>$B = \{7, 8, 2, 5\}$<br>$D = \{2\}$          |
| <b>Різниця</b><br>$A \setminus B, (A - B)$<br>множин<br>(відносно доповнення) |   | якщо кожний елемент деякої множини належить множині $A$ і не належить множині $B$ | $A = \{1, 2, 3, 4\}$<br>$B = \{7, 8, 2, 3\}$<br>$C = \{1, 4\}$       |
| <b>Абсолютне доповнення</b><br>$A^c$ або $C_A$                                |  | якщо множина $A$ і $B$ є підмножинами множини $U$ , то різниця $A^c = U - A$      | $A = \{1, 2, 3, 4\}$<br>$B = \{2, 4\}$<br>$C = \{1, 3\}$             |

## Функція

|                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Функція</b>      | це закон $f$ , згідно з яким кожному елементу $x$ (з множини її можливих значень $X$ ) ставиться у відповідність елемент $y$ з множини $Y$ , де $x$ – незалежна змінна (аргумент), $y$ – залежна змінна (функція), $X$ – область визначення, $Y$ – область значення функції, тобто це взаємоднозначна відповідність однієї множини на іншу |
| <b>Однозначна</b>   | функція, якщо кожному значенню аргументу $x$ відповідає одне значення $y$ .                                                                                                                                                                                                                                                                |
| <b>Багатозначна</b> | функція, якщо кожному значенню аргументу $x$ відповідає декілька значень $y$ .                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Явна</b>         | функція, задана формулою $y = f(x)$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <b>Неявна</b>       | функція, задана формулою $F(x, y) = 0$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |

### Область визначення (існування) функції – ОДЗ

| Це сукупність всіх допустимих значень незалежної змінної, тобто це множина дійсних значень $x$ , при яких функція має сенс $D_y = D(f)$ |                               |                                                     |                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| №                                                                                                                                       | Вид функції                   | Обмеження $f(x)$ і $g(x)$ існує                     | Формулювання неможливого                                                  |
| 1                                                                                                                                       | $y = \frac{f(x)}{g(x)}$       | $g(x) \neq 0$                                       | ділення на нуль                                                           |
| 2                                                                                                                                       | $y = \sqrt[k]{f(x)}$          | $f(x) \geq 0$                                       | добування коренів парних степенів з від'ємних чисел                       |
| 3                                                                                                                                       | $y = \lg f(x)$                | $f(x) > 0$                                          | логарифмування від'ємних чисел                                            |
| 4                                                                                                                                       | $y = \log_{f(x)} a, a > 0$    | $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$ | в основі логарифма від'ємні числа та одиниця                              |
| 5                                                                                                                                       | $y = \operatorname{tg} f(x)$  | $f(x) \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$                   | відшукування $\operatorname{tg}$ для аргументів $\frac{\pi}{2}(1 + 2k)$   |
| 6                                                                                                                                       | $y = \operatorname{ctg} f(x)$ | $f(x) \neq \pi k$                                   | відшукування $\operatorname{tg}$ для аргументів $\pi k, k \in \mathbb{Z}$ |
| 7                                                                                                                                       | $y = \arcsin f(x)$            | $ f(x)  \leq 1$                                     | відшукування $\arcsin$ для аргументів $ f  > 1$                           |
| 8                                                                                                                                       | $y = \arccos f(x)$            | $ f(x)  \leq 1$                                     | відшукування $\arccos$ для аргументів $ f  > 1$                           |
| 9                                                                                                                                       | $y = x^n, n \in \mathbb{R}$   | $x$ – будь-яке                                      | лише для $n$ – натуральне можливе                                         |
|                                                                                                                                         |                               | $x \neq 0$                                          | лише для $n$ – ціле від'ємне можливе                                      |
|                                                                                                                                         |                               | $x \geq 0$                                          | лише для $n$ – додатне неціле                                             |
|                                                                                                                                         |                               | $x > 0$                                             | лише для $n$ – неціле від'ємне можливе                                    |
|                                                                                                                                         | $y = x^n, n \in \mathbb{I}$   | $x \geq 0$                                          | піднесення до степеня з ірраціональним показником від'ємних чисел         |

### Способи задання функцій

|                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Табличний</b>                      | недолік – не можна задати функцію цілком                                                                                                                                                                                                                                              |
| <b>Графічний</b>                      | у певній системі координат                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <b>Аналітичний</b>                    | формулою (явний чи неявний, параметричний)                                                                                                                                                                                                                                            |
| <b>Словесний</b>                      | дається правило додавання функції;<br>наприклад, функція Діріхле:<br>$y = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x - \text{раціональне} \\ 0, & \text{якщо } x - \text{іраціональне} \end{cases}$ $D_y = (-\infty; +\infty), E_y = \{0; 1\};$<br>зобразити графічно функцію немає можливості |
| <b>За допомогою мов програмування</b> | за допомогою комп'ютера або інших технічних засобів навчання                                                                                                                                                                                                                          |

## Класифікація функцій

| Елементарні функції                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>функції, отримані з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа алгебраїчних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення) і суперпозиції функцій (взяття функції від функції)</i> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <b>Степенева</b> $y = x^n$                                                                                                                                                                                   | $n$ – дійсне число                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <b>Показникова</b> $y = a^n$                                                                                                                                                                                 | $a > 0, a \neq 1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>Експоненціальна</b> $y = e^x$                                                                                                                                                                             | $e \approx 2,7182 \dots$                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| <b>Логарифмічна</b> $y = \log_a x$                                                                                                                                                                           | $a > 0, a \neq 1$ (натуральна $y = \ln x$ )                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>Тригонометрична</b>                                                                                                                                                                                       | $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x,$<br>$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}, y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$                                                                                                                                                          |
| <b>Обернено тригонометричні</b>                                                                                                                                                                              | $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x,$<br>$y = \operatorname{arcctg} x$                                                                                                                                                                                                                            |
| <b>Гіперболічні</b>                                                                                                                                                                                          | $sh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, ch = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$<br>$thx = \frac{shx}{chx}, cthx = \frac{chx}{shx}$                                                                                                                                                                                                          |
| Алгебраїчні функції (мають чотири арифметичні операції)                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| <b>Ціла раціональна функція</b>                                                                                                                                                                              | це многочлен $n$ степеня<br>$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$<br>де $a_0, a_1, \dots, a_n$ – дійсні числа, $n$ – ціле                                                                                                                                                                              |
| <i>Корінь многочлена</i>                                                                                                                                                                                     | таке значення змінної, за якого многочлен перетворюється в нуль $P(x) = 0$                                                                                                                                                                                                                                              |
| <i>Приведений многочлен</i>                                                                                                                                                                                  | коли степінь многочлена визначається найвищим степенем його одночленів<br>$P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$<br>якщо $a_0 = 1$                                                                                                                                                                     |
| <i>Теорема Д'Аламбера, уточнив Гаус</i>                                                                                                                                                                      | доводить існування кореня у многочлена, не даючи методів знаходження його                                                                                                                                                                                                                                               |
| <i>Теорема Безу</i>                                                                                                                                                                                          | якщо число $a$ – корінь многочлена $P(x)$ , то цей многочлен без залишку ділиться на $(x - a)$ і навпаки<br>$P_n(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n);$<br>якщо серед коренів є рівні, то вони кратні:<br>$m + l + \dots + s = n,$<br>$P_n(x) = a(x - x_1)^m (x - x_2)^l \cdot \dots \cdot (x - x_n)^s$ |
| <b>Дробово-раціональна функція</b>                                                                                                                                                                           | $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_{m-1} x + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n},$<br>де $m \geq 0, n \geq 0, m < n, b_m \neq 0, a_n \neq 0,$<br>$P_m(x), Q_n(x) \neq 0$ – дійсні многочлени.                                                                    |
| <i>Правильний дріб</i>                                                                                                                                                                                       | якщо степінь чисельника менший за степінь знаменника                                                                                                                                                                                                                                                                    |

|                                                                    |                                                                                                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <u>Частинні випадки:</u>                                           | 1) дробово-раціональна $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ;<br>2) обернена пропорційність $y = \frac{k}{x}, y = a_0x^{-n}$                                                |
| <b>Ірраціональна функція</b>                                       | алгебраїчна функція з добування кореня $n$ степеня.                                                                                                            |
| <b>Трансцендентна функція</b>                                      | не є алгебраїчною: $y = a^x, y = x^a$ , де $a$ – ірраціональне, $y = \log_a x$ тригонометричні та обернені тригонометричні                                     |
| <b>Обернена функція</b><br>$x = f^{-1}(y)$                         | якщо $f(x)$ – пряма $D_y = E_{f^{-1}}, E_y = D_{f^{-1}}$ ; графіки прямої і оберненої функцій симетричні відносно прямої $y = x$<br>$y = f(g(y)), x = g(f(x))$ |
| <b>Складна функція (суперпозиція функцій – композиція функцій)</b> | $f \circ g \neq g \circ f$ , де $z$ – проміжний аргумент; це результат послідовного застосування функцій                                                       |

### Характеристики функцій

|                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|---------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Неперервність або дискретність</b> | 1) функція $f(x)$ , визначена в точці $x = x_0$ та в її околі <i>неперервна</i> при $x = x_0$ , якщо нескінченно малому приросту аргументу $\Delta x$ в точці $x = x_0$ відповідає нескінченно малий приріст $\Delta y$ ;<br>2) якщо функція $f(x)$ неперервна в кожній точці інтервалу $(a, b)$ , то вона <i>неперервна</i> в інтервалі $(a, b)$ ;<br>3) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ , якщо вона <i>неперервна</i> в інтервалі $(a, b)$ і на кінцях інтервалу, зліва і справа |
| <i>Теорема Вейєрштраса</i>            | якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ , то вона обмежена на відрізку $[a, b]$ , тобто існують числа $M$ і $m$ , що $m \leq f(x) \leq M$ для усіх $x \in [a; b]$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |

|                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Властивості неперервних функцій</i> | 1) алгебраїчна сума та добуток скінченної кількості функцій, неперервних в точці $x_0$ , є функцією неперервною в $x_0$ ;<br>2) частка скінченної кількості функцій, неперервних в точці $x_0$ , є функцією, неперервною в $x_0$ , якщо дільник при $x = x_0$ не дорівнює нулю;<br>3) неперервна функція від неперервної функції є також функцією неперервною;<br>4) усі основні елементарні функції неперервні в кожній точці своєї $D_y$ ;<br>5) будь-яка елементарна функція неперервна в кожній точці своєї $D_y$ ;<br>6) функція, обернена до неперервної функції, неперервна на цьому інтервалі |
|----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Монотонність</b><br><i>Зростаюча</i><br><i>Спадна</i>                  | функція $f$ , визначена на множині $A$ якщо:<br>$\forall \{x_1; x_2\} \subset A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$<br>або $\forall \{x_1; x_2\} \subset A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$                                                                                                                                     |
| <b>Обмеженість</b><br>для<br>$\forall x \in A: \exists M > 0:  f(x)  < M$ | функція $f$ , визначена на множині $A$ , обмежена на $A$ , якщо для $\forall x \in A$ :<br>$\forall \{x_1; x_2\} \subset A: x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$                                                                                                                                                                         |
| <b>Парність</b>                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| $f(-x) = f(x)$                                                            | <i>парна</i> , графік симетричний відносно вісі Оу, де $\forall x \in A, \forall (-x) \in A$                                                                                                                                                                                                                                               |
| $f(-x) = -f(x)$                                                           | <i>непарна</i> , графік симетричний відносно початку координат                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $f(-x) \neq \pm f(x)$                                                     | <i>загального вигляду</i> (ні парна, ні непарна)                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <b>Періодичність</b>                                                      | функція $f$ , визначена на множині $A$ , періодична на $A$ , якщо існує число $T$ таке, що $x + T \in A$ та $f(x + T) = f(x), \forall x \in A$ , $T$ – період функції (найменше додатне число)                                                                                                                                             |
| <i>Властивості</i>                                                        | 1) якщо $T$ – період функції $f$ , то число $kT, (k \in \mathbb{N})$ – теж період функції $f$ ;<br>2) якщо функція $y = f(x)$ періодична з періодом $T$ , функція $y = Af(kx + b)$ – теж з періодом $\frac{T}{ k }$ , де $A, k \neq 0, b$ – постійне число;<br>3) композиція $2^x$ періодичних функцій – функція періодична з періодом $T$ |
| Побудови графіка періодичної функції з періодом                           | достатньо побудувати графік на відрізку довжиною $T$ і паралельно перенести його вздовж вісі Ох на відстань $nT, (n \in \mathbb{N})$ ліворуч та праворуч                                                                                                                                                                                   |

### ***Властивості монотонних функцій***

| № | <i>Зростаюча</i>                                                      | <i>Спадна</i>                                                       |
|---|-----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| 1 | більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу із $A$ | меншому значенню функції відповідає менше значення аргументу із $A$ |
| 2 | сума декількох зростаючих функцій – зростаюча функція                 | сума декількох спадних функцій – функція спадна                     |
| 3 | якщо функція зростає, то обернена до неї функція також зростає        | якщо функція спадає, то обернена до неї функція також спадна        |
| 4 | композиція двох зростаючих функцій – функція зростаюча                | композиція двох спадних функцій – функція спадна                    |

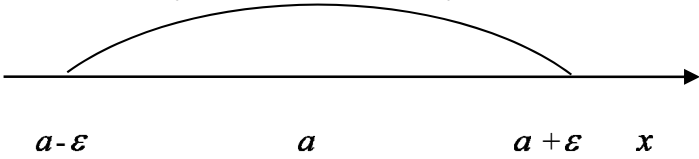
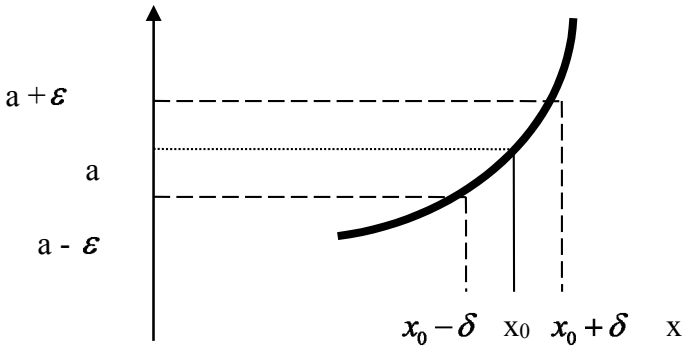
## 5.7. Конспект лекцій в таблицях на тему «Теорія границь»

|                                                        |                                                                                                                                                                                                                                     |
|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| V ст. до н. е.<br><b>Демокріт</b>                      | вчення про неперервне та дискретне; точки – атоми простору, актуально нескінченно малі; площі, об'єми фігур з їхньою допомогою                                                                                                      |
| <b>Архімед, Галілей, Кеплер</b>                        | метод вичерпування нескінченно малих; <b>Кеплер</b> сформулював загальний принцип неперервності                                                                                                                                     |
| 1635 р. <b>Кавал'єрі</b>                               | засновник методу неподільних                                                                                                                                                                                                        |
| XVII ст. <b>Такке, Валліс, Ньютон</b>                  | розвиток і застосування методу границь; 1665 р. <b>Валліс</b> ввів знак $\infty$ , $\frac{1}{\infty} = 0$ , $\frac{1}{0} = \infty$                                                                                                  |
| XVIII ст.<br>1) <b>Лейбніца:</b><br>2) <b>Ньютона:</b> | існувало дві школи:<br><b>Лопіталь, Бернуллі, Ейлер</b> – виходили із вчення про нескінченно малі різниці скінчених величин;<br><b>Валліс, Барроу, Маклорен</b> – із методу флюксій і методу перших та останніх відношень (границь) |
| <b>Ейлер</b>                                           | аналітичний принцип неперервності                                                                                                                                                                                                   |
| 1765 р.<br><b>Д'Аламбер</b>                            | дав перше означення границі послідовності                                                                                                                                                                                           |
| 1798 р. <b>Гур'єв</b>                                  | границя – це <i>const</i>                                                                                                                                                                                                           |
| 1797 р. <b>Карно</b>                                   | ототожнив вчення двох шкіл                                                                                                                                                                                                          |
| <b>Больцано</b>                                        | дав строге означення неперервності, але не видав                                                                                                                                                                                    |
| XIX ст.                                                | синтез нескінченно малих величин і границь                                                                                                                                                                                          |
| <b>Коші</b>                                            | зробив із нескінченно малих функцій і границь фундамент для побудови математичного аналізу; у 1823 р. дав означення границі змінної величини та неперервності функції                                                               |
| 1880 р.<br><b>Вейерштрасс</b>                          | сформулював мовою $\varepsilon, \delta$ сучасне означення границі                                                                                                                                                                   |
| XX ст.                                                 | узагальнена концепція границі                                                                                                                                                                                                       |

### Теорія границь

|                                    |                                                                                                                                                                                           |
|------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Окіл точки <math>x_0</math></b> | інтервал $(a, b)$ , який утримує її                                                                                                                                                       |
| <b>Послідовність</b>               | це множина чисел, яка пронумерована усіма числами натуральними, що розташовані у порядку зростання $\{a_n\}$ або $a_1, a_2, \dots, a_n$                                                   |
| <b>Числова послідовність</b>       | функція натурального аргументу, тобто за деяким законом кожному натуральному числу відповідає число $a_n$ , де числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ – члени послідовності, $a_n$ – загальний член |
| <i>Скінченна</i>                   | послідовність, яка має фіксоване число членів                                                                                                                                             |
| <i>Нескінченна</i>                 | послідовність, яка має нескінченне число членів                                                                                                                                           |

## Означення границі

|                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Границя числової послідовності</b><br>$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ або<br>$x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$ | число $a - \{a_n\}$ , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ наперед заданого і як завгодно малого існує номер $N$ такий, що для усіх $n \geq N$ виконується умова $ x_n - a  < \varepsilon$                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <b>Збіжна</b>                                                                                                                        | послідовність, яка має границю                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <b>Розбіжна</b>                                                                                                                      | послідовність, яка не має границю                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| <i>Геометрична інтерпретація</i>                                                                                                     | <p>число <math>a</math> є границею числової послідовності <math>\{a_n\}</math>, якщо для будь-якого <math>\varepsilon &gt; 0</math>, наперед заданого і як завгодно малого, існує номер <math>N</math>, починаючи з якого (при <math>n \geq N</math>) всі члени послідовності будуть знаходитися в <math>\varepsilon</math> – околі точки <math>a</math>, якою б вузькою вона не була</p>  |
| <b>Границя функції</b><br>$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ або<br>$f(x) \rightarrow a$ при $x \rightarrow \infty$              | число $a$ , що $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$ , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ наперед заданого і як завгодно малого існує число $s > 0$ , $S = S(\varepsilon)$ таке, що для усіх $ x  > S$ виконується умова $ f(x) - a  < \varepsilon$                                                                                                                                                                                                                       |
|                                                                                                                                      | <i>функція визначена в будь-якому околі граничної точки, але не обов'язково визначена в ній</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <i>Геометрична інтерпретація</i>                                                                                                     | число $a$ є границею функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$ , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ , наперед заданого і як завгодно малого, існує $s > 0$ , $S = S(\varepsilon)$ – число таке, що для усіх $ x  > S$ відповідні ординати графіка функції $y = f(x)$ будуть знаходитися в смузі $a - \varepsilon < y < a + \varepsilon$ , якою б вузькою вона не була                                                                                                 |
| <i>Геометрична інтерпретація</i>                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <b>Границя функції</b><br>$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ або<br>$f(x) \rightarrow a$ при $x \rightarrow x_0$                    | число $a - y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ , наперед заданого і як завгодно малого, існує число $\delta > 0$ таке, що для усіх $x \neq x_0$ і які задовольняють нерівності $ x - x_0  < \delta$ виконується умова $ f(x) - a  < \varepsilon$                                                                                                                                                                                       |

|                                                                                                                           | <b>Однобічні границі</b>                                                                                                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Лівостороння границя</b><br>$x_0 - \delta < x < x_0$ ,<br>при $x \rightarrow x_{0-0}$                                  | якщо при $x \rightarrow x_0$ змінна приймає лише значення, менші за $x_0$ або лише більші за $x_0$ , і при цьому функція $f(x) \rightarrow a$ , має місце однобічна границя <b>зліва</b><br>$\lim_{n \rightarrow x_{0-0}} f(x) \rightarrow a$  |
| <b>Правостороння границя</b><br>$x_0 < x < x_0 + \delta$ ,<br>при $x \rightarrow x_{0+0}$                                 | якщо при $x \rightarrow x_0$ змінна приймає лише значення, менші за $x_0$ або лише більші за $x_0$ , і при цьому функція $f(x) \rightarrow a$ , має місце однобічна границя <b>справа</b><br>$\lim_{n \rightarrow x_{0+0}} f(x) \rightarrow a$ |
| якщо $\lim_{n \rightarrow x_{0-0}} f(x) = \lim_{n \rightarrow x_{0-0}} f(x) = a$ , то $\lim_{n \rightarrow x_0} f(x) = a$ |                                                                                                                                                                                                                                                |

### Властивості границь

| Формулювання                                                                                                                                                      | Формули                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| якщо послідовність має границю, то ця границя єдина                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| послідовність, що має границю, є обмеженою                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| <i>теорема Вейєрштрасса</i><br>(існування границі монотонної обмеженої послідовності)                                                                             | 1) якщо послідовність $\{a_n\}$ не спадає і обмежена зверху<br>$a_n \leq M \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq M$ ;<br>2) якщо послідовність $\{a_n\}$ не зростає і обмежена знизу<br>$a_n > M \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq m$                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| якщо послідовність $\{x_n\}$ має границю $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , а послідовність $\{y_n\}$ має границю $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , то | $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b$<br>$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \cdot b$<br>$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b}$<br>$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)^{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = a^b$ |
|                                                                                                                                                                   | якщо $\{x_n\} \leq \{y_n\}$ , то $a < b$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|                                                                                                                                                                   | якщо існує послідовність $x_n \leq z_n \leq y_n$ , де $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ та $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ , то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |

### Основні теореми про границі функцій

| Якщо для функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ , то в точці $a$ :                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\lim_{x \rightarrow a} C = C$ , де $C = \text{const.}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$     |
| $\lim_{x \rightarrow a} Cf(x) = C \lim_{x \rightarrow a} f(x)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ |
| $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f}$                                                                                                                                                                                                                                                                                           | $\lim_{x \rightarrow a} f^n = \left( \lim_{x \rightarrow a} f \right)^n$ , де $n > 0$                                  |
| $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)}$ , де $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \neq 0$                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                        |
| Якщо в околі точки $a$ (або при достатньо великих $x$ )<br>$f(x) \leq \varphi(x)$ , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ або $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$                                                                                                                         |                                                                                                                        |
| Якщо $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ , $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = z_0$ , то $\lim_{x \rightarrow a} f[\varphi(x)] = A$                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                        |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} Cx = \infty$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{C}{x} = -\infty$                                                                       |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{C} = \infty$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{C}{x} = +\infty$                                                                       |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C}{x} = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{C}{x} = \infty$                                                                          |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} C^x = \begin{cases} 0, & 0 < C < 1 \\ +\infty, & C > 1 \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                   | $\lim_{x \rightarrow -\infty} C^x = \begin{cases} 0, & C > 1 \\ +\infty, & 0 < C < 1 \end{cases}$                      |
| $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & 0 < a < 1 \\ +\infty, & a > 1 \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                        | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ +\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$           |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \begin{cases} 0, n < m \\ \frac{a_n}{b_m}, n = m \\ \infty, n > m \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                  | $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$                                                                     |
| Чудові границі                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                        |
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$<br>$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$ $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ |                                                                                                                        |

## Ознаки існування границі

|                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| якщо числова послідовність $\{a_n\}$ монотонна і обмежена, то вона має границю                                                                                                                                                                  |
| якщо в деякому околі точки $a$ (або при достатньо великих $x$ ) функція $f(x)$ між функціями $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ з однаковими границями $A$ при $x \rightarrow x_0$ або $x \rightarrow \infty$ , то функція $f(x)$ має ту саму границю $A$ |

## Нескінченно малі та нескінченно великі

| <i>Нескінченно малі</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <i>Нескінченно великі</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| змінна величина $x$ <b>нескінченно мала</b> , якщо в процесі її зміни настане момент, починаючи з якого, абсолютна величина змінної $x$ стає і залишається менше будь-якого, скільки завгодно малого, наперед заданого додатного числа $\varepsilon$ , тобто $ x  < \varepsilon$                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | змінна величина $x$ <b>нескінченно велика</b> , якщо в процесі її зміни настане момент, починаючи з якого, абсолютна величина змінної $x$ стає і залишається більше будь-якого, скільки завгодно малого, наперед заданого додатного числа $N$ , тобто $ x  > N$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <i>Властивості</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 1) алгебраїчна сума скінченної кількості нескінченно малих величин є величина нескінченно мала;<br>2) добуток сталої величини або обмеженої величини на нескінченно малу величину є величина нескінченно мала;<br>3) добуток скінченної кількості нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.<br><br><i>Границя нескінченно малої величини дорівнює нулю.</i><br><br>Нескінченно малі величини $\alpha$ та $\beta$ <b>одного порядку</b> , якщо їхнє відношення має скінченну границю, що не дорівнює нулю<br>$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = K \neq 0$ . | 1) сума нескінченно великої величини і обмеженої функції є величина нескінченно велика;<br>2) добуток нескінченно великої величини на функцію, границя якої відмінна від нуля, є величина нескінченно велика;<br>3) частка від ділення нескінченно великої величини на функцію, що має границю, є величина нескінченно велика.<br><br><i>Границя нескінченно великої величини дорівнює нескінченності.</i><br><br>Нескінченно великі величини $\alpha$ та $\beta$ <b>одного порядку</b> , якщо їхнє відношення має скінченну границю, що не дорівнює нулю<br>$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\beta} = K \neq 0$ . |
| Функція $\alpha(x)$ – <b>нескінченно мала величина</b> при $x \rightarrow x_0$ або при $x \rightarrow \infty$ , якщо її границя дорівнює нулю: $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ , $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <b>Зв'язок між нескінченно малими та нескінченно великими</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 1) якщо $x$ – нескінченно велика величина, то $y = \frac{1}{x}$ – нескінченно мала величина;<br>2) якщо $x$ – нескінченно мала величина і $y \neq 0$ , то $y = \frac{1}{x}$ – величина нескінченно велика;                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | 3) ділення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих величин не визначене;<br>4) обернена до нескінченно малої є нескінченно велика величина;<br>5) якщо функція $y = f(x)$ має при $x \rightarrow x_0$ або $x \rightarrow \infty$ границю $A$ , то її можна представити у вигляді суми числа $A$ і нескінченно малої $f(x) = A + \alpha(x)$ і навпаки |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### Властивості еквівалентних функцій

|                                                                                                                            |                                                                                                                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Еквівалентні нескінченно малі</b>                                                                                       | величини $\alpha$ та $\beta$ , якщо $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = 1$                                                            |
| <b>Еквівалентні нескінченно великі</b>                                                                                     | величини $\alpha$ та $\beta$ , якщо $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\beta} = 1$                                                            |
| $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$<br>$\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$ | границя відношення двох нескінченно малих функцій не змінюється, якщо чисельник і знаменник замінити еквівалентними нескінченно малими функціями |

**Основні еквівалентності** – формули ліанеризації в околі початку координат

|                                                                                           |                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| $\sin \alpha \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$                                      | $a^u - 1 \sim u \cdot \ln a$ при $u(x) \rightarrow 0$         |
| $\operatorname{tg} \alpha \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$                         | $(1 + u)^k - 1 \sim ku$ при $u(x) \rightarrow 0$              |
| $\arctg \alpha \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$                                    | $\log_a(1 + u) \sim \frac{u}{\ln a}$ при $u(x) \rightarrow 0$ |
| $\arcsin \alpha \sim \alpha$ при $\alpha \rightarrow 0$                                   | $\ln(1 + x) \sim x$ при $x \rightarrow 0$                     |
| $\sqrt[k]{1 + u} \sim 1 + \frac{u}{k}$                                                    | $e^u - 1 \sim u$ при $u(x) \rightarrow 0$                     |
| При $x \rightarrow \infty$ : $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} \dots + a_{n-1} x + a_n \sim a_0 x^n$ |                                                               |

### Обчислення границь

|                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ не залежить від того, чи визначена функція в граничній точці                                                                                                                                   |                                                                                 |
| граничний перехід при $x \rightarrow \infty$ завжди можна замінити граничним переходом при $\alpha \rightarrow 0$ , якщо за нову незалежну змінну прийняти величину, обернену до початкової змінної, тобто $\alpha = \frac{1}{x}$ |                                                                                 |
| $\infty$ – не є числом, це символічна рівність                                                                                                                                                                                    |                                                                                 |
| Способи обчислення                                                                                                                                                                                                                | Формулювання                                                                    |
| метод безпосередньої підстановки граничного значення                                                                                                                                                                              | для елементарних функцій при $a \in D_f$ : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ |
| застосування чудових границь                                                                                                                                                                                                      | шляхом приведення виразу до вигляду чудових границь                             |
| застосування еквівалентностей                                                                                                                                                                                                     | спрощення виразу за допомогою еквівалентних формул                              |

|                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>позбавлення від невизначеностей:</b><br/> <math>\left\{\frac{0}{0}\right\}, \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}, \{0^0\}, \{1^\infty\}</math><br/> <math>\{\infty^0\}, \{\infty - \infty\}, \{0 \cdot \infty\}</math></p> | <p>невизначеність відбувається від того, що формула <math>f(x)</math> утрачає сенс при <math>x = a</math>;<br/> <b>теорема Безу</b> дає змогу позбутися невизначеностей <math>\left\{\frac{0}{0}\right\}, \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}</math>.<br/> <b>1. Границя відношення многочленів:</b><br/> 1) при <math>x \rightarrow \infty</math>: поділити чисельник і знаменник на <math>x^m</math>, де <math>m</math> – найбільший степінь многочленів;<br/> 2) при <math>x \rightarrow x_0</math>: чисельник і знаменник розкласти на множники та <b>скоротити на спільний множник</b> <math>(x - c)</math>, оскільки, але ніколи з ним не збігається <math>x \neq x_0, x - x_0 \neq 0</math>.<br/> <b>2. Позбутися ірраціональності</b> шляхом добутку та ділення на сполучене значення.<br/> <b>3.</b> <math>\{\infty^0\}, \{0 \cdot \infty\}, \{0^0\}</math> перетворюють до <math>\left\{\frac{0}{0}\right\}, \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}</math>.<br/> <b>4.</b> <math>\lim_{x \rightarrow \infty} [u(x)]^{v(x)} = e^k</math>, де<br/> <math>k = \lim_{x \rightarrow \infty} v(x) \cdot [u(x) - 1]</math>.<br/> <b>5.</b> <math>\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)[f(x)-1]}</math> або<br/> <math>\lim_{x \rightarrow x_0} [u]^v = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v[u-1]}</math>.<br/> <b>6.</b> <math>\{1^\infty\}</math> зводимо до другої чудової границі.<br/> <b>7.</b> <math>\{\infty - \infty\}</math>. Якщо корені вище другого степеня, то має сенс поділити обидва корені на другий та винести за дужки, потім замінити корінь еквівалентним значенням.</p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### **Неперервність функції**

|                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Функція <math>f(x)</math><br/> <b>неперервна в точці</b><br/> <math>x_0</math>, якщо вона</p>     | <p>1) визначена в точці <math>x_0</math> і в деякому її колі та існує значення <math>f(x_0)</math>;<br/> 2) існує границя <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A</math>, незалежно від способу прямування їх до <math>x_0</math>;<br/> 3) <math>A = f(x_0)</math></p> |
| <p>Функція <math>y = f(x)</math><br/> <b>неперервна в точці</b><br/> <math>x_0</math>, якщо вона</p> | <p>визначена в точці <math>x_0</math> і в деякому її колі та нескінченно малому прирості, аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, такий, що <math>\Delta y</math> – приріст функції, що є нескінченно малою величиною від <math>\Delta x</math></p>    |
| <p>Функція <math>y = f(x)</math><br/> <b>неперервна на <math>(a, b)</math></b></p>                   | <p>якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу</p>                                                                                                                                                                                                             |

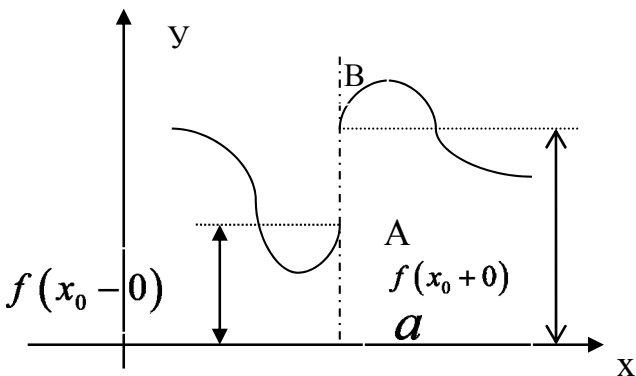
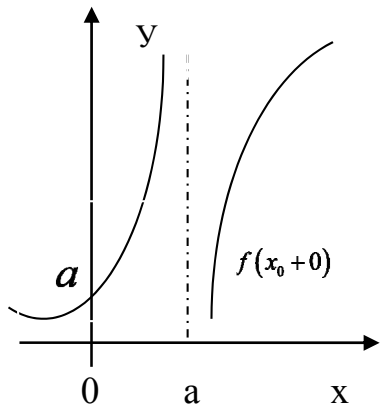
|                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><i>Конструктивне визначення</i><br/>(необхідна і достатня умова неперервності функції)</p> | <p>функція <math>y = f(x_0)</math> неперервна в точці <math>x_0</math>, якщо виконуються такі умови:</p> <p>1) існує <math>f(x_0)</math>, якщо <math>f(x)</math> визначена в <math>x_0 \in D_f</math> і в її околі;</p> <p>2) існує ліва границя функції в точці <math>x_0</math><br/> <math>\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)</math>;</p> <p>3) існує права границя функції в точці <math>x_0</math><br/> <math>\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)</math>;</p> <p>4) виконується рівність: <math>f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = a</math>;</p> <p>5) виконується рівність <math>f(x_0) = a</math></p> |
| <p><b>Функція розривна в точці <math>x_0</math></b></p>                                       | <p>якщо вона визначена в як завгодно близьких точках, але не в точці <math>x_0</math>, тобто коли хоча б одна з умов не виконується</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |

### Точки розриву функції

це точки, в яких функція не є неперервною, тобто якщо функція неперервна в околі точки  $x_0$ , але не є неперервною саме в точці  $x_0$ :

- 1) функція  $y = f(x_0)$  невизначена;
- 2) не існує границя  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ;
- 3) існує границя  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , але вона не збігається зі значенням функції в цій точці  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$

### Класифікація точок розриву

| 1 порядку                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 2 порядку                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>точка <math>x_0</math>, якщо не виконується хоча б одна з умов 1, 4, 5,</p>  <p>якщо лівостороння границя функції і правостороння існують, але вони не рівні між собою<br/> <math>f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)</math>;<br/> <b>стрибок функції:</b> <math>f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)</math> або</p> |  <p>точка <math>x_0</math> – якщо не існує або нескінченна хоча б одна з границь функції зліва або справа у точці <math>x_0</math>,<br/> <b>неусувний розрив (нескінченний)</b></p> |

|                                                                                                                                                                                                                |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| $\left  \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \right $ – усувний стрибок,<br>якщо стрибок дорівнює нулю, якщо $f(x_0)$ не існує; якщо $f(x_0)$ існує, то це <b>ізолювана точка</b> |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|

***Правила відшукування точок розриву***

|                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Елементарна функція</b><br>може мати розрив, якщо                        | 1) тільки в окремих точках, але не може бути розривною у всіх точках будь-якого інтервалу;<br>2) тільки в точках, де вона невизначена, якщо вона визначена хоча б з однієї сторони від цієї точки в як завгодно близьких до неї точках |
| <b>Неелементарна функція</b>                                                | може мати розриви як в точках, де вона не визначена, так і в точках, де вона визначена                                                                                                                                                 |
| <b>Функція, задана різними формулами</b> для різних інтервалів змінення $x$ | може мати розриви саме в точках, де змінюється її аналітичний вираз                                                                                                                                                                    |

## 6. ОПИТУВАЛЬНІ ЛИСТИ (допуск до лекцій)

Заповнювати опитувальні листи в колонці «Код відповіді»

**Тема «Лінійна алгебра»**

| № з/п | Запитання                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Код відповіді |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| 1     | Визначники – це:<br>а) число у вигляді довільної таблиці числових або літерних значень;<br>б) число у вигляді квадратної таблиці числових або літерних значень;<br>в) прямокутна таблиця числових або літерних значень                                                                                                                                                                                                       |               |
| 2     | Детермінант позначається:<br>а) $A, B, \dots$ ;<br>б) $ a ,  b $ ;<br>в) $ A ,  B , \Delta$ ;<br>г) $(A), (B), (\Delta)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |               |
| 3     | Матриці – це:<br>а) число у вигляді довільної таблиці числових або літерних значень;<br>б) число у вигляді прямокутної таблиці;<br>в) довільна таблиця числових або літерних значень;<br>г) квадратна таблиця, яку можна обчислити                                                                                                                                                                                           |               |
| 4     | Матриці позначаються:<br>а) $ A ,  B , \Delta$ ;<br>б) $(a), (b), \Delta$ ;<br>в) $ A ,  B , (a_{ij})$ ;<br>г) $ a ,  b ,  a_{ij} ,  b_{ij} $                                                                                                                                                                                                                                                                                |               |
| 5     | Добуток прямокутних матриць існує:<br>а) завжди;<br>б) $A_{m \times n} \cdot B_{k \times p}$ , якщо $n = k$ ;<br>в) $A_{m \times n} \cdot B_{k \times p}$ , якщо $n \neq k$ ;<br>г) $A_{m \times n} \cdot B_{k \times p}$ , якщо $m = p$                                                                                                                                                                                     |               |
| 6     | Для знаходження оберненої матриці застосовують:<br>а) алгебраїчні доповнення елементів прямокутної матриці, $ A $ та операцію транспонування;<br>б) алгебраїчні доповнення елементів квадратної матриці, $\frac{1}{ A }$ та операцію транспонування;<br>в) мінори елементів квадратної матриці, $ A $ та операцію множення матриць;<br>г) мінори елементів будь-якої матриці, $ A $ та операцію піднесення матриці у степінь |               |

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |  |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| 7  | <p>Ранг матриці – це:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) порядок будь-якого ненульового мінору;</li> <li>b) порядок найвищого ненульового мінору;</li> <li>c) порядок найвищого нульового мінору;</li> <li>d) будь-який визначник із елементів матриці</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |  |
| 8  | <p>Система лінійних алгебраїчних рівнянь – це:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) сукупність будь-якої кількості рівнянь;</li> <li>b) сукупність нескінченної кількості будь-яких рівнянь;</li> <li>c) сукупність скінченної кількості лінійних рівнянь;</li> <li>d) сукупність однорідних рівнянь</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                         |  |
| 9  | <p>Теорема Кронекера–Капеллі: «Для сумісної системи лінійних рівнянь необхідно і достатньо...»:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) <math>r(A) = r(A^*)</math>, де <math>A</math> – матриця, <math>A^*</math> – розширена матриця;</li> <li>b) <math>r(A) &gt; r(A^*)</math>, де <math>A^*</math> – матриця, <math>A</math> – розширена матриця;</li> <li>c) <math>r(A) \neq r(A^*)</math>, де <math>A</math> – матриця, <math>A^*</math> – розширена матриця;</li> <li>d) <math>r(A) &lt; r(A^*)</math>, де <math>A^*</math> – матриця, <math>A</math> – розширена матриця</li> </ul> |  |
| 10 | <p>Необхідність мати однакову кількість рівнянь і змінних:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) для методу Гауса і методу оберненої матриці;</li> <li>b) для методу Крамера і методу оберненої матриці;</li> <li>c) для методу Гауса і правила Крамера</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |  |
| 11 | <p>Сутність методу Гауса полягає у:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) складанні і обчисленні визначників;</li> <li>b) розв’язанні матричного рівняння;</li> <li>c) методі послідовного виключення невідомих;</li> <li>d) знаходженні оберненої матриці</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |  |
| 12 | <p>Сутність методу Крамера полягає у:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) складанні і обчисленні визначників;</li> <li>b) розв’язанні матричного рівняння;</li> <li>c) методі послідовного виключення невідомих;</li> <li>d) знаходженні оберненої матриці</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |  |

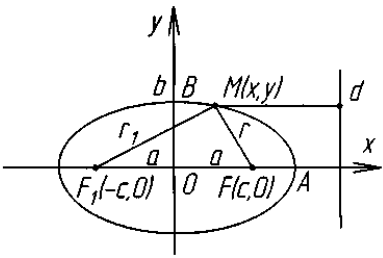
### Тема «Векторна алгебра»

| № з/п | Запитання                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Код відповіді |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| 1     | Вектор – це:<br>а) величина скалярна (характеризується модулем);<br>б) величина, яка характеризується числовим значенням і напрямком;<br>с) відрізок, довжина якого дорівнює одиниці                                                                                                              |               |
| 2     | Додавати та віднімати вектори можна за правилом:<br>а) квадрата;<br>б) трикутника;<br>с) паралелограма;<br>д) прямокутника                                                                                                                                                                        |               |
| 3     | Скалярний добуток векторів застосовується для:<br>а) визначення кута між прямими та площинами;<br>б) обчислення площі паралелограма;<br>с) обчислення об'єму паралелепіпеда                                                                                                                       |               |
| 4     | Векторний добуток векторів застосовується для:<br>а) визначення кута між прямими та площинами;<br>б) обчислення площі паралелограма;<br>с) обчислення об'єму паралелепіпеда                                                                                                                       |               |
| 5     | Мішаний добуток векторів застосовується для:<br>а) визначення кута між прямими та площинами;<br>б) обчислення площі паралелограма;<br>с) обчислення об'єму паралелепіпеда                                                                                                                         |               |
| 6     | Площа паралелограма, побудованого на векторах, обчислюється за формулою:<br>а) $S =  \vec{a} \times \vec{b} $ ;<br>б) $S =  \vec{a} \cdot \vec{b} $ ;<br>с) $S =  (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} $ ;<br>д) $S =  \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} $                                              |               |
| 7     | Площа трикутника, побудованого на векторах, обчислюється за формулою:<br>а) $S = \frac{1}{2}  \vec{a} \times \vec{b} $ ;<br>б) $S = \frac{1}{2}  \vec{a} \cdot \vec{b} $ ;<br>с) $S = \frac{1}{2}  (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} $ ;<br>д) $S = \frac{1}{2}  \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} $ |               |

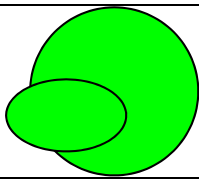
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |  |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| 8  | <p>Об'єм піраміди, побудованої на векторах, обчислюється за формулою:</p> <p>a) <math>V =  \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} </math>;</p> <p>b) <math>V = \frac{1}{2}  \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} </math>;</p> <p>c) <math>V = \frac{1}{6}  \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} </math>;</p> <p>d) <math>V = \frac{1}{3}  \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} </math></p>                                                                                                                                                |  |
| 9  | <p>Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах, обчислюється за формулою:</p> <p>a) <math>V =  \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} </math>;</p> <p>b) <math>V = \frac{1}{2}  \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} </math>;</p> <p>c) <math>V = \frac{1}{6}  \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} </math>;</p> <p>d) <math>V = \frac{1}{3}  \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} </math></p>                                                                                                                                         |  |
| 10 | <p>Проекція вектора <math>\vec{a}</math> на вектор <math>\vec{b}</math> записується за формулою:</p> <p>a) <math>\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} }</math>;</p> <p>b) <math>\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{b} }</math>;</p> <p>c) <math>\text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{b} }</math>;</p> <p>d) <math>\text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} }</math></p> |  |

**Тема «Аналітична геометрія»**

| № з/п | Запитання                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Код відповіді |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| 1     | <p>Пряма на площині визначається:</p> <p>а) точкою та напрямком (нормальним вектором <math>\vec{n}(a, b)</math> або <math>\vec{l}(m, n)</math> напрямним вектором);</p> <p>б) точкою та напрямком (нормальним вектором);</p> <p>с) точкою та напрямком (напрямним вектором)</p>                                              |               |
| 2     | <p>Пряма в просторі визначається:</p> <p>а) точкою та напрямком (нормальним вектором <math>\vec{n}(a, b)</math> або <math>\vec{l}(m, n)</math> напрямним вектором);</p> <p>б) точкою та напрямком (нормальним вектором);</p> <p>с) точкою та напрямком (напрямним вектором)</p>                                              |               |
| 3     | <p>Площина в просторі визначається:</p> <p>а) точкою та напрямком (нормальним вектором <math>\vec{n}(a, b)</math> або <math>\vec{l}(m, n)</math> напрямним вектором);</p> <p>б) точкою та напрямком (нормальним вектором);</p> <p>с) точкою та напрямком (напрямним вектором)</p>                                            |               |
| 4     | $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ визначає: <p>а) рівняння прямої у просторі;</p> <p>б) рівняння площини, що проходить через три точки;</p> <p>с) канонічне рівняння прямої;</p> <p>д) загальне рівняння площини</p> |               |
| 5     | <p>Умова паралельності прямих у просторі:</p> <p>а) <math>m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0</math>;</p> <p>б) <math>\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}</math>;</p> <p>с) <math>Am + Bn + Cp = 0</math>;</p> <p>д) <math>\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}</math></p>                                    |               |
| 6     | <p>Умова перпендикулярності площин:</p> <p>а) <math>m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0</math>;</p> <p>б) <math>\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}</math>;</p> <p>с) <math>Am + Bn + Cp = 0</math>;</p> <p>д) <math>\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}</math></p>                                          |               |
| 7     | <p><math>\delta = \frac{ax+by+cz+d}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}</math> – це формула:</p> <p>а) відстані від точки до прямої на площині;</p> <p>б) відстані від точки до площини;</p> <p>с) відхилення від точки до прямої у просторі;</p> <p>д) відхилення від точки до площини</p>                                               |               |

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |  |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| 8  |  <p>Це:</p> <p>a) еліпс <math>\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1</math>;</p> <p>b) гіпербола <math>y^2 = 2px</math>;</p> <p>c) парабола <math>x^2 = 2py</math>;</p> <p>d) коло <math>(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2</math></p>                                                                                                                                                                                      |  |
| 9  | <p>Поверхнею 2 порядку є рівняння:</p> <p>a) <math>Ax + By + Cz + D = 0</math>;</p> <p>b) <math>Ax^2 + By^2 + Cz + Dx + Ey + F = 0</math>;</p> <p>c) <math>(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2</math>;</p> <p>d) <math>(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2</math></p>                                                                                                                                                                                                                          |  |
| 10 | <p>Канонічне рівняння прямої має вигляд:</p> <p>a) <math>\frac{x}{l} = \frac{y}{m}</math>;</p> <p>b) <math>\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}</math>;</p> <p>c) <math>xl = ym</math>;</p> <p>d) <math>xl + ym = 0</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                          |  |
| 11 | <p>Загальне рівняння площини має вигляд:</p> <p>a) <math>Ax + By + C = 0</math>;</p> <p>b) <math>Ax + By + Cz + D = 0</math>;</p> <p>c) <math>Ax + By + Cz + D = 1</math>;</p> <p>d) <math>\frac{A}{x} + \frac{B}{y} + \frac{C}{z} + D = 0</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                |  |
| 12 | <p>Кут між прямою і площиною визначається за формулою:</p> <p>a) <math>\cos \varphi = \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot \sqrt{m^2+n^2+p^2}}</math>;</p> <p>b) <math>\sin \varphi = \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot \sqrt{m^2+n^2+p^2}}</math>;</p> <p>c) <math>\operatorname{tg} \varphi = \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot \sqrt{m^2+n^2+p^2}}</math>;</p> <p>d) <math>\operatorname{ctg} \varphi = \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot \sqrt{m^2+n^2+p^2}}</math></p> |  |

**Тема «Вступ до математичного аналізу»**

| № з/п | Запитання                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Код відповіді |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| 1     |  <p>а) це перетин множин;<br/> б) це об'єднання множин;<br/> в) це різниця множин;<br/> г) це доповнення множин</p>                                                                                                                                                                                                                                          |               |
| 2     | <p>Функція – це:</p> <p>а) фігура в просторі;<br/> б) дія алгебраїчна;<br/> в) закон про відповідність;<br/> г) перетворення простору</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |               |
| 3     | <p>Обмеженням для області визначення є:</p> <p>а) знаходження <math>tg</math> для аргументів <math>\frac{\pi}{2}(1+2k), k \in Z</math>;<br/> б) логарифмування від'ємних чисел;<br/> в) добування коренів непарних степенів з від'ємних чисел;<br/> г) знаходження <math>arccos</math> для аргументів <math> f  &lt; 1</math></p>                                                                                                             |               |
| 4     | <p>Складна функція – це:</p> <p>а) трансцендентна функція;<br/> б) елементарна функція;<br/> в) ірраціональна функція.<br/> г) композиція функцій</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                         |               |
| 5     | <p>Монотонність функції – це:</p> <p>а) екстремуми функції;<br/> б) обмеженість функції;<br/> в) зростання, спадання функції;<br/> г) періодичність функції</p>                                                                                                                                                                                                                                                                               |               |
| 6     | <p>Яка з формул є чудовою границею:</p> <p>а) <math>\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e</math>;<br/> б) <math>\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e</math>;<br/> в) <math>\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = 1</math>;<br/> г) <math>\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1</math></p> |               |
| 7     | <p>Яка з формул належить до основних еквівалентностей:</p> <p>а) <math>(1 + u)^k \sim ku</math>;<br/> б) <math>a^u \sim u \ln a - 1</math>;<br/> в) <math>(1 + u)^k - 1 \sim ku</math>;<br/> г) <math>\sqrt[k]{1 + u} \sim \frac{u}{k}</math></p>                                                                                                                                                                                             |               |

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |  |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| 8  | <p>Дає змогу позбутися невизначеностей:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) теорема Безу;</li> <li>b) теорема Гауса;</li> <li>c) теорема Вейєрштрасса;</li> <li>d) теорема Д'Аламбера</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |  |
| 9  | <p>Функція <math>f(x)</math> неперервна в точці <math>x_0</math>, якщо вона:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) невизначена в точці <math>x_0</math> і в деякому її колі, та існує значення <math>f(x_0)</math>, та існує границя <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A</math>;</li> <li>b) визначена в точці <math>x_0</math> і в деякому її колі, та існує значення <math>f(x_0)</math>, та існує границя <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A = f(x_0)</math>;</li> <li>c) визначена в точці <math>x_0</math>, і не існує границя <math>\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)</math>.</li> </ul> |  |
| 10 | <p>Точка розриву першого роду:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) якщо односторонні границі існують, і вони однакові;</li> <li>b) якщо односторонні границі існують, але вони різні;</li> <li>c) якщо хоча б одна з односторонніх границь не існує або нескінченна;</li> <li>d) якщо одна з односторонніх границь нескінченна</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                         |  |
| 11 | <p>Точка розриву другого роду:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) якщо односторонні границі існують, але вони різні;</li> <li>b) якщо хоча б одна з односторонніх границь не існує або нескінченна;</li> <li>c) якщо односторонні границі існують, і вони однакові</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |  |
| 12 | <p>Стрибок функції дорівнює:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>a) <math> \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) </math>;</li> <li>b) <math> \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) </math>;</li> <li>c) <math> \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) </math></li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                      |  |

## 7. САМОСТІЙНІ ДОМАШНІ РОБОТИ

Кожний студент отримує індивідуальний варіант роботи, що виконується поетапно. Завдання відповідають змісту модулів і розраховані на відпрацювання певних математичних операцій і дій, на закріплення означень і понять, властивостей і особливостей, а також мають місце і завдання творчого характеру. Після перевірки робіт студенти мають можливість покращити результати шляхом роботи над помилками самостійно або за допомогою однокурсників, які за умови позитивного результату теж отримують заохочувальну оцінку. Приклади варіантів домашніх контрольних робіт наводяться нижче. В додатку А пропонується приклад оформлення одного з домашніх завдань.

| №<br>з / п | ДЗ № 1                                                                                                                                                                                                                      |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1          | Навести конкретні приклади до усіх властивостей визначників і довести їх                                                                                                                                                    |
| 2          | Довести властивість одну або дві властивості для будь-яких стовпців (рядків) в загальному вигляді                                                                                                                           |
| 3          | Обчислити визначник всіма можливими способами: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & -15 \\ 0 & 8 & -6 \end{vmatrix}$                                                                                              |
| 4          | Обчислити визначник будь-яким способом: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$                                                                                |
| 5          | Розв'язати нерівність: $\begin{vmatrix} x & -3 \\ 4 & x-6 \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 5 & 9 \\ x & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} > 32$                                                            |
| 6          | Знайти $A \cdot B$ та $B \cdot A$ , якщо: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -5 \\ -1 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix}$                                                 |
| 7          | Знайти ранг матриці двома способами: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & -3 & 10 \end{pmatrix}$                                                                                              |
| 8          | Розв'язати рівняння $5A + 2X - B = 0$ , якщо<br>$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ |
| 9          | Знайти обернену матрицю відомими Вам способами, якщо<br>$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$                                                                                          |
| 10         | Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь 3 способами (методом Гауса, за правилом Крамера, за допомогою оберненої матриці)<br>$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5; \\ x + y - z = -2; \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$    |

| №<br>з / п | ДЗ № 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1          | Дано координати вершин піраміди: $A(10; 2; -2)$ , $B(-2; 3; 1)$ , $C(8; 7; 10)$ , $D(4; -8; 10)$ . Знайти: 1) довжину ребра $AB$ ; 2) кут між ребрами $AB$ і $AD$ ; 3) кут між ребром $AD$ і гранню $ABC$ ; 4) кут між гранями $ABC$ та $ADC$ ; 5) площу грані $ABC$ ; 6) об'єм піраміди, вершина якої знаходиться у точці $D$ ; 7) довжину висоти, яка виходить із вершини $D$ на грань $ABC$ ; 8) проєкцію точки $D$ на грань $ABC$ ; 9) рівняння прямої, що проходить через вершину $C$ паралельно до $AD$ ; 10) рівняння прямої, що проходить через $B$ перпендикулярно до грані $ADC$ ; 11) скласти рівняння площини, що проходить через вершину $C$ перпендикулярно до ребра $AB$ ; 12) побудувати рисунок піраміди за даними координатами |
| 2          | Визначити та побудувати лінію, рівняння якої має вигляд:<br>$2x^2 + y^2 - 8x + 6y + 1 = 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| 3          | Дослідити лінійну залежність векторів: $\vec{a}(-1; -2; -5)$ , $\vec{b}(5; -2; 4)$ , $\vec{c}(-4; 2; -3)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 4          | Скласти рівняння ГМТ, для яких сума відстаней до точок $A(2; 3)$ і $B(4; 5)$ дорівнює 54                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |

| №<br>з / п | ДЗ № 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1          | Визначити ОДЗ функції:<br>а) $y = \arccos \frac{2x+1}{5}$ ;<br>б) $y = \frac{\ln(2x-1)}{\sqrt{x^2+5x-6}}$ ;<br>в) $y = \frac{\cos x}{\sqrt{9^x-5 \cdot 3^x+6}}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 2          | Обчислити границі:<br>$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x}{2 + x^4}$ ; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4}{x^3 + 2x^2 + x}$ ; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{x^3 - 1}$ ; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3 + 2x}$ ;<br>$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x-1} - x)$ ; $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{x+6} - 2}$ ; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 - 1} \right)^{x^2}$ . |
| 3          | Дослідити функцію на неперервність. Визначити тип точок розриву, якщо вони існують. Побудувати графік функцій<br>а) $f(x) = \frac{1}{x^2(1-x)}$ ; б) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0; \\ 1, & 0 < x < 5; \\ 3x + 1, & x \geq 5. \end{cases}$                                                                                                                                                                                                            |

## 8. КОРЕКЦІЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Допомогти викладачеві організувати та управляти самостійною діяльністю студентів, здійснювати корекцію роботи студента на базі індивідуальних рекомендацій та завдань, з'ясувати питання про сформованість різних алгоритмічних прийомів розв'язування задач та основних розумових дій, що сприяють розвитку творчої діяльності, скоротити час на аналіз помилок у роботі можуть автоматизовані програми корекції знань з вищої математики.

Наша головна ідея полягає в тому, що: до всіх контрольних (або самостійних) робіт можна скласти програми корекції, що вміщують:

- 1) опис можливих помилок студентів;
- 2) рекомендації для виправлення помилок (посилання на теоретичний виклад питання; приклади правильного розв'язування аналогічних задач, вправ).

У процесі розв'язування завдань з вищої математики ми можемо скласти схему поелементного аналізу, яка дасть змогу оцінити кожний логічний крок розв'язання задачі.

Розв'язати систему рівнянь, використовуючи матричний метод:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + y - z = 2. \\ 2x - y - z = 3 \end{cases}$$

Для розв'язання системи рівнянь матричним методом необхідно:

- 1) обчислити  $\det A$ , перевірити що  $\det A \neq 0$ ;
- 2) обчислити алгебраїчні доповнення  $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{33}$ ;
- 3) скласти обернену матрицю  $A^{-1}$ ;
- 4) знайти добуток  $X = A^{-1} \cdot B$ , де  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Невиконання якогось кроку вказує на помилку, яку допускає студент та на яку необхідно вказати, щоб у майбутньому запобігти її появі. У нашому випадку кожний логічний крок розв'язування задачі відповідає коду помилки зі словника помилок.

| Код помилки | Помилки у процесі розв'язування задачі   | Рекомендована теорія        | Рекомендована практика |
|-------------|------------------------------------------|-----------------------------|------------------------|
| 1.1         | не вміє обчислити $\det A$               | лекція 1, визнач. 1.5, с. 6 | с. 127, с. 126, № 15.3 |
| 1.2         | не вміє знаходити алгебраїчні доповнення | лекція 1 визнач. 1.8, с. 8  | С. 132, № 15.13        |
| ...         |                                          |                             |                        |

У першому стовпці зазначається код помилки, перша цифра якого відповідає номеру теми, а друга – номеру помилки. У другому стовпці визначається назва помилки, що може бути допущена студентом. Інші стовпці містять теоретичні та практичні рекомендації до опрацювання та виправлення помилки. Ці вправи і рекомендуються студентам для усунення помилок і закріплення навичок розв'язування задач. Програма корекції наводиться у додатку Д.

## 9. ТЕСТИ ДО АТЕСТАЦІЙНОГО КОНТРОЛЮ

### Тема «Елементи лінійної алгебри. Аналітична геометрія на площині»

#### Тест № 1

1. Визначте вид матриці (прямокутна матриця  $2 \times 3$ , квадратна матриця другого порядку, діагональна матриця третього порядку, одинична матриця третього порядку, нульова матриця  $3 \times 2$ , матриця-стовпець, матриця-рядок):

1)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ ; 2)  $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; 3)  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; 4)  $T = (2 \ 3 \ 4)$ .

2. Задані матриці  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 4 & 18 & 11 \\ -11 & 16 & -15 \end{pmatrix}$ .

Визначити, внаслідок яких дій над матрицями  $A$  і  $B$  була отримана матриця  $C$ , якщо враховувати, що  $A^T$ ,  $B^T$  – матриці, транспоновані до  $A$ ,  $B$ :

1)  $B^T$ ; 2)  $A - B^T$ ; 3)  $2A + 3B^T$ ; 4)  $A + B$ .

3. Знайти кут між прямими  $3x - 4y + 2 = 0$  і  $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3}$ :

1)  $\arccos \frac{17\sqrt{13}}{65}$  або  $\arctg \frac{3}{7}$ ; 2)  $\arccos \frac{17}{5\sqrt{13}}$  або  $\arctg \frac{3}{7}$ ;  
3)  $\arccos 2$  або  $\arctg 2$ ; 4)  $45^\circ$ .

4. Яка з обернених матриць може бути отримана під час розв'язування системи лінійних рівнянь  $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 5x + y + 3z = 14 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases}$  матричним методом:

1)  $A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ; 2)  $A^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ ;

3)  $A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ; 4)  $A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 5 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ .

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь  $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 3x + y - z = 2 \\ 2x - y - z = 3 \end{cases}$  із застосуванням правила Крамера або методу Гауса:

1)  $(1; -1; 0)$ ; 2)  $(1; 1; 1)$ ; 3)  $(0; 0; 0)$ ; 4)  $(0,5; -1; 0)$ .

## Тест № 2

1. Визначте вид матриці (прямокутна матриця  $2 \times 3$ , квадратна матриця другого порядку, діагональна матриця третього порядку, одинична матриця третього порядку, нульова матриця  $3 \times 2$ , матриця-стовпець, матриця-рядок):

1)  $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ; 2)  $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; 3)  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ ; 4)  $T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ .

2. Задані матриці  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ .

Визначити, внаслідок яких дій над матрицями  $A$  і  $B$  була отримана матриця  $C$ , якщо враховувати, що  $A^T$ ,  $B^T$  – матриці, транспоновані до  $A$ ,  $B$ :

1)  $B^T$ ; 2)  $A \cdot B^T$ ; 3)  $2A + 3B^T$ ; 4)  $A + B$ .

3. Знайти кут між прямими  $5x - y + 7 = 0$  і  $2x - 3y + 1 = 0$ :

1)  $\arccos \frac{13}{\sqrt{26 \cdot 13}}$ ; 2)  $\arccos 3$ ; 3)  $\arccos \frac{17}{5\sqrt{13}}$  або  $\arctg \frac{3}{7}$ ; 4)  $45^\circ$ .

4. Яка з обернених матриць може бути отримана під час розв'язування системи

лінійних рівнянь  $\begin{cases} 5x - 4y + 2z = 2 \\ 3x + 7y - 11z = 14 \\ x - y + 8z = 5 \end{cases}$  матричним методом:

1)  $A^{-1} = \frac{1}{345} \begin{pmatrix} 45 & -30 & 30 \\ -35 & 38 & 61 \\ -10 & 1 & 47 \end{pmatrix}$ ; 2)  $A^{-1} = \frac{1}{345} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -35 & 38 & 61 \\ -10 & 1 & 47 \end{pmatrix}$ ;

3)  $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 45 & -30 & 30 \\ -35 & 38 & 61 \\ -10 & 1 & 47 \end{pmatrix}$ ; 4)  $A^{-1} = \frac{1}{345} \begin{pmatrix} 0 & -30 & 30 \\ -35 & 0 & 61 \\ -10 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь  $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 5x + y + 3z = 14 \\ 2x + y + 2z = 5 \end{cases}$  із застосуванням правила Крамера або методу Гауса:

1)  $(2; -5; 3)$ ; 2)  $(1; 1; 1)$ ; 3)  $(0; 0; 0)$ ; 4)  $(1; -5; 3)$ .

### Тест № 3

1. Визначте вид матриці (прямокутна матриця  $2 \times 3$ , квадратна матриця другого порядку, діагональна матриця третього порядку, одинична матриця третього порядку, нульова матриця  $3 \times 2$ , матриця-стовпець, матриця-рядок):

$$1) B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; 2) N = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; 3) L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; 4) T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Задані матриці  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$

Визначити, внаслідок яких дій над матрицями  $A$  і  $B$  була отримана матриця  $C$ , якщо враховувати, що  $A^T, B^T$  – матриці, транспоновані до  $A, B$ :

1)  $B^T$ ;                      2)  $A+B^T$ ;                      3)  $2A+3B^T$ ;                      4)  $A+B$ .

3. Знайти кут між векторами  $\vec{a}(5; -5)$  і  $\vec{b}(9; -1)$ :

1)  $\arccos \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{59}}$ ;                      2)  $\arccos(-3)$ ;                      3)  $\arccos \frac{\sqrt{2950}}{50}$ ;                      4)  $30^\circ$ .

4. Яка з обернених матриць може бути отримана під час розв'язування системи

лінійних рівнянь  $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + y + 4z = 9 \\ 3x + 5y + 2z = 10 \end{cases}$  матричним методом:

1)  $A^{-1} = \frac{1}{41} \begin{pmatrix} -18 & 11 & 5 \\ 4 & -7 & 8 \\ 17 & 1 & -7 \end{pmatrix};$

2)  $A^{-1} = \frac{1}{41} \begin{pmatrix} 8 & 11 & 5 \\ 4 & -7 & 8 \\ 17 & 1 & -7 \end{pmatrix};$

3)  $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -18 & 11 & 5 \\ 4 & -7 & 8 \\ 17 & 1 & -7 \end{pmatrix};$

4)  $A^{-1} = \frac{1}{41} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 5 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь  $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x + y + 4z = 9 \\ 3x + 5y + 2z = 10 \end{cases}$  із застосуванням правила Крамера або методу Гауса:

1)  $(1; -1; 0)$ ;                      2)  $(1; 1; 1)$ ;                      3)  $(0; 0; 0)$ ;                      4)  $(0,5; -1; 0)$ .

### Тест № 4

1. Визначте вид матриці (прямокутна матриця  $2 \times 3$ , квадратна матриця другого порядку, діагональна матриця третього порядку, одинична матриця третього порядку, нульова матриця  $3 \times 2$ , матриця-стовпець, матриця-рядок):

$$1) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; 2) B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & -6 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}; 3) L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; 4) T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

2. Задані матриці  $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 5 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ . Визначити, внаслідок яких дій над матрицями  $A$  і  $B$  була отримана матриця  $C$ , якщо враховувати, що  $A^T$ ,  $B^T$  – матриці, транспоновані до  $A$ ,  $B$ :

$$1) B^T; \quad 2) A \cdot B^T; \quad 3) A^T + B; \quad 4) A + B.$$

3. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку  $C(4; 9)$  паралельно до  $\overline{AD}(1; 2)$ :

$$1) y = \frac{x-4}{2} + 9; \quad 2) \frac{x+4}{1} = \frac{y+9}{2}; \quad 3) \frac{x-4}{1} = \frac{y-9}{2}; \quad 4) \frac{x-4}{2} = \frac{y-9}{1}.$$

4. Яка з обернених матриць може бути отримана під час розв'язування системи лінійних рівнянь  $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases}$  матричним методом:

$$1) A^{-1} = \frac{1}{58} \begin{pmatrix} -23 & -16 & -1 \\ -2 & -14 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix}; \quad 2) A^{-1} = -\frac{1}{58} \begin{pmatrix} 0 & -16 & -1 \\ -2 & -14 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix};$$

$$3) A^{-1} = -\frac{1}{58} \begin{pmatrix} -23 & -16 & -1 \\ -2 & -14 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix}; \quad 4) A^{-1} = -\frac{1}{58} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 5 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь  $\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases}$  із застосуванням правила Крамера або методу Гауса:

$$1) (8; 5; 2); \quad 2) (1; 1; 1); \quad 3) (2; 4; 2); \quad 4) (8; 4; 2).$$

### Тест № 5

1. Визначте вид матриці (прямокутна матриця  $2 \times 3$ , квадратна матриця другого порядку, діагональна матриця третього порядку, одинична матриця третього порядку, нульова матриця  $3 \times 2$ , матриця-стовпець, матриця-рядок):

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}; \quad 2) E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 3) B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \quad 4) T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Задані матриці  $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 5 & 7 \\ 7 & -10 \end{pmatrix}.$

Визначити, внаслідок яких дій над матрицями  $A$  і  $B$  була отримана матриця  $C$ , якщо враховувати, що  $A^T, B^T$  – матриці, транспоновані до  $A, B$ :

$$1) B^T; \quad 2) A-B^T; \quad 3) A^T+2B; \quad 4) A+B.$$

3. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку  $C(3; 5)$  паралельно до  $\overline{AD}(0; 3)$ :

$$1) \frac{0}{x-3} = \frac{3}{y-5}; \quad 2) \frac{x+3}{0} = \frac{y+5}{3}; \quad 3) \text{ не існує}; \quad 4) \frac{x-3}{0} = \frac{y-5}{3}.$$

4. Яка з обернених матриць може бути отримана під час розв'язування системи

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 2x + 6y + 2z = 4 \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases} \text{ лінійних рівнянь матричним методом:}$$

$$1) A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -16 & 11 & 2 \\ 17 & -10 & -1 \\ -27 & 18 & 0 \end{pmatrix};$$

$$2) A^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} -16 & 11 & 2 \\ 17 & -10 & -1 \\ -27 & 18 & 0 \end{pmatrix};$$

$$3) A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 11 & 2 \\ 17 & -10 & -1 \\ -27 & 18 & 0 \end{pmatrix};$$

$$4) A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & -4 & 5 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

5. Розв'язати систему лінійних рівнянь  $\begin{cases} 2x + 4y + z = 4 \\ 3x + 6y + 2z = 4 \\ 4x - y - 3z = 1 \end{cases}$  із застосуванням правила Крамера або методу Гауса:

$$1) (-1; 3; -4); \quad 2) (-2; -3; -4); \quad 3) \text{ несумісна}; \quad 4) (-2; 3; -4).$$

## Тема «Аналітична геометрія у просторі»

### Тест № 1

1. Продовжити формулювання:

Лінійною комбінацією векторів  $a_1, a_2, \dots, a_n$  називається ... .

2. Дана піраміда  $ABCD$ , координати вершин якої:  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(-2; 4; 5)$ ,  $C(3; -4; 2)$ ,  $D(5; 1; 4)$ . Виберіть правильний варіант обчислення об'єму цієї піраміди:

|                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{29}{6} \approx 4,83$ (куб. од.) |
| 2) $V = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 29$ (куб. од.)                                    |
| 3) $V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{54}{6} = 9$ (куб. од.)            |
| 4) $V = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 54$ (куб. од.)                                      |

3. Обчислити площу паралелограма  $ABDC$ , побудованого на векторах  $\overline{AB}, \overline{AC}$ , який заданий координатами вершин  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(-2; 4; 5)$ ,  $C(3; -4; 2)$ ,  $D(5; 1; 4)$ , використовуючи формулу  $S_{ABDC} = |\overline{AB} \times \overline{AC}|$ .

|                 |                            |
|-----------------|----------------------------|
| 1) 297          | 2) $\frac{1}{2}\sqrt{297}$ |
| 3) $\sqrt{297}$ | 4) 15                      |

4. Записати рівняння пучка площин та скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $M(2; 1; -1)$  та пряму  $\begin{cases} 2x + y - 3z + 4 = 0 \\ x - y + z + 3 = 0 \end{cases}$ :

|                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 - \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$<br>$6x - 3y + z + 16 = 0$ |
| 2) $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$<br>$2x - 5y + 7z + 8 = 0$ |
| 3) $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$<br>$2x - 5y + 7z + 8 = 0$                                     |
| 4) $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$<br>$3x - 2z + 7 = 0$               |

## Тест № 2

1. Продовжити твердження:

Якщо у рівнянні площини  $Ax + By + Cz + D = 0$  значення  $D = 0 \dots$

2. Дана піраміда  $ABCD$ , координати вершин якої:  $A(1; -3; 4)$ ,  $B(3; -4; 5)$ ,  $C(2; -7; 2)$ ,  $D(4; -6; 6)$ . Виберіть правильний варіант обчислення об'єму цієї піраміди:

|                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \frac{ -97 }{6} = 16\frac{1}{6}$ (куб. од.) |
| 2) $V = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 3 & -6 & 2 \end{vmatrix} =  -42  = 42$ (куб. од.)                                  |
| 3) $V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 3 & -6 & 2 \end{vmatrix} = \frac{ -42 }{6} = 7$ (куб. од.)             |
| 4) $V = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & -7 & 2 \end{vmatrix} =  -97  = 97$ (куб. од.)                                  |

3. Обчислити площу паралелограма  $ABDC$ , побудованого на векторах  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ , який заданий координатами вершин  $A(1; -3; 4)$ ,  $B(3; -4; 5)$ ,  $C(2; -7; 2)$ ,  $D(4; -6; 6)$ , використовуючи формулу  $S_{ABDC} = |\overline{AB} \times \overline{AC}|$ .

|                 |                            |
|-----------------|----------------------------|
| 1) 110          | 2) $\frac{1}{2}\sqrt{110}$ |
| 3) $\sqrt{110}$ | 4) інша відповідь          |

4. Записати рівняння площини, що проходить через задану точку, та скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $M_1(3; 0; 4)$  та перпендикулярно до  $\overline{M_1M_2}$ , де  $M_2(5; 6; 9)$ :

|                                                                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$<br>$2x - 2y + 2z + 2 = 0$                                                                         |
| 2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$<br>$2x + 6y + 5z - 26 = 0$                                                                                                |
| 3) $Ax + By + Cz + D = 0$<br>$3x + 2y - 3z + 8 = 0$                                                                                                                     |
| 4) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$<br>$4x + 6y + 8z + 10 = 0$ |

### Тест № 3

1. Продовжити формулювання:

Косинус кута між площинами  $\beta_1$  і  $\beta_2$  дорівнює ... .

2. Дана піраміда  $ABCD$ , координати вершин якої:  $A(0; -3; 1)$ ,  $B(2; -1; -2)$ ,  $C(5; -4; 9)$ ,  $D(1; 0; 3)$ . Виберіть правильний варіант обчислення об'єму цієї піраміди:

|                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{ -104 }{6} = 17\frac{1}{3}$ (куб. од.) |
| 2) $V = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 8 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} =  -104  = 104$ (куб. од.)                                 |
| 3) $V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{ 13 }{6} = 2\frac{1}{6}$ (куб. од.)   |
| 4) $V = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 13$ (куб. од.)                                          |

3. Обчислити площу паралелограма  $ABDC$ , побудованого на векторах  $\overline{AB}, \overline{AC}$ , який заданий координатами вершин  $A(0; -3; 1)$ ,  $B(2; -1; -2)$ ,  $C(5; -4; 9)$ ,  $D(1; 0; 3)$ , використовуючи формулу  $S_{ABDC} = |\overline{AB} \times \overline{AC}|$ .

|                  |                   |
|------------------|-------------------|
| 1) 1274          | 2) $\sqrt{56}$    |
| 3) $\sqrt{1274}$ | 4) інша відповідь |

4. Записати рівняння відхилення заданої точки від площини та скласти рівняння площини, яке перпендикулярне до  $\vec{n}(3; 4; 12)$  й знаходиться від точки  $O(0; 0; 0)$  на відстані трьох одиничних відрізків:

|                                                                                                       |                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $\delta = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$<br>$4x + 6y + z \pm 169 = 0$             | 2) $\delta = \pm \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$<br>$3x + 4y + 12z \pm 39 = 0$ |
| 3) $\delta = \pm \frac{ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$<br>$3x + 4y + 12z + 39 = 0$ | 4) $\delta = \pm \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$<br>$3x + 4y + 12z \pm 48 = 0$ |

### Тест № 4

1. Продовжити формулювання:

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, має вигляд ... .

2. Дана піраміда  $ABCD$ , координати вершин якої:  $A(0; -3; 1)$ ,  $B(2; -1; -2)$ ,  $C(5; -4; 9)$ ,  $D(1; 0; 3)$ . Виберіть правильний варіант обчислення об'єму цієї піраміди:

|                                                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \frac{ 11 }{6} = 1 \frac{5}{6}$ (куб. од.) |
| 2) $V = \begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 44$ (куб. од.)                                         |
| 3) $V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{44}{6} = 7 \frac{1}{3}$ (куб. од.)   |
| 4) $V = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 11$ (куб. од.)                                         |

3. Обчислити площу паралелограма  $ABDC$ , побудованого на векторах  $\overline{AB}, \overline{AC}$ , який заданий координатами вершин  $A(-2; 0; 1)$ ,  $B(0; -4; 0)$ ,  $C(1; 5; 5)$ ,  $D(-2; 2; 4)$ , використовуючи формулу  $S_{ABDC} = |\overline{AB} \times \overline{AC}|$ .

|                |                   |
|----------------|-------------------|
| 1) $\sqrt{44}$ | 2) $\sqrt{726}$   |
| 3) 726         | 4) інша відповідь |

4. Записати рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданої прямої та скласти рівняння площини, що проходить через  $M(2; -1; 1)$  й перпендикулярно до прямої

$$\begin{cases} 3x - y - z + 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

|                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$<br>$2x - 2y + 2z + 2 = 0$ |
| 2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$<br>$3x + 7y + 2z - 1 = 0$                         |
| 3) $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$<br>$3x + 7y + 2z - 2 = 0$                                     |
| 4) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) + D = 0$<br>$3x + 7y + 2z + 1 = 0$                     |

## Тест № 5

1. Продовжити твердження:

Якщо у рівнянні площини  $Ax + By + Cz + D = 0$  значення  $B = D = 0 \dots$

2. Дана піраміда  $ABCD$ , координати вершин якої:  $A(3; -1; -4)$ ,  $B(5; -5; 1)$ ,  $C(4; -1; -7)$ ,  $D(9; 0; -3)$ . Виберіть правильний варіант обчислення об'єму цієї піраміди:

|                                                                                                                                                  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $V = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 87 \text{ (куб. од.)}$                                             |
| 2) $V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left  \frac{87}{6} \right  = 14,5 \text{ (куб. од.)}$ |
| 3) $V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 5 & -5 & 1 \\ 4 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \frac{9}{6} = 1\frac{1}{2} \text{ (куб. од.)}$      |
| 4) $V = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 5 & -5 & 1 \\ 4 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 9 \text{ (куб. од.)}$                                           |

3. Обчислити площу паралелограма  $ABDC$ , побудованого на векторах  $\overline{AB}, \overline{AC}$ , який заданий координатами вершин  $A(3; -1; -4)$ ,  $B(5; -5; 1)$ ,  $C(4; -1; -7)$ ,  $D(9; 0; -3)$ , використовуючи формулу  $S_{ABDC} = |\overline{AB} \times \overline{AC}|$ .

|                 |                   |
|-----------------|-------------------|
| 1) $\sqrt{281}$ | 2) $\sqrt{37}$    |
| 3) 281          | 4) інша відповідь |

4. Записати рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до двох площин із відповідними векторами та скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $M_1(3;0;4)$  та перпендикулярно до площин:  $x - y + z - 7 = 0$ ,  $3x + 2y - 12z + 5 = 0$ :

|                                                                                                                                  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$<br>$2x - 2y + 2z + 2 = 0$                                  |
| 2) $Ax + By + Cz + D = 0$<br>$3x + 2y - 3z + 8 = 0$                                                                              |
| 3) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$<br>$2x + 3y + z - 11 = 0$ |
| 4) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$<br>$2x + 6y + 5z - 26 = 0$                                                         |

## Тема «Вступ до математичного аналізу»

### Тест № 1

1. Продовжіть формулювання:

*Послідовність  $\{x_n\}$  називається нескінченно великою, якщо ...*

2. Функція  $y=f(x)$  задана різними аналітичними виразами в різних областях зміни незалежної змінної. Знайти точки розриву, якщо вони існують.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \leq -1 \\ 3x, & -1 < x < 3 \\ 5, & x \geq 3 \end{cases}$$

|    |                                                                |
|----|----------------------------------------------------------------|
| а) | $x=-1, x=3$ – точки розриву першого роду                       |
| б) | $x=-1$ – розрив другого роду, $x=3$ – розрив першого роду      |
| в) | при $x=3$ – функція неперервна, при $x=-1$ розрив першого роду |
| г) | при $x=-1$ функція неперервна, при $x=3$ розрив першого роду   |

3. Обчислити границі з невизначеністю виду  $\frac{\infty}{\infty}$  і  $\frac{0}{0}$ :

$$а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 2x^3 + 2}{x^4 + 3}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x - 6}{2x^2 + x - 21}$$

|    |                   |                   |
|----|-------------------|-------------------|
| 1) | а) $\frac{2}{3}$  | б) $\frac{6}{21}$ |
| 2) | а) $7\frac{2}{3}$ | б) $\frac{1}{2}$  |
| 3) | а) 7              | б) $-\frac{1}{2}$ |
| 4) | а) інша відповідь | б) інша відповідь |

4. Обчислити границі із застосуванням першої та другої чудових границь:

$$а) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x}, \quad б) \lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{\frac{2x}{x-1}}$$

|    |                   |                   |
|----|-------------------|-------------------|
| 1) | а) $\frac{1}{4}$  | б) $e^4$          |
| 2) | а) $-\frac{1}{4}$ | б) $e^4$          |
| 3) | а) 0              | б) 2              |
| 4) | а) інша відповідь | б) інша відповідь |

## Тест № 2

1. Продовжіть твердження:

Якщо елементи монотонної послідовності  $\{x_n\}$  для усіх номерів  $n$  задовольняють нерівність  $x_n < x_{n+1}$  ( $x_n > x_{n+1}$ ), то ...

2. Функція  $y=f(x)$  задана різними аналітичними виразами в різних областях зміни незалежної змінної. Знайти точки розриву, якщо вони існують.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq -1 \\ x^2 + 1, & -1 < x \leq 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$$

|    |                                                                  |
|----|------------------------------------------------------------------|
| а) | при $x = -1$ функція неперервна, при $x = 0$ розрив першого роду |
| б) | $x = -1$ – розрив другого роду, $x = 0$ – розрив першого роду    |
| в) | при $x = 0$ функція неперервна, при $x = -1$ розрив першого роду |
| г) | $x = -1, x = 0$ – точки розриву першого роду                     |

3. Обчислити границі з невизначеністю виду  $\frac{\infty}{\infty}$  і  $\frac{0}{0}$ :

$$а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^5 - 3x^2 + 9}{2x^5 + 2x^3 + 5}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}$$

|    |                   |                   |
|----|-------------------|-------------------|
| 1) | а) $\frac{2}{3}$  | б) $\frac{3}{2}$  |
| 2) | а) 4              | б) $\frac{2}{3}$  |
| 3) | а) 0              | б) 1              |
| 4) | а) інша відповідь | б) інша відповідь |

4. Обчислити границі із застосуванням першої та другої чудових границь:

$$а) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}, \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{\frac{8+x}{x}}$$

|    |                   |                      |
|----|-------------------|----------------------|
| 1) | а) $\frac{1}{6}$  | б) $e^{40}$          |
| 2) | а) $\frac{2}{3}$  | б) $e^5$             |
| 3) | а) 0              | б) $e^{\frac{1}{3}}$ |
| 4) | а) інша відповідь | б) інша відповідь    |

### Тест № 3

1. Продовжіть формулювання:

Функція  $y = f(x)$  називається нескінченно великою в точці  $x_0=a$  зліва (справа), якщо ...

2. Функція  $y=f(x)$  задана різними аналітичними виразами в різних областях зміни незалежної змінної. Знайти точки розриву, якщо вони існують.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ \lg x, & 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ 2, & x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

|    |                                                                             |
|----|-----------------------------------------------------------------------------|
| а) | при $x=0$ функція неперервна, при $x = \frac{\pi}{4}$ розрив першого роду   |
| б) | $x=0$ – розрив другого роду, $x = \frac{\pi}{4}$ – розрив першого роду      |
| в) | при $x=0$ – функція неперервна, при $x = \frac{\pi}{4}$ розрив першого роду |
| г) | $x=-1$ , $x = \frac{\pi}{4}$ – точки розриву першого роду                   |

3. Обчислити границі з невизначеністю виду  $\frac{\infty}{\infty}$  і  $\frac{0}{0}$ :

$$а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^{2x} - 3 \cdot 5^{2x}}{9 \cdot 5^{2x} + 4^{2x}}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 5x + 6}$$

|    |                   |                   |
|----|-------------------|-------------------|
| 1) | а) $-\frac{1}{3}$ | б) 7              |
| 2) | а) 4              | б) 1              |
| 3) | а) 0              | б) 1              |
| 4) | а) інша відповідь | б) інша відповідь |

4. Обчислити границі із застосуванням першої та другої чудових границь:

$$а) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x}, \quad б) \lim_{x \rightarrow 3} (2x - 5)^{\frac{2x}{x-3}}$$

|    |                   |                   |
|----|-------------------|-------------------|
| 1) | а) 3              | б) $e^2$          |
| 2) | а) 9              | б) $e^{12}$       |
| 3) | а) 1              | б) $e^5$          |
| 4) | а) інша відповідь | б) інша відповідь |

## Тест № 4

1. Продовжіть формулювання:

Точка  $x_0=a$  називається точкою усуненого розриву функції  $y = f(x)$ , якщо

...

2. Встановити, якою є функція  $y = e^{\frac{1}{x+3}}$  (неперервною чи розривною) для кожного  $x$  заданих значень аргументу  $x=1$ ,  $x=-3$ .

|    |                                                              |
|----|--------------------------------------------------------------|
| а) | при $x=-3$ функція неперервна, при $x=1$ розрив другого роду |
| б) | при $x=1$ функція неперервна, $x=-3$ – розрив першого роду   |
| в) | при $x=1$ функція неперервна, при $x=-3$ розрив другого роду |
| г) | $x=1$ , $x=2$ – точки розриву другого роду                   |

3. Обчислити границі з невизначеністю виду  $\frac{\infty}{\infty}$  і  $\frac{0}{0}$ :

$$а) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{x^2 - x + 1}{8x^2 + x + 3}}; \quad б) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3}$$

|    |                   |                   |
|----|-------------------|-------------------|
| 1) | а) 0              | б) 1              |
| 2) | а) $\frac{1}{8}$  | б) $\frac{3}{2}$  |
| 3) | а) $\frac{1}{2}$  | б) $\frac{8}{7}$  |
| 4) | а) інша відповідь | б) інша відповідь |

4. Обчислити границі із застосуванням першої та другої чудових границь:

$$а) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}, \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^x$$

|    |                   |                   |
|----|-------------------|-------------------|
| 1) | а) $\frac{1}{3}$  | б) $e$            |
| 2) | а) 1              | б) $\frac{1}{e}$  |
| 3) | а) 0              | б) $e^2$          |
| 4) | а) інша відповідь | б) інша відповідь |

## Тест № 5

1. Продовжіть формулювання:

Функції  $\alpha(x)$  та  $\beta(x)$  називаються нескінченно малими одного порядку (мають однаковий порядок малості), якщо ... .

2. Встановити, якою є функція  $y = e^{\frac{1}{x-2}}$  (неперервною чи розривною) для кожного  $x$  заданих значень аргументу  $x=1, x=2$ .

|    |                                                               |
|----|---------------------------------------------------------------|
| а) | при $x=2$ функція неперервна, при $x=1$ розрив другого роду   |
| б) | при $x=1$ , функція неперервна, $x=2$ – розрив першого роду   |
| в) | при $x=1$ – функція неперервна, при $x=2$ розрив другого роду |
| г) | $x=1, x=2$ – точки розриву другого роду                       |

3. Обчислити границі з невизначеністю виду  $\frac{\infty}{\infty}$  і  $\frac{0}{0}$ :

$$а) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 2x} + \sqrt[3]{2x^2 - 1}}{\sqrt[3]{27x^3 + 2} + \sqrt[3]{x + 1}}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 + 7x - 15}$$

|    |                    |                   |
|----|--------------------|-------------------|
| 1) | а) $\frac{2}{3}$   | б) $\frac{8}{13}$ |
| 2) | а) $\frac{8}{27}$  | б) $\frac{1}{2}$  |
| 3) | а) $\frac{10}{29}$ | б) 1              |
| 4) | а) інша відповідь  | б) інша відповідь |

4. Обчислити границі із застосуванням першої та другої чудових границь:

$$а) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{5x^2}, \quad б) \lim_{x \rightarrow -1} (5 + 4x)^{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$$

|    |                   |                   |
|----|-------------------|-------------------|
| 1) | а) 0              | б) $e^5$          |
| 2) | а) $\frac{1}{5}$  | б) $e$            |
| 3) | а) 0,1            | б) $e^{-4}$       |
| 4) | а) інша відповідь | б) інша відповідь |

## 10. Запитання до іспиту

1. Поняття визначника (детермінанта)  $n$ -го порядку. Обчислення визначників другого та третього порядку.
2. Властивості визначників.
3. Поняття матриці, види матриць, операції над матрицями.
4. Обернена матриця, її існування та єдиність.
5. Поняття рангу матриці, його обчислення.
6. Розв'язування матричних рівнянь
7. Поняття лінійної системи, розв'язку, сумісності. Метод Гауса.
8. Матричний метод та правило Крамера.
9. Поняття вектора, лінійні операції над векторами, їхні властивості.
10. Векторні та скалярні величини.
11. Поняття лінійно залежних векторів.
12. Поняття базису. Розклад вектора по базису. Лінійні операції над векторами через їхні координати.
13. Скалярний добуток, його властивості.
14. Вираження скалярного добутку через координати. Напрямні косинуси.
15. Векторний добуток, його властивості.
16. Вираження векторного добутку через координати. Умова компланарності двох векторів.
17. Мішаний добуток, його геометричний зміст, властивості.
18. Вираження мішаного добутку через координати. Умова компланарності трьох векторів.
19. Поняття лінійного простору. Базис. Розмірність. Приклади.
20. Поділ відрізка в заданому відношенні. Поняття рівняння лінії та поверхні.
21. Пряма як лінія першого порядку. Загальне рівняння прямої. Дослідження неповного рівняння прямої.
22. Рівняння прямої у відрізках на осях. Параметричні і канонічні рівняння прямої.

23. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
24. Кут між двома прямими. Умови перпендикулярності і паралельності двох прямих.
25. Нормальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої.
26. Загальне рівняння площини. Дослідження неповного рівняння площини.
27. Рівняння площини у відрізках на осях. Рівняння площини, що проходить через три задані точки.
28. Кут між двома площинами. Умови паралельності і перпендикулярності двох площин.
29. Параметричні і канонічні рівняння прямої у просторі.
30. Рівняння прямої, що проходить через дві точки.
31. Кут між прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.
32. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини.
33. Перетин прямої і площини.
34. Рівняння прямої, що проходить через точку перпендикулярно до даної площини.
35. Рівняння площини, яка проходить через точку паралельно до заданої площини.
36. Рівняння площини, яка проходить через точку перпендикулярно до даної прямої.
37. Рівняння площини, яка проходить через задану пряму і задану точку.
38. Рівняння площини, яка проходить через пряму паралельно до іншої прямої.
39. Рівняння площини, яка проходить через задану пряму перпендикулярно до заданої площини.
40. Рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі.
41. Умова, за якої дві прямі лежать в одній площині.

42. Рівняння площини, яка проходить через дві прямі, що перетинаються.
43. Рівняння площини в  $R_3$ , віддаль від точки до площини, кут між двома площинами.
44. Рівняння прямої в  $R_3$ , параметричне рівняння. Кут між двома прямими, прямою та площиною.
45. Канонічне рівняння еліпса. Властивості.
46. Канонічне рівняння гіперболи. Властивості.
47. Канонічне рівняння параболи. Властивості.
48. Розкриття невизначеностей  $\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty - \infty]$  для алгебраїчних функцій.
49. Перша чудова границя.
50. Друга чудова границя.
51. Точки розриву функції, їхня класифікація.
52. Шкала нескінченно малих величин та їхнє застосування.

## ДОДАТКИ

### ДОДАТОК А

#### Зразок оформлення комплексних домашніх робіт

##### Контрольна робота №1

##### Завдання 1

Навести конкретні приклади до усіх властивостей визначників і довести їх.

1. Доведемо, що:  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ , тобто величина визначника не

зміниться при заміні всіх його рядків відповідними стовпцями (при транспонуванні).

Доведення:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 3 - (-2 \cdot 2 \cdot (-2)) = 4 - 6 - 2 - 2 + 3 + 8 = 5$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 3 - (-2 \cdot 2 \cdot (-2)) = 4 - 6 - 2 - 2 + 3 + 8 = 5$$

$\Delta_1 = \Delta_2$ , що й потрібно було довести.

2. Доведемо, що:  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ , тобто при перестановці двох

сусідніх рядків або стовпців визначник змінює знак на протилежний.

Доведення:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 3 - (-2 \cdot 2 \cdot (-2)) = 4 - 6 - 2 - 2 + 3 + 8 = 5$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 2 - (-3 \cdot 1 \cdot (-2)) = -3 - 8 + 2 + 2 - 4 + 6 = -5$$

тобто  $\Delta_1 = \Delta_2 = -\Delta_1$ , що й потрібно було довести.

3. Доведемо, що:  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ , тобто якщо рядки або стовпці визначника

пропорційні іншим його рядкам або стовпцям, то визначник дорівнює нулю.

Доведення:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \cdot 2 \\ 0 & 2 & 2 \cdot 2 \\ 1 & 2 & 2 \cdot 2 \end{vmatrix} \\ = 2 \cdot 2 \cdot 4 + 0 \cdot 2 \cdot 6 + 1 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 6 - 0 \cdot 3 \cdot 4 - \\ - 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16 + 0 + 12 - 12 - 0 - 16 = 0$$

що й потрібно було довести.

4. Доведемо, що:  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ , тобто визначник, що має нульовий рядок

або стовпець, дорівнює нулю.

Доведення:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 6 - 3 \cdot 0 \cdot 6 - 1 \cdot 0 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0,$$

що й потрібно було довести.

5. Доведемо, що:  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ , тобто множник, загальний для

елементів рядка або стовпця, можна виносити за знак визначника.

Доведення:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 4 + 0 \cdot 0 \cdot 6 + 1 \cdot 1 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 6 - 0 \cdot 1 \cdot 4 - 0 \cdot 4 \cdot 2 = 8$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \cdot 2 \\ 0 & 2 & 2 \cdot 2 \\ 1 & 0 & 2 \cdot 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - \\ - 0 \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 4 = 8,$$

що й потрібно було довести.

6. Доведемо, що:  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 + 5 \cdot 1 \\ 3 & 4 + 5 \cdot 3 \end{vmatrix}$ , тобто величина визначника не зміниться, якщо до елементів деякого його рядка або стовпця додати елементи іншого його рядка або стовпця, заздалегідь помноженого на один множник.

Доведення:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 + 5 \cdot 1 \\ 3 & 4 + 5 \cdot 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 19 \end{vmatrix} = 1 \cdot 19 - 3 \cdot 7 = 19 - 21 = -2,$$

що й потрібно було довести.

7. Доведемо, що:  $\begin{vmatrix} 1 & 2+3 \\ 4 & 5+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ , тобто, якщо елементи деякого рядка або стовпця визначника представляють собою суму двох величин, то такий визначник можна представити у вигляді суми двох визначників.

Доведення:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+3 \\ 4 & 5+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot 11 - 4 \cdot 5 = 11 - 20 = -9$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+3 \\ 4 & 5+6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = (1 \cdot 5 - 4 \cdot 2) + (1 \cdot 6 - 4 \cdot 3) =$$

$$= (5 - 8) + (6 - 12) = -3 + (-6) = -9,$$

що й потрібно було довести.

8. Якщо всі елементи визначника, що з одного боку від головної діагоналі, дорівнюють 0, то такий визначник дорівнює добутку

елементів головної діагоналі:  $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 60.$

Доведення:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0 \cdot 2 - 0 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 3 \cdot 6 - 0 \cdot 4 \cdot 5 = 60,$$

що й потрібно було довести.

9. Сума добутків елементів деякого рядка або стовпця визначника на відповідні алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка або

стовпця дорівнює нулю  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{13} + 3 \cdot A_{23} + 1 \cdot A_{33} = 0.$

Доведення:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{13} + 3 \cdot A_{23} + 1 \cdot A_{33} = 2 \cdot (-8) + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 7 = 0,$$

де  $A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 2 = -8,$

$$A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 + 1) = 3,$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7,$$

що й потрібно було довести.

**Завдання 2**

Довести властивість 9 для будь-яких стовпців (рядків) в загальному вигляді.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot A_{13} + a_2 \cdot A_{23} + a_3 \cdot A_{33} = 0$$

**Доведення:**

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \cdot A_{13} + a_2 \cdot A_{23} + a_3 \cdot A_{33} = a_1 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \\ &+ a_2 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot (-1)^6 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) - \\ &- a_2 \cdot (a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) + a_3 \cdot (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) = a_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - a_1 \cdot a_3 \cdot b_2 - \\ &- a_1 \cdot a_2 \cdot b_3 + a_3 \cdot a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot a_3 \cdot b_2 - a_3 \cdot a_2 \cdot b_1 = 0, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

**Завдання 3**

Обчислити визначник 4 способами (правило трикутника, правило Саррюса, за будь-яким рядком (стовпцем), штучного доповнення):

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Розв'язання

1) за першим стовпцем:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{11} + 3 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{31} = 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot (-4) = 5$$

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = 2 + 4 = 6$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -((-1) \cdot 1 - 1 \cdot (-2)) = -(-1 + 2) = -1$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -2 - 2 = -4;$$

2) за правилом трикутника:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} &= 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot (-2) - \\ &- 3 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 - 2 - 6 - 2 + 8 + 3 = 5; \end{aligned}$$

3) за правилом Саррюса:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 \cdot (-1) =$$

$$= 4 - 6 - 2 - 2 + 8 + 3 = 5;$$

4) за штучним доповненням:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 \cdot (-1) =$$

$$= 4 - 6 - 2 - 2 + 8 + 3 = 5.$$

## Завдання 4

Обчислити визначник:  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ , використовуючи теорему Лапласа і елементарні перетворення.

Розв'язання

1 спосіб (розкладання визначника по другому рядку)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} + (4) \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1 \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot 5 \cdot (-2) +$$

$$+ 3 \cdot (-3) \cdot (-1) - 1 \cdot 3 \cdot 5 - 3 \cdot (-3) \cdot (-2) - 5 \cdot 1 \cdot (-1)) - 2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 +$$

$$+ 2 \cdot 5 \cdot 5 + 3 \cdot 1 \cdot (-3) - 5 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 \cdot 5) + 4 \cdot (1 \cdot 2 \cdot (-1) +$$

$$+ 2 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot (-2) \cdot (-3) - 5 \cdot 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) \cdot (-1))$$

$$= (3 - 50 +$$

$$+ 9 - 15 - 18 + 5) - 2 \cdot (6 + 50 - 9 - 30 + 18 - 5) - 4 \cdot (-2 + 10 + 6 +$$

$$+ 20 - 1 - 6 \cdot 3) = -66 - 2 \cdot 30 - 4 \cdot 27 = -66 - 60 - 108 = -234.$$

2 спосіб (використовуючи елементарні перетворення)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{2\text{ст} \times (-2)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ -3 & 2 & -3 & 5 \\ 5 & 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{2\text{ст} \times 4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -3 & 13 \\ 5 & 1 & -3 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$\xrightarrow{2\text{ст} + 3\text{ст}} \begin{vmatrix} 1 & -6 & 11 \\ -3 & -3 & 13 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} \xrightarrow{2\text{ст} + 4\text{ст}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ -3 & 1 & 13 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 & 13 \\ 5 & -3 & 7 \end{vmatrix} = (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -3(1 \cdot 1 \cdot 7 + 2 \cdot 5 \cdot 13 +$$

$$+ 1 \cdot 11 \cdot (-3) - 5 \cdot 1 \cdot 11 - 2 \cdot 7 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 \cdot 13) = -3 \cdot (7 + 130 - 33 - 55 +$$

$$+ 42 - 13) = -3 \cdot 78 = -234.$$

**Завдання 5**

Розв'язати нерівність:  $\begin{vmatrix} x & -3 \\ 5 & x-2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} > 26$ .

Розв'язання

$$\begin{vmatrix} x & -3 \\ 5 & x-2 \end{vmatrix} = x \cdot (x-2) - 5 \cdot (-3) = x^2 - 2x + 15$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 1 + x \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 \cdot x - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot (2) =$$

$$= 3 - 2 + 4x - x - 2 + 12 = 3x + 11$$

$$x^2 - 2x + 15 - 2 \cdot (3x + 11) > 26$$

$$x^2 - 2x + 15 - 6x - 22 > 26$$

$$x^2 - 8x - 33 > 0$$

$$(x - 11)(x + 3) > 0$$

Відповідь:  $x \in (11; +\infty)$ .

**Завдання 6**

Знайти  $A \cdot B$  та  $B \cdot A$ , якщо:  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ .

Розв'язання

Насамперед перевіряємо, чи існують дані добутки, а саме: розмір матриці  $A [3 \times 2]$ , розмір матриці  $B [2 \times 4]$ , тому  $A \cdot B$  – існує, а  $B \cdot A$  – не існує, не виконується умова добутку матриць.

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -5 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 & 3 \cdot 0 + (-1) \cdot (-5) & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 & 4 \cdot 0 + 1 \cdot (-5) & 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-5) & 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -7 & 5 & 5 & 4 \\ -7 & 16 & -5 & 3 \\ -1 & 18 & -15 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Завдання 7**

Знайти ранг матриці  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ , використовуючи метод

зведення до ступінчастої матриці (за допомогою елементарних перетворень).

Розв'язання

1. Якщо  $a_{11} = 0$ , то при перестановці рядків або стовпців отримаємо, що  $a_{11} \neq 0$ . В цьому випадку поміняємо місцями перший і другий рядки.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Якщо  $a_{11} \neq 0$  то помноживши перший рядок на 2, а потім отримані числа додавши до третього рядка, отримаємо:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. До першого рядка додаємо числа четвертого рядка:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Домноживши другий рядок на  $-3$ , а потім отримані числа додавши до третього і четвертого рядків, отримаємо:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Якщо в процесі перетворень отримуються рядки або стовпці, що цілком складаються з нулів, то ми відкидаємо ці рядки або стовпці:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Остання матриця має ступінчастий вигляд і містить мінори другого порядку, що не дорівнюють нулю, наприклад:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

тому ранг отриманої ступінчастої, а отже, і даної матриці буде  $r(A)=2$ .

Відповідь:  $r(A)=2$ .

Знайти ранг матриці  $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 4 & 1 \\ -6 & 4 & 3 & 2 \\ -9 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ , використовуючи метод обвідних мінорів.

#### Розв'язання

Виберемо мінор 1-го порядку, відмінний від нуля.  $M_1 = -3 \neq 0$   $r(A) \geq 0$ . Будуємо мінор 2-го порядку, який містить у собі знайдений мінор  $M_1$ .

$$M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 18 \neq 0.$$

Для  $M_2$  обвідними будуть тільки два мінори:

$$M_3^* = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -6 & 4 & 3 \\ -9 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0, M_3^{**} = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -6 & 4 & 2 \\ -9 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{оскільки вони обидва}$$

дорівнюють нулю, то ранг матриці  $\text{rang} A = 2$ , а мінор  $M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}$  можна взяти за базовий.

Відповідь:  $r(A) = 2$ .

### Завдання 8

Знайти матрицю обернену до даної  $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ .

#### Розв'язання

Визначник  $|A| = -4 \neq 0$  (знаходили раніше), тому існує обернена матриця  $A^{-1}$ .

Знаходимо транспоновану до  $A$  матрицю. Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів матриці  $A$ , використовуючи формулу

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},$$

де  $M_{ij}$  – мінор, який відповідає елементові  $a_{ij}$ ,  $M_{ij}$  – визначник матриці порядку  $n-1$  утвореної з матриці  $A$  викреслюванням (умовно)  $i$ -го рядка і  $j$ -го стовпця.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^2 (-20 + 12) = -8;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^3 (-12 + 12) = 0;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^3 (16 - 10) = -6;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^4 (12 - 10) = 2;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = (-1)^4 (-24 + 25) = 1;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = (-1)^5 (-18 + 15) = 3;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4 (-6 + 10) = 4;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^5 (6 - 8) = 2;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^6 (-15 + 12) = -3;$$

$$A^T = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Записуємо формулу, щоб знайти обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A},$$

де  $\tilde{A}$  – це матриця, яка складається з елементів, що є алгебраїчними доповненнями, які попередньо транспоновані

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Перевіряємо правильність обчислення оберненої матриці за формулою  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ .

### Завдання 9

*Розв'язати матричне рівняння:*

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -7 & 14 & -2 \\ 21 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Виконаємо розрахунки з матрицями, а саме: множення матриці на число та віднімання матриць:

$$\begin{pmatrix} 6 & -12 & 3 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & -6 \\ -24 & 12 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -7 & 14 & -2 \\ 21 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 18 & -6 \\ -24 & 12 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -7 & 14 & -2 \\ 21 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -12 & 3 \\ -3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 18 & -6 \\ -24 & 12 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -13 & 26 & -5 \\ 24 & -3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Введемо позначення. Нехай  $A = \begin{pmatrix} 18 & -6 \\ -24 & 12 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -13 & 26 & -5 \\ 24 & -3 & -8 \end{pmatrix}$ , отримаємо матричне рівняння виду  $A \cdot X = B$ ,  $X = A^{-1} \cdot B$ .

Знаходимо обернену матрицю до вихідної матриці  $A$ . Обчислюємо визначник матриці  $A$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 18 & -6 \\ -24 & 12 \end{vmatrix} = 18 \cdot 12 - (24) \cdot (6) = 216 - 144 = 72;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{72} \begin{pmatrix} 18 & -6 \\ -24 & 12 \end{pmatrix} = \frac{1}{72} \cdot 6 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$X = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -13 & 26 & -5 \\ 24 & -3 & -8 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot (-13) + (-1) \cdot 24 & 3 \cdot 26 + (-1) \cdot (-3) & 3 \cdot (-5) + (-1) \cdot (-8) \\ -4 \cdot (-13) + 2 \cdot 24 & -4 \cdot 26 + 2 \cdot (-3) & -4 \cdot (-5) + 2 \cdot (-8) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} -63 & 81 & -7 \\ 100 & -110 & 4 \end{pmatrix}.$$

## Завдання 10

Розв'язати систему рівнянь за допомогою формул Крамера: 
$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1, \\ 5x - 6y + 4z = 3. \end{cases}$$

Розв'язання

Обчислюємо головний визначник системи  $\Delta$ , елементами якого є коефіцієнти, які знаходяться при невідомих. Обчислювати визначник можна будь-яким способом, що Вам відомий.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) \cdot 4 + 2 \cdot 5 \cdot (-3) + 4 \cdot (-6) \cdot 2 - 5 \cdot (-5) \cdot 2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3) - 2 \cdot 3 \cdot (-6) =$$

$$= -60 - 30 - 48 + 50 + 48 + 36 = -4 \neq 0.$$

Тому розв'язки даної системи шукаємо за формулами (2).

Обчислюємо визначник  $\Delta_x$ , утворений з головного визначника заміною першого стовпця стовпцем вільних членів. Отримаємо

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot (-3) + 1 \cdot (-6) \cdot 2 - 3 \cdot (-5) \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 \cdot (-6) =$$

$$= -40 - 18 - 12 + 30 + 12 + 24 = -4.$$

Аналогічно знаходимо  $\Delta_y$  і  $\Delta_z$ .

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 \cdot 2 - 4 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 =$$

$$= 12 + 20 + 24 - 10 - 32 - 18 = -4.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) \cdot 3 + 1 \cdot 5 \cdot (-3) + 4 \cdot (-6) \cdot 2 - 5 \cdot (-5) \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3) - 1 \cdot 3 \cdot (-6) =$$

$$= -45 - 15 - 48 + 50 + 18 + 36 = -4.$$

Отже, розв'язками системи будуть:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1.$$

Перевірка:

$$3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3 - 3 + 2 = 2, \quad 2 = 2 \text{ — вірно}$$

$$4 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4 - 5 + 2 = 1, \quad 1 = 1 \text{ — вірно}$$

$$5 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 5 - 6 + 4 = 3, \quad 3 = 3 \text{ — вірно.}$$

Відповідь: (1; 1; 1).

Розв'язати систему рівнянь матричним способом або, кажучи інакше, за

допомогою оберненої матриці: 
$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1, \\ 5x - 6y + 4z = 3. \end{cases}$$

### Розв'язання

Запишемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B, \quad X = A^{-1} \cdot B.$$

Визначник  $|A| = -4 \neq 0$  (знаходили раніше), тому існує обернена матриця  $A^{-1}$ . Записуємо формулу, щоб знайти обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A},$$

де  $\tilde{A}$  – це матриця, яка складається з елементів, що є алгебраїчними доповненнями, які попередньо транспоновані.

Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів матриці  $A$ , використовуючи формулу

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},$$

де  $M_{ij}$  – мінор, який відповідає елементові  $a_{ij}$ ,  $M_{ij}$  – визначник матриці порядку  $n-1$ , утвореної з матриці  $A$  викреслюванням (умовно)  $i$ -го рядка і  $j$ -го стовпця.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^2 (-20 + 12) = -8; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^3 (-12 + 12) = 0;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^3 (16 - 10) = -6; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^4 (12 - 10) = 2;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = (-1)^4 (-24 + 25) = 1; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = (-1)^5 (-18 + 15) = 3;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4 (-6 + 10) = 4;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^5 (6 - 8) = 2;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^6 (-15 + 12) = -3;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Згідно з формулою (4), отримаємо

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Виконуємо множення матриць

$$-8 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = -16 + 0 + 12 = -4;$$

$$-6 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = -12 + 2 + 6 = -4;$$

$$1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 = 2 + 3 - 9 = -4;$$

Тобто,  $x=1$ ,  $y=1$ ,  $z=1$ .

Відповідь:  $(1; 1; 1)$ .

Розв'язати систему рівнянь, використовуючи метод Гауса: 
$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1, \\ 5x - 6y + 4z = 3. \end{cases}$$

Розв'язання

Записуємо розширену матрицю:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 4 & 3 \end{array} \right) \sim$$

множимо перший рядок на 4, а другий на  $(-3)$ , і другий рядок додаємо до першого, при цьому перший залишається без змін, а другий змінюється (додавання рядків виконуємо усно)

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -6 & 4 & 3 \end{array} \right) \sim$$

перший рядок множимо на 5, а третій на  $(-3)$  і третій рядок додаємо до першого

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right) \sim$$

третій рядок множимо на  $(-1)$  і додаємо до другого

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right).$$

Перший стовпець – це коефіцієнти при змінній  $x$ , другий – це коефіцієнти при змінній  $y$ , третій – це коефіцієнти при змінній  $z$ . Отже, отримали таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2, \\ 3y + 2z = 5, \\ 4z = 4. \end{cases}$$

Починаємо знаходити розв'язок системи рівнянь з останнього рівняння, тобто з рівняння  $4z=4$ ,  $z=1$ . Підставляємо знайдене значення  $z$  у друге рівняння  $3y+2 \cdot 1=5$ ,  $3y+2=5$ ,  $3y=3$ ,  $y=1$ . Маючи значення змінних  $y$  та  $z$ , підставляємо їх у перше рівняння і знаходимо  $x$ :  $3x-3 \cdot 1+2 \cdot 1=2$ ,  $3x-3+2=2$ ,  $3x-3=0$ ,  $3x=3$ ,  $x=1$ .

Відповідь:  $(1; 1; 1)$ .

**Контрольна робота № 2****Завдання 1****Знайти:**

- 1) довжину ребра  $AB$ ;
- 2) величини кутів:
  - а) між ребрами  $AB$  і  $AD$ ;
  - б) між гранями  $ABC$  і  $ADC$ ;
  - в) між ребром  $AD$  і гранню  $ABC$ ;
- 3) площу грані  $ABC$ ;
- 4) об'єм піраміди  $ABCD$ ;
- 5) обчислити довжину висоти, що проведена з вершини  $D$  на грань  $ABC$ ;
- 6) знайти точку перетину прямої  $AD$  і площини  $ABC$ ;
- 7) скласти рівняння, прямої, що проходить через точку  $C$ , паралельно до ребра  $AD$ ;
- 8) скласти рівняння, прямої, що проходить через точку  $B$  і перпендикулярно до площини  $ACD$ ;
- 9) рівняння площини, що проходить через точку  $C$  і перпендикулярно до прямої  $AB$ ;
- 10) побудувати піраміду у просторі  $(x; y; z)$ .

Дано вершини піраміди:

|                 |               |               |               |
|-----------------|---------------|---------------|---------------|
| $A (-2; 0; -1)$ | $B (0; 0; 4)$ | $C (1; 3; 2)$ | $D (3; 2; 7)$ |
|-----------------|---------------|---------------|---------------|

**Розв'язання**

- 1) довжину ребра знайдемо як відстань між двома точками:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2},$$

$$|AB| = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (0 - 0)^2 + (4 - (-1))^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}, |AB| = 5,385 \text{ од.}$$

- 2) знайдемо напрямні вектори прямих, що містять ребра  $AB$ ,  $AC$ ,  $AD$ :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (0 - (-2); 0 - 0; 4 - (-1)) = (2; 0; 5),$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A) = (1 - (-2); 3 - 0; 2 - (-1)) = (3; 3; 3),$$

$$\overrightarrow{AD} = (x_D - x_A; y_D - y_A; z_D - z_A) = (3 - (-2); 2 - 0; 7 - (-1)) = (5; 2; 8),$$

- а) кут між ребрами дорівнює куту між прямими, що утримують ці ребра, тобто між напрямними векторами цих прямих. Застосуємо скалярний добуток векторів:

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{2 \cdot 5 + 0 \cdot 2 + 5 \cdot 8}{\sqrt{25 + 0 + 4} \cdot \sqrt{25 + 4 + 64}} = \frac{50}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{93}} = \frac{50}{\sqrt{2697}} \approx 0,9628,$$

$\alpha = \arccos 0,9628$  – це кут між ребрами  $AB$  і  $AD$ ;

- б) кут між гранями дорівнює куту між площинами, що утворюють ці грані, тобто дорівнює куту між нормальними векторами цих площин.

Нехай  $\beta$  – це кут між гранями  $ABC$  і  $ADC$ . Складемо рівняння цих граней:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-0 & z+1 \\ 0+2 & 0-0 & 4+1 \\ 1+2 & 3-0 & 2+1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x+2 & y & z+1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x+2 & y & z+1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (z+1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+2) \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 5) - y(2 \cdot 1 - 1 \cdot 5) + (z+1) \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = 0$$

$$-5 \cdot (x+2) + 3y + 2(z+1) = 0$$

$$-5x - 10 + 3y + 2z + 2 = 0$$

$$-5x + 3y + 2z - 8 = 0$$

$$5x - 3y - 2z + 8 = 0 \text{ – це рівняння площини (грані) } ABC \quad \vec{n}_1 = (5; -3; -2)$$

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-0 & z+1 \\ 3+2 & 2-0 & 7+1 \\ 1+2 & 3-0 & 2+1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x+2 & y & z+1 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} x+2 & y & z+1 \\ 5 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - y \cdot \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (z+1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+2) \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot 8) - y(5 \cdot 1 - 1 \cdot 8) + (z+1) \cdot (5 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = 0$$

$$-6 \cdot (x+2) + 3y + 3(z+1) = 0$$

$$-2 \cdot (x+2) + y + (z+1) = 0$$

$$-2x - 4 + y + z + 1 = 0$$

$$-2x + y + z - 3 = 0$$

$$2x - y - z + 3 = 0 \text{ – це рівняння грані } ADC \quad \vec{n}_2 = (2; -1; -1)$$

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{5 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1)}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{10 + 3 + 2}{\sqrt{25 + 9 + 4} \cdot \sqrt{4 + 1 + 1}} = \\ &= \frac{15}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{6}} = \frac{15}{\sqrt{228}} \approx 0,9934 \end{aligned}$$

$$\beta = \arccos 0,9934 \text{ – це кут між гранями } ABC \text{ і } AD;$$

в) знаходимо рівняння ребра (прямої)  $AD$  (рівняння прямої, що проходить через дві точки):

$$\frac{x+2}{3+2} = \frac{y-0}{2-0} = \frac{z+1}{7+1}; \quad \frac{x+2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{8}$$

$$\vec{u} = (5; 2; 8) \text{ – це координати напрямного вектора ребра } AD$$

$$5x - 3y - 2z + 8 = 0 \text{ – рівняння грані } ABC \quad \vec{n} = (5; -3; -2)$$

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \frac{5 \cdot 5 + (-3) \cdot 2 + (-2) \cdot 8}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 2^2 + 8^2}} = \frac{25 - 6 - 16}{\sqrt{25 + 9 + 4} \cdot \sqrt{25 + 4 + 64}} = \\ &= \frac{3}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{93}} = \frac{3}{\sqrt{3534}} \approx 0,0505 \end{aligned}$$

$$\gamma = \arcsin 0,0505 \text{ – це кут між ребром } AD \text{ і гранню } ABC;$$

3) грань піраміди є трикутником або половиною паралелограма, побудованого на двох неколінеарних векторах. Площу будемо знаходити за допомогою векторного добутку цих векторів:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|$$

$$\begin{aligned} \overline{AB} \times \overline{AC} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot (0 \cdot 3 - 3 \cdot 5) - \\ & - \bar{j} \cdot (2 \cdot 3 - 3 \cdot 5) + \bar{k} \cdot (2 \cdot 3 - 3 \cdot 0) = \bar{i} \cdot (0 - 15) - \bar{j} \cdot (6 - 15) + \bar{k} \cdot (6 - 0) = \\ & = -15\bar{i} + 9\bar{j} + 6\bar{k} \\ |\overline{AB} \times \overline{AC}| &= \sqrt{(-15)^2 + 9^2 + 6^2} = \sqrt{225 + 81 + 36} = \sqrt{342} = 3\sqrt{38} \\ S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{38} = \frac{3\sqrt{38}}{2} \approx 9,24 \text{ кв. од.}; \end{aligned}$$

- 4) піраміда є шостою частиною паралелепіпеда, побудованого на двох некомпланарних векторах. Для знаходження об'єму піраміди будемо використовувати мішаний добуток цих векторів:

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{6} |(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD}|$$

$$\begin{aligned} |(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD}| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 8 + 0 \cdot 3 \cdot 5 + 5 \cdot 3 \cdot 2 - 5 \cdot 3 \cdot 5 - \\ & - 0 \cdot 3 \cdot 8 - 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48 + 0 + 30 - 75 - 0 - 12 = -9 \\ V_{\text{пір}} &= \frac{1}{6} |-9| = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ куб. од.} \end{aligned}$$

- 5) довжину висоти піраміди знаходимо, використовуючи формули

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot H \Rightarrow 3V_{\text{пір}} = S_{\Delta ABC} \cdot H \Rightarrow H = \frac{3V_{\text{пір}}}{S_{\Delta ABC}}$$

$$V_{\text{пір}} = 1,5 \text{ куб. од.} \quad S_{\Delta ABC} = 9,24 \text{ кв. од.} \Rightarrow H = \frac{3 \cdot 1,5}{9,24} = \frac{4,5}{9,24} \approx 0,49 \text{ од.};$$

- 6) зведемо рівняння прямої  $AD \frac{x+2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{8}$ , яке задано в канонічній формі

$$\text{до параметричного виду } \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = 2t \\ z = -1 + 8t \end{cases}. \text{ Підставимо значення } x, y, z \text{ у}$$

$$\text{рівняння площини } 5x - 3y - 2z + 8 = 0$$

$$5 \cdot (-2 + 5t) - 3 \cdot 2t - 2 \cdot (-1 + 8t) + 8 = 0$$

$$-10 + 25t - 6t + 2 - 16t + 8 = 0$$

$$3t = 0$$

$$t = 0$$

$$\begin{cases} x = -2 + 5 \cdot 0 \\ y = 2 \cdot 0 \\ z = -1 + 8 \cdot 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$$

$$- \text{координата точки перетину прямої і площини};$$

- 7) рівняння прямої, що проходить через точку  $C$  паралельно до ребра  $AD$ , буде мати вигляд  $\frac{x-1}{5} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{8}$ ;

- 8) рівняння прямої, що проходить через точку  $B$  і перпендикулярно до площини  $ACD$ , використовуючи формулу  $\frac{x-x_1}{A} = \frac{y-y_1}{B} = \frac{z-z_1}{C}$

$$2x - y - z + 3 = 0 - \text{рівняння грані } ADC, B(0; 0; 4)$$

$$\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z-4}{-1}, \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{-1};$$

9) рівняння площини, що проходить через точку  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  перпендикулярно до прямої  $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$ , має вигляд:

$$m(x-x_1) + n(y-y_1) + p(z-z_1) = 0.$$

$$\frac{x+2}{0+2} = \frac{y-0}{0-0} = \frac{z+1}{4+1}, \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{5}$$

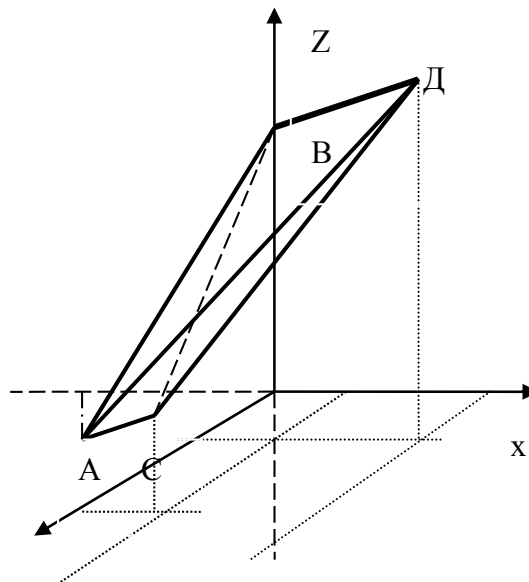
$$2(x-1) + 0(y-3) + 5(z-2) = 0$$

$$2x - 2 + 5z - 10 = 0$$

$$2x + 5z - 12 = 0;$$

10) побудуємо піраміду по точках

|                 |               |               |               |
|-----------------|---------------|---------------|---------------|
| $A (-2; 0; -1)$ | $B (0; 0; 4)$ | $C (1; 3; 2)$ | $D (3; 2; 7)$ |
|-----------------|---------------|---------------|---------------|

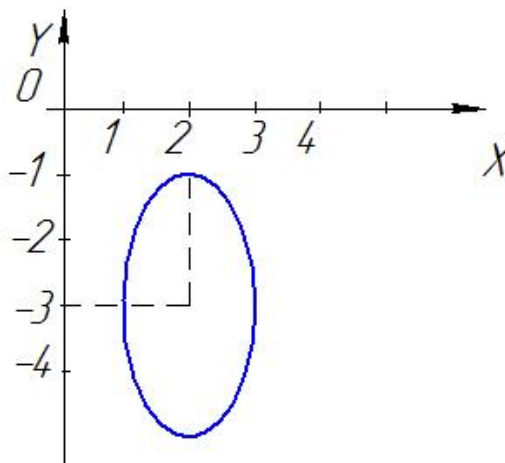


## Завдання 2

Визначити та побудувати лінію, рівняння якої має вигляд:

$$2x^2 + y^2 - 8x + 6y + 1 = 0.$$

Розв'язання



Коефіцієнти при  $x^2$  і  $y^2$  одного знака, але з різними числами, тому це рівняння описує еліпс. Доведемо це.

$$(2x^2 - 8x) + (y^2 + 6y) + 1 = 0, 2(x^2 - 4x + 4 - 4) + (y^2 + 6y + 9 - 9) + 1 = 0$$

$$2(x - 2)^2 - 8 + (y + 3)^2 - 9 + 1 = 0, 2(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

$$\frac{2(x-2)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1, \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1.$$

Отримали рівняння виду  $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ , тобто канонічне рівняння еліпса  $\frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$  з центром в точці  $O(2; -3)$  і піввісями: по  $Ox$   $a = \sqrt{8} \approx 2,8$ , по  $Oy$   $b = 4$ .

Відповідь:  $\frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$  еліпс.

### Завдання 3

Дослідити лінійну залежність векторів:  $\vec{a}(-1; -2; -5)$ ,  $\vec{b}(5; -2; 4)$ ,  $\vec{c}(-4; 2; -3)$ .

#### Розв'язання

Знайдемо ранг матриці, складеної з координат векторів:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -4 \\ -2 & -2 & 2 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = -1 \neq 0, r(A) \geq 0, M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 10 = 12 \neq 0, r(A) \geq 2$$

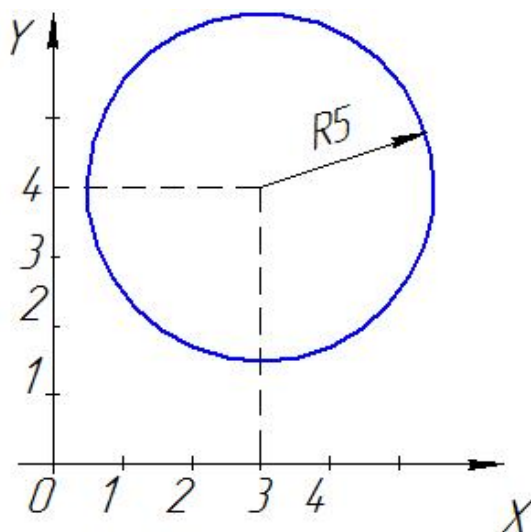
$$M_3 = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -4 \\ -2 & -2 & 2 \\ -5 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 50 + 32 + 40 - 30 + 8 = -6 \neq 0, r(A) = 3$$

Відповідь: вектори  $\vec{a}(-1; -2; -5)$ ,  $\vec{b}(5; -2; 4)$ ,  $\vec{c}(-4; 2; -3)$  лінійно незалежні.

### Завдання 4

Скласти рівняння лінії, для якої сума відстаней до точок  $A(2; 3)$  і  $B(4; 5)$  дорівнює 54.

#### Розв'язання



Візьмемо довільну точку лінії  $M(x; y) \in \Gamma_{MT}$ . Згідно з умовою  $|AM|^2 + |BM|^2 = 54$ . Застосуємо формулу відстані між двома точками:

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ , тоді отримаємо рівняння

$$\left(\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2}\right)^2 = 54$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (x-4)^2 + (y-5)^2 = 54$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 + x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = 54$$

$$2x^2 - 12x + 2y^2 - 16y + 54 = 54 \qquad 2x^2 - 12x + 2y^2 - 16y = 0$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0 \qquad (x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 - 8y + 16) - 16 = 0$$

$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$  – це є рівняння кола з центром у точці  $O(3; 4)$  і радіусом  $R=5$ .

Відповідь: коло з центром у точці  $O(3; 4)$  і радіусом  $R=5$ .

**Контрольна робота № 3****Завдання 1**

Визначити ОДЗ функції:  $y = \arccos \frac{2x+3}{4}$ .

Розв'язання

$$\left| \frac{2x+3}{4} \right| \leq 1 \quad -1 \leq \frac{2x+3}{4} \leq 1 \quad -4 \leq 2x+3 \leq 4 \quad -7 \leq 2x \leq 7$$

$$-3,5 \leq x \leq 3,5.$$

Відповідь:  $D_y \in [-3,5; 3,5]$ .

Визначити ОДЗ функції:  $y = \frac{\ln(2x-3)}{\sqrt{x^2+5x-6}}$ .

Розв'язання

$$\begin{cases} 2x-3 > 0 \\ x^2+5x-6 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x > 3 \\ (x+6)(x-1) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1,5 \\ x+6 > 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1,5 \\ x > -6 \\ x > 1 \end{cases}$$

Відповідь:  $D_y \in [1,5; +\infty)$ .

**Завдання 2**

Довести, використовуючи означення границі послідовності, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ .

Розв'язання

Візьмемо будь-яке число  $\varepsilon > 0$ . Оскільки  $|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}$ , тоді для задоволення нерівності  $|x_n - a| < \varepsilon$  достатньо розв'язати нерівність  $\frac{1}{(n+1)} < \varepsilon$ , звідки отримуємо  $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ . Прийmemo  $N = \left[ \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \right]$  (ціла частина числа  $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ ), щоб нерівність  $|x_n - 1| < \varepsilon$  здійснювалася за усіх  $n > N$ .

Довести, що послідовність  $\{x_n\} = (-1)^n$ , або  $-1, 1, -1, 1 \dots$ , не має границі.

Розв'язання

Дійсно, яке б число ми не припустили як границю,  $1$  або  $-1$ , при  $\varepsilon < 0,5$  нерівність  $|x_n - a| < \varepsilon$ , що визначає границю послідовності, не задовольняється: поза  $\varepsilon$  — околу цих чисел залишається безкінечне число елементів  $x_n$ , оскільки усі елементи з непарними номерами дорівнюють  $-1$ , а елементи з парними номерами дорівнюють  $1$ .

Знайти границю  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+2n+4}{4n^2+n-3}$ .

Розв'язання

При  $n \rightarrow \infty$  чисельник та знаменник дробу прагнуть до нескінченності, тобто застосувати відразу теорему про границі частки неможливо, оскільки теорема передбачає існування кінцевих границь послідовності. Перетворимо цю послідовність,

поділивши чисельник та знаменник на  $n^2$ . Застосовуючи потім теореми про границі частки, границі суми та знову границі частки, послідовно знаходимо:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n + 4}{4n^2 + n - 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}}{4 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{2}{n} + \frac{4}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2}} = \\ &= \frac{2+0+0}{4+0-0} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Знайти границю послідовності  $\{x_n\} = \frac{\sqrt{n} \cos n}{n+1}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

### Розв'язання

Тут, як і у попередньому прикладі, чисельник та знаменник не мають кінцевих границь, і тому спочатку робимо необхідні перетворення. Поділивши чисельник та знаменник на  $n$ , отримуємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cos n}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \cos n}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Оскільки в чисельнику стоїть добуток нескінченно малої послідовності обмеженої послідовності, то в силу властивостей остаточно отримуємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{1+0} = 0.$$

Знайти границю послідовності  $\{x_n\} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

### Розв'язання

Тут застосувати безпосередньо теорему про границю суми (різниць) послідовностей не можна, оскільки кінцевих границь доданків у формулі для  $\{x_n\}$  не існує. Помножимо і поділимо формулу для  $\{x_n\}$  на сумісний вираз  $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \{x_n\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{0}{1+0} = 0.\end{aligned}$$

Обчислити границі функцій:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2 + 2}{2+x+x^4} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^4}}{\frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^3} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{1} = 3.$$

У цьому прикладі ми розділили чисельник і знаменник на найбільший степінь дробу  $x$ , тобто  $x^4$ . Дробові доданки в чисельнику і знаменнику прямують до нуля при  $x \rightarrow \infty$ ;

$$\begin{aligned}\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-2x^2}} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-2x^2})}{(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-2x^2})(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-2x^2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-2x^2})}{1-x^2 - (1-2x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-2x^2})}{1-x^2 - 1 + 2x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-2x^2})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-2x^2}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1-0^2} + \sqrt{1-2 \cdot 0^2}) = \lim_{x \rightarrow 0} (1+1) = 2.\end{aligned}$$

У цьому прикладі домножили чисельник і знаменник на спряжений вираз до знаменника, щоб отримати в знаменнику різницю квадратів;

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\sin^2 3x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{\sin^2 3x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)^2}{(3x)^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{9x^2} = 2 \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$$

Використовуючи тригонометричні формули подвійного кута, отримаємо  $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ , при цьому, застосувавши еквівалентність,  $\sin x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ ;

$$г) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot \operatorname{tg} 3x}{2 \sin^2 7x} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \frac{5}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 3x}{\cos 3x \cdot \sin 7x \cdot \sin 7x} = \frac{5}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 \cdot \sin 7x} \cdot \frac{\sin 3x}{\sin 7x} =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{98}.$$

У цьому прикладі було застосовано наслідки з першої чудової границі

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x + 21}{x^2 + 4x + 3} = \left\{ \frac{27}{0} \right\} = +\infty \text{ (у цьому прикладі немає невизначеності);}$$

е)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - 2x}{3 - 2x} \right)^{8x+7} = \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1 - 2x}{3 - 2x} - 1 \right)^{8x+7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1 - 2x - 3 + 2x}{3 - 2x} \right)^{8x+7} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2}{3 - 2x} \right)^{(8x+7)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2}{3 - 2x} \right)^{\frac{3 - 2x}{2} \cdot \frac{2}{3 - 2x} \cdot (8x+7)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16x+14}{2x-3}} = e^{-\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16x+14}{3-2x}} = e^8.$$

$$ж) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 5x + 6} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(3x-1)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x-1}{x-2} = \frac{8}{1} = 8.$$

При обчисленні даної границі застосовуємо формулу розкладання квадратного тричлена на множники, тобто  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ :

$$3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$D = 100 - 36 = 64, \sqrt{D} = 8, x_1 = \frac{10 + 8}{6} = 3, x_2 = \frac{10 - 8}{6} = \frac{1}{3}$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 3(x - 3) \left( x - \frac{1}{3} \right) = (x - 3)(3x - 1)$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$D = 25 - 24 = 1, \sqrt{D} = 1, x_1 = \frac{5 + 1}{2} = 3, x_2 = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

$$и) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+6} - \sqrt{3x+1}}{-x^2 + 2x + 15} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{2x+6} - \sqrt{3x+1}) \cdot (\sqrt{2x+6} + \sqrt{3x+1})}{(-x^2 + 2x + 15) \cdot (\sqrt{2x+6} + \sqrt{3x+1})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x + 6 - (3x + 1)}{-(x + 3)(x - 5)(\sqrt{2x+6} + \sqrt{3x+1})} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x + 6 - 3x - 1}{(x + 3)(x - 5)(\sqrt{2x+6} + \sqrt{3x+1})} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x + 5}{(x + 3)(x - 5)(\sqrt{2x+6} + \sqrt{3x+1})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(x + 3)(x - 5)(\sqrt{2x+6} + \sqrt{3x+1})} = \frac{1}{64}.$$

При розв'язанні прикладу було використано формулу розкладання квадратного тричлена на множники та помноження дробу на спряжений

$$-x^2 + 2x + 15 = 0$$

$$D_1 = -\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac, D_1 = 1 - 1 \cdot 15 = 16, \sqrt{D_1} = 4,$$

$$x_{1,2} = \frac{\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}, x_1 = \frac{-1 + 4}{-1} = -3, x_2 = \frac{-1 - 4}{-1} = 5$$

$$-x^2 + 2x + 15 = -(x + 3)(x - 5)$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{3}} = \{1^\infty\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{3x}{1}\right)^{\frac{1}{3x} \cdot \frac{3x}{1} \cdot \frac{1}{x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x}} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}.$$

При обчисленні даної границі спочатку були виконані елементарні перетворення, при яких дану границю було зведено до другої чудової границі;

$$\text{л) } \lim_{x \rightarrow 7} (15 - 2x)^{\frac{4x}{x-7}} = \{1^\infty\} = \left| \begin{array}{l} x - 7 = t \\ x \rightarrow 7 \Rightarrow t \rightarrow 0 \\ x = t + 7 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} (15 - 2(t + 7))^{\frac{4(t+7)}{t+7-7}} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} (15 - 2t - 14)^{\frac{4t+28}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 - 2t)^{\frac{4t+28}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1 - 2t)^{\frac{1}{2t} \cdot \frac{2t}{1} \cdot \frac{4t+28}{t}} = e^{-\lim_{t \rightarrow 0} 2(4t+28)} =$$

$$= e^{-56} = \frac{1}{e^{56}}.$$

### Завдання 3

Визначити неперервність функції і побудувати графік:

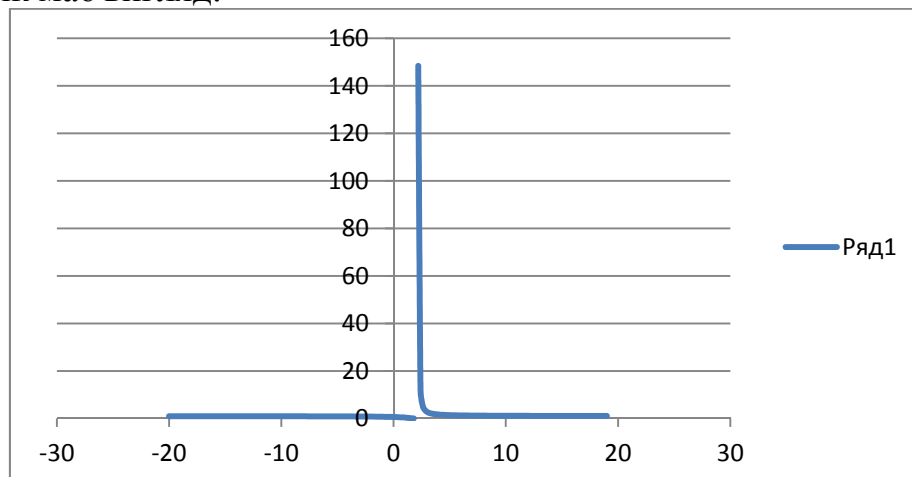
$$\text{а) } y = e^{\frac{1}{x-2}} \text{ в точках } x = 1 \text{ і } x = 2.$$

#### Розв'язання

При  $x=1$  функція  $f(1) = e^{-1}$  визначена, оскільки існує границя  $\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{-1}$ . Знаходимо значення функції у точці  $f(1) = e^{-1}$ , тобто при  $x=1$  функція неперервна.

При  $x=2$  функція  $f(2) = e^{\frac{1}{0}}$  функція невизначена, оскільки існує границя  $\lim_{x \rightarrow 2-0} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2+0} e^{\frac{1}{x-2}} = e^\infty = \infty$ , тобто при  $x=2$  – це точка розриву 2 роду.

Графік має вигляд:



$$б) y = \frac{x^2}{8} - \frac{2}{x}.$$

Розв'язання

Область визначення функції буде  $D: (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ , область значень:  $E: (-\infty; +\infty)$ , точкою розриву буде точка  $x=0$ . Функція загального виду. Знаходимо точки перетину з віссю  $Ox$ :

$$\frac{x^2}{8} - \frac{2}{x} = 0, \frac{x^2}{8} = \frac{2}{x}, x^3 = 16, x = 2\sqrt[3]{2}.$$

Обчислюємо границі у точці розриву  $x=0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \left( \frac{x^2}{8} - \frac{2}{x} \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \left( \frac{x^2}{8} - \frac{2}{x} \right) = -\infty$$

Розрив другого роду у точці  $x = 0$ .

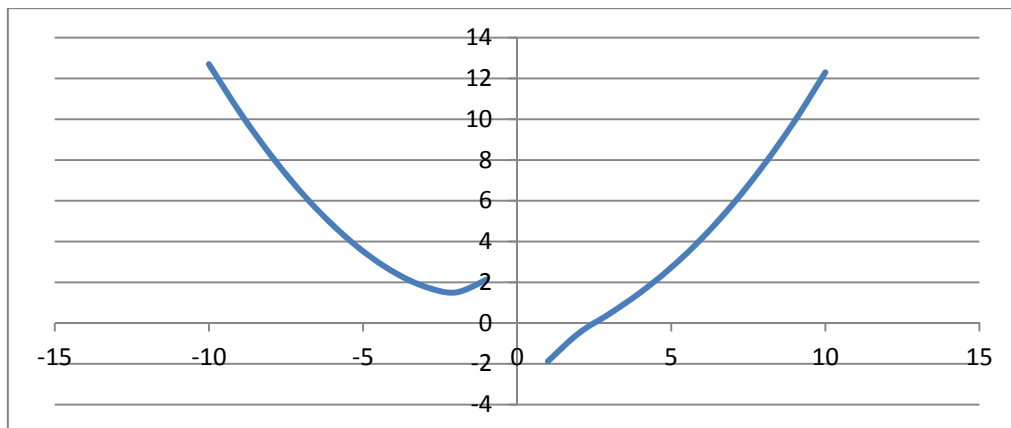
Знаходимо асимптоти функції:

$$x = 0, k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{8} - \frac{2}{x}}{x} = +\infty.$$

Обчислюємо значення границь на кінцях проміжку:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{8} - \frac{2}{x} \right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2}{8} - \frac{2}{x} \right) = +\infty.$$

Будуємо графік:



$$в) y = \frac{x^2-1}{x^2-4}.$$

Розв'язання

Область визначення функції буде  $D(y): y \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$ , область значень:  $E(y): y \in (-\infty; +\infty)$ , точками розриву будуть точки  $x=-2, x=2$ .

Перевіряємо на парність  $y(-x) = \frac{(-x)^2-1}{(-x)^2-4} = \frac{x^2-1}{x^2-4} = y(x)$  – парна. Функція неперіодична. Знаходимо точки перетину з віссю  $Ox$ :  $\frac{x^2-1}{x^2-4} = 0, x^2 - 1 = 0, x = \pm 1$ , тобто  $(-1; 0)$  і  $(1; 0)$ . Точка перетину з віссю  $Oy$ :  $x = 0, y = \frac{1}{4}$ , тобто  $(0; 0,25)$ .

Дослідимо функцію на неперервність:

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{2x}{2x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{2x}{2x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{2x}{2x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{2x}{2x} = 1.$$

Знайдемо асимптоти:

$x = \pm 2$  – вертикальні асимптоти;

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^3-4x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2-4} = 1$$

$y = 1$  – горизонтальна асимптота.

Обчислюємо границі функції на кінцях:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \infty,$$

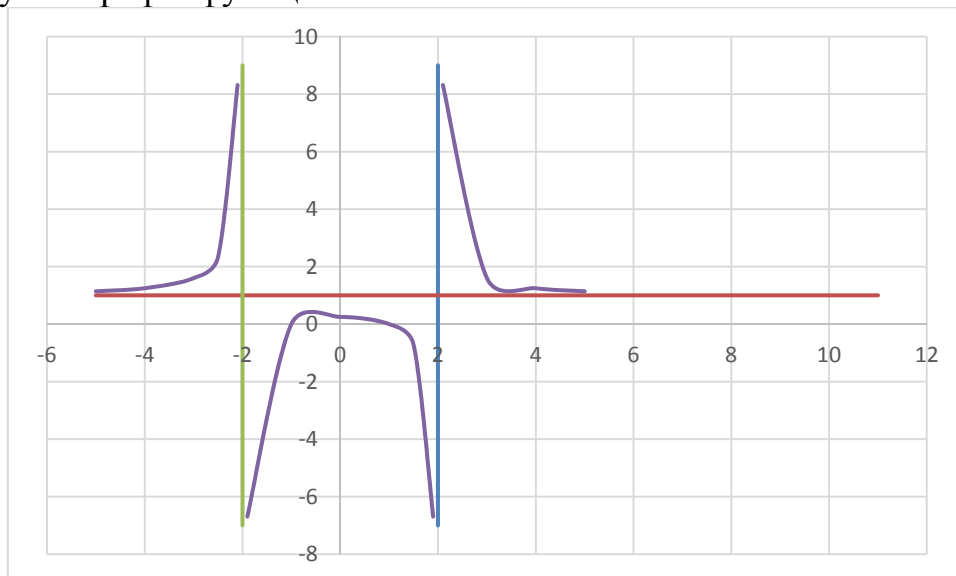
$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x^2-4} = \infty.$$

Будуємо графік функції:



**Допуск (перевірка знань теоретичного матеріалу) до практичних  
занять:**

**Тема: «Визначники»**

**Тест № 1**

1. Що буде із визначником, якщо усі елементи будь-якого рядка (стовпця) помножити на деяке число  $\lambda$ :
  - а) не зміниться;
  - б) змінить знак на протилежний;
  - в) помножиться на число  $\lambda$ .
2. Що буде із визначником, якщо поміняти місцями рядки на стовпці:
  - а) не зміниться;
  - б) змінить знак на протилежний;
  - в) буде дорівнювати нулю.
3. Що буде із визначником, якщо переставити місцями рядки (стовпці):
  - а) не зміниться;
  - б) змінить знак на протилежний;
  - в) буде дорівнювати нулю.
4. Що буде із визначником, якщо до елементів будь-якого рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помноживши їх на  $\lambda$ :
  - а) помножиться на  $\lambda$ ;
  - б) не зміниться;
  - в) буде дорівнювати нулю.
5. Чому дорівнює сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчне доповнення елементів іншого рядка (стовпця):
  - а) визначнику;
  - б) нулю;
  - в) визначнику з протилежним знаком.
6. Чому дорівнює сума добутків довільних чисел на алгебраїчні доповнення елементів будь-якого рядка (стовпця):
  - а) визначнику;
  - б) нулю;
  - в) визначнику, в якому відповідні елементи рядка (стовпця) замінено на ці довільні числа.
7. Чому дорівнює визначник  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ :
  - а)  $ad + bc$ ;
  - б)  $ad - bc$ ;
  - в)  $ac - bd$ ;
  - г)  $ac + bd$ .

8. Чому дорівнює визначник, у якого кожний елемент будь-якого рядка (стовпця) є сумою двох доданків:
- а) нулю;
  - б) різниці двох визначників, у кожному з яких відповідний рядок (стовпець) складається з відповідного доданка;
  - в) сумі двох визначників, у кожному з яких відповідний рядок (стовпець) складається з відповідного доданка.
9. Визначник, у якого елементи двох рядків (стовпців) пропорційні:
- а) дорівнює  $-1$ ;
  - б) дорівнює  $0$ ;
  - в) дорівнює  $1$ ;
  - г) немає правильної відповіді.
10. Яких значень може набувати число  $k$  – порядок мінору елемента  $a_{ij}$  визначника  $n$ -го порядку:
- а) від нуля до  $n$ ;
  - б) від одного до  $n-1$ ;
  - в) від одного до  $n$ .
11. Як зміниться визначник  $n$ -го порядку, якщо кожен його елемент замінити на протилежний:
- а) не зміниться;
  - б) змінить знак на протилежний;
  - в) дорівнюватиме визначнику, помноженому на  $(-1)^n$ ;
  - г) дорівнюватиме визначнику, помноженому на  $(-1)^{n^2}$ .
12. Скільки доданків входить у формулу обчислення визначника  $n$ -го порядку:
- а)  $n^2$ ;
  - б)  $n$ ;
  - в)  $n!$ .

**Тема «Матриця. Обернена матриця»**

**Тест № 1**

1. Чи можна додавати матриці різних розмірів:
  - а) ні;
  - б) так;
  - в) лише після транспонування?
2. У якому випадку матрицю  $A$  можна помножити на матрицю  $B$ :
  - а) якщо кількість стовпців матриці  $B$  дорівнює кількості рядків матриці  $A$ ;
  - б) якщо кількість стовпців матриці  $A$  дорівнює кількості рядків матриці  $B$ ;
  - в) якщо кількість стовпців матриці  $A$  дорівнює кількості стовпців матриці  $B$ ?
3. У якому випадку існують добутки  $AB$  та  $BA$ :
  - а) тільки якщо матриці квадратні;
  - б) якщо вони квадратні або мають такі розміри:  $m \times k$  та  $k \times m$ ;
  - в) тільки якщо матриці трикутні;
  - г) якщо вони одного розміру  $m \times n$ ?
4. Чи можлива рівність  $AB=O$ , якщо  $A$  та  $B$  – ненульові матриці:
  - а) ні;
  - б) так;
  - в) так, якщо вони одного розміру  $m \times n$ ?
5. Нехай задано матрицю  $A_{m \times n}$ . Якими будуть розміри матриці  $A^T$ :
  - а)  $n \times n$ ;
  - б)  $m \times m$ ;
  - в)  $n \times m$ ?
6. Обернена матриця існує, якщо:
  - а) матриця довільна;
  - б) квадратна матриця;
  - в) нульова матриця;
  - г) довільна квадратна невироджена матриця.
7. Якщо виконується умова  $AB=BA=E$ , то матриця  $B$  називається ... для матриці  $A$ :
  - а) одиничною;
  - б) оберненою;
  - в) нульовою;
  - г) трикутною.

8. Для існування оберненої матриці  $A^{-1}$  необхідно і достатньо, щоб матриця  $A$  була:
- а) ненульовою;
  - б) квадратною;
  - в) невиродженою;
  - г) діагональною.
9. Для будь-якої невиродженої матриці  $A$  існує:
- а) нескінченна кількість обернених матриць;
  - б) єдина обернена матриця;
  - в) дві обернені матриці, які є транспонованими між собою;
  - г) обернених матриць не існує.
10. Розв'язок матричного рівняння виду  $AX=B$  має вигляд:
- а)  $X=AB^{-1}$ ;
  - б)  $X=A^{-1}B$ ;
  - в)  $X=BA^{-1}$ ;
  - г)  $X=B^{-1}A$ .
11. Обернена матриця не має властивості:
- а)  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ ;
  - б)  $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$ ;
  - в)  $(A^{-1})^{-1} = A$ ;
  - г)  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

## Тема «Ранг матриці»

### Тест № 3

1. Рангом матриці називається:
  - а) кількість рядків матриці;
  - б) кількість стовпців матриці;
  - в) порядок найбільшого мінору цієї матриці;
  - г) найбільший порядок ненульового мінору матриці.
2. Чи зміниться ранг матриці при лінійних операціях з її рядками:
  - а) ранг зміниться;
  - б) ранг не зміниться;
  - в) ранг буде дорівнювати нулю;
  - г) правильної відповіді немає?
3. Ранг матриці дорівнює розмірності її визначника, якщо матриця є:
  - а) виродженою;
  - б) невиродженою;
  - в) інша відповідь.
4. При транспонуванні матриці:
  - а) ранг не зміниться;
  - б) ранг буде дорівнювати нулю;
  - в) ранг збільшиться на одиницю;
  - г) ранг зменшиться на одиницю.
5. Еквівалентні матриці мають:
  - а) різний ранг;
  - б) однаковий ранг;
  - в) правильної відповіді немає.
6. Якщо визначник матриці дорівнює нулю, то її ранг:
  - а) збігається з її розмірністю;
  - б) не дорівнює розмірності визначника;
  - в) значення рангу матриці менше за розмірність визначника;
  - г) інша відповідь.
7. Ранг ступінчастої матриці вказує на:
  - а) кількість її нульових рядків;
  - б) кількість її ненульових стовпців;
  - в) кількість її ненульових рядків;
  - г) кількість її нульових стовпців.
8. Коли  $r(A)=0$ :
  - а) коли  $A$  одинична;
  - б) коли  $A$  нульова;
  - в) коли  $A$  квадратна;
  - г) правильної відповіді немає?

9. Якщо ранг матриці  $A$ , що має розмірність  $n \times n$ , дорівнює:
- а)  $n$ ;
  - б)  $n-1$ , якщо матриця вироджена;
  - в)  $n-1$ , якщо матриця не вироджена;
  - г)  $n-1$ .
10. Якщо  $r(A) = r$  і матриця  $A$  має розмір  $m \times n$ , то чому дорівнює  $r(A^T)$ :
- а)  $r(A^T) = m$ ;
  - б)  $r(A^T) = n$ ;
  - в)  $r(A^T) = r$ ;
  - г) правильної відповіді немає?

**Тема «Системи лінійних алгебраїчних рівнянь»**

**Тест № 1**

1. Розв'язком системи рівнянь з трьома змінними називають пару значень змінних, яка перетворює кожне рівняння системи в рівність:
  - а) так;
  - б) ні.
2. Розв'язати систему рівнянь – це означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає:
  - а) так;
  - б) ні.
3. Якщо головний визначник системи лінійних рівнянь не дорівнює нулю, то:
  - а) система має безліч розв'язків;
  - б) система не має розв'язків;
  - в) система має один розв'язок;
  - г) правильної відповіді немає.
4. Якщо кожен розв'язок однієї системи лінійних рівнянь є розв'язком іншої системи, то такі системи називаються:
  - а) лінійно залежними;
  - б) лінійно незалежними;
  - в) рівними;
  - г) еквівалентними.
5. Якщо система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок, то така система називається:
  - а) сумісною;
  - б) несумісною;
  - в) визначеною;
  - г) невизначеною.
6. Система лінійних рівнянь називається сумісною, якщо:
  - а) її визначник дорівнює нулю;
  - б) її визначник дорівнює одиниці;
  - в) вона має один розв'язок;
  - г) вона має хоча б один розв'язок.
7. Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається визначеною, якщо:
  - а) вона має безліч розв'язків;
  - б) не має жодного розв'язку;
  - в) має єдиний розв'язок;
  - г) правильної відповіді немає.
8. Якщо система лінійних алгебраїчних рівнянь не має жодного розв'язку, то таку систему називають:
  - а) сумісною;
  - б) несумісною;
  - в) невизначеною;
  - г) визначеною.

9. Система лінійних рівнянь називається невизначеною, якщо:
- а) вона має безліч розв'язків;
  - б) вона не має жодного розв'язку;
  - в) вона має єдиний розв'язок;
  - г) правильної відповіді немає.
10. Система рівнянь  $\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 4x - 3y + z = 3 \end{cases}$  має:
- а) безліч розв'язків;
  - б) не має розв'язків;
  - в) один розв'язок;
  - г) правильної відповіді немає.
11. Скільки розв'язків буде мати неоднорідна система, якщо невідомих  $n$ , ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи і дорівнює  $n-1$ :
- а) один розв'язок;
  - б) жодного розв'язку;
  - в) безліч розв'язків;
  - г) правильної відповіді немає?
12. Нехай  $AX=B$  – система  $n$  лінійних рівнянь з  $n$  невідомими та її визначник дорівнює нулю. Що можна сказати про розв'язок такої системи за допомогою оберненої матриці:
- а) система не має розв'язків;
  - б) система має безліч розв'язків;
  - в) систему не можна розв'язати цим методом;
  - г) правильної відповіді немає?

Тест № 2

1. Що можна сказати про множину розв'язків системи, якщо при розв'язанні методу Гауса приводить матрицю системи до трикутного вигляду, та усі елементи головної діагоналі відмінні від нуля:
  - а) нескінченна множина;
  - б) пуста множина;
  - в) єдиний розв'язок;
  - г) правильної відповіді немає?
2. Якщо в однорідній системі лінійних рівнянь з невідомими визначник не дорівнює нулю, скільки розв'язків має система:
  - а) безліч розв'язків;
  - б) один розв'язок;
  - в) жодного розв'язку;
  - г) правильної відповіді немає?
3. Система лінійних однорідних рівнянь має ненульові розв'язки, якщо її визначник:
  - а)  $\Delta = 1$ ;
  - б)  $\Delta = 0$ ;
  - в)  $\Delta \neq 0$ ;
  - г) правильної відповіді немає.
4. Неоднорідна система лінійних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, якщо:
  - а) ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці системи;
  - б) ранг матриці системи дорівнює одиниці;
  - в) ранг розширеної матриці системи дорівнює нулю;
  - г) ранг матриці системи менший за ранг розширеної матриці системи.
5. Якщо  $r(A) = r(B - A) = r = n$ , то:
  - а) система несумісна;
  - б) система несумісна і має один розв'язок;
  - в) система сумісна і має один розв'язок;
  - г) система сумісна і має нескінченну кількість розв'язків.
6. Якщо  $r(A) \neq r(B - A)$ , то:
  - а) система сумісна і має один розв'язок;
  - б) система несумісна;
  - в) система сумісна і має нескінченну кількість розв'язків;
  - г) система має два розв'язки.
7. Якщо система лінійних рівнянь однорідна, то:
  - а)  $r(A) \neq r(B - A)$ ;
  - б)  $r(A) = r(B - A)$ ;
  - в)  $r(A) > r(B - A)$ ;
  - г)  $r(A) < r(B - A)$ .

## Тема «Векторна алгебра»

### Тест № 1

1. Вектор – це:
  - а) інтервал;
  - б) фігура;
  - в) лінія;
  - г) напрямлений відрізок.
2. Вектори називаються компланарними, якщо вони:
  - а) мають спільний початок;
  - б) лежать в одній або в паралельних площинах;
  - в) лежать на одній або на паралельних прямих;
  - г) мають протилежні напрямки.
3. Відстань між початком та кінцем вектора називається:
  - а) довжиною (модулем) вектора;
  - б) координатами вектора;
  - в) проекцією вектора;
  - г) напрямними косинусами вектора.
4. Вектори називаються рівними, якщо:
  - а) їхні довжини рівні;
  - б) їхні довжини рівні, а напрямки протилежні;
  - в) їхні довжини рівні і напрямки збігаються;
  - г) їхні довжини рівні, а напрямки перпендикулярні.
5. Ненульові вектори будуть компланарними, якщо вони:
  - а) обов'язково лежать в одній площині;
  - б) перпендикулярні до заданої площини;
  - в) паралельні до заданої прямої;
  - г) лежать в одній або в паралельних площинах.
6. Два ненульові вектори утворюють базис на площині, якщо:
  - а) вектори мають однаковий напрямок;
  - б) вектори мають протилежні напрямки;
  - в) вектори неколінеарні;
  - г) вектори колінеарні.
7. Проекція вектора на вісь – це:
  - а) точка;
  - б) відрізок;
  - в) вектор;
  - г) пряма.
8. Лінійними операціями над векторами є:
  - а) мішаний добуток векторів;
  - б) скалярний добуток векторів;
  - в) векторний добуток векторів;
  - г) множення вектора на число, додавання та віднімання векторів.

9. Висота піраміди – це:
- а) відстань від вершини до основи піраміди;
  - б) апофема;
  - в) твірна;
  - г) вектор.
10. Трикутник – це:
- а) третина паралелограма з такими ж сторонами та кутом між ними;
  - б) половина ромба з таким ж кутом;
  - в) половина паралелограма з такими ж сторонами та кутом між ними;
  - г) половина прямокутника з такими ж сторонами та кутом між ними.
11. Піраміда – це:
- а) половина паралелепіпеда з такими ж сторонами і висотою;
  - б) третина паралелепіпеда з такими ж сторонами і висотою;
  - в) четверта частина паралелепіпеда з такими ж сторонами і висотою;
  - г) шоста частина паралелепіпеда з такими ж сторонами і висотою.

## Тест № 2

1. Ненульові вектори  $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$  та  $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$  колінеарні, якщо:
  - а) координати векторів пропорційні;
  - б) координати векторів задовольняють умову  $x_1y_1 + x_2y_2 + z_1z_2 = 0$
  - в) мішаний добуток векторів дорівнює нулю;
  - г) векторний добуток дорівнює нулю.
2. Векторний добуток дорівнює нульовому вектору, якщо вектори:
  - а) одиничні;
  - б) компланарні;
  - в) колінеарні;
  - г) перпендикулярні.
3. Якщо мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, то ці вектори:
  - а) колінеарні;
  - б) компланарні;
  - в) попарно взаємно перпендикулярні;
  - г) правильної відповіді немає.
4. Векторний добуток колінеарних векторів дорівнює:
  - а) нульовому вектору;
  - б) одиничному вектору;
  - в) ортонормованому вектору;
  - г) правильної відповіді немає.
5. Якщо  $\alpha$  – кут між векторами  $\vec{a}$  та  $\vec{b}$ , то скалярним добутком векторів називається:
  - а) число  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$ ;
  - б) вектор  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$ ;
  - в) число  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$ ;
  - г) вектор  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$ .
6. Векторним добутком векторів  $\vec{a}$  та  $\vec{b}$  називається вектор  $\vec{c}$ , довжина якого:
  - а) дорівнює  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$ ;
  - б) дорівнює  $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$ ;
  - в) дорівнює  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ;
  - г) дорівнює нулю.
7. Кут між векторами  $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$  та  $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$  обчислюється за формулою:
  - а)  $\sin\alpha = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$ ;
  - б)  $\sin\alpha = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$ ;
  - в)  $\cos\alpha = \frac{x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$ ;
  - г)  $\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$ .

8. Умова перпендикулярності векторів  $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$  та  $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$  записується у вигляді:
- а)  $x_1x_2 = y_1y_2 = z_1z_2$ ;
  - б)  $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ ;
  - в)  $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 1$ ;
  - г)  $x_1x_2 \neq y_1y_2 \neq z_1z_2$ .
9. Умова паралельності векторів  $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$  та  $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$  записується у вигляді:
- а)  $x_1x_2 = y_1y_2 = z_1z_2$ ;
  - б)  $x_1x_2 \neq y_1y_2 \neq z_1z_2$ ;
  - в)  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ ;
  - г)  $\frac{x_1}{x_2} \neq \frac{y_1}{y_2} \neq \frac{z_1}{z_2}$ .

**Тема «Аналітична геометрія»**

**Тест № 1. Тема «Аналітична геометрія на площині»**

1. Щоб побудувати пряму лінію, потрібно:
  - а) три точки;
  - б) одна точка;
  - в) дві точки;
  - г) безліч точок.
2. Довжина – це
  - а) вектор;
  - б) число;
  - в) фігура;
  - г) відстань від точки до точки вздовж деякої лінії.
3. Паралельні прямі:
  - а) мають одну точку перетину;
  - б) мають безліч точок перетину;
  - в) не мають точок перетину;
  - г) мають декілька точок перетину.
4. Перпендикулярні прямі:
  - а) мають дві точки перетину;
  - б) мають одну точку перетину;
  - в) мають безліч точок перетину;
  - г) не мають точок перетину.
5. Висота трикутника – це:
  - а) перпендикуляр, проведений до протилежної сторони;
  - б) відрізок, що ділить протилежну сторону навпіл;
  - в) відрізок, що ділить кут навпіл;
  - г) хорда.
6. Бісектриса трикутника – це:
  - а) перпендикуляр, проведений до протилежної сторони;
  - б) відрізок, що ділить протилежну сторону навпіл;
  - в) відрізок, що ділить кут навпіл;
  - г) хорда.
7. Медіана трикутника – це:
  - а) перпендикуляр, проведений до протилежної сторони;
  - б) відрізок, що ділить протилежну сторону навпіл;
  - в) відрізок, що ділить кут навпіл;
  - г) хорда.
8. Нехай  $\epsilon$  координатна площина  $Oxy$ . Чи кожному рівнянню з двома змінними  $x$  та  $y$  відповідає на площині деяка лінія:
  - а) так;
  - б) ні.

**Тест № 2. Тема «Аналітична геометрія на площині»**

1. На площині рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки  $M_1(x_1; y_1)$  і  $M_2(x_2; y_2)$ , записується у вигляді:
  - а)  $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$ ;
  - б)  $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ ;
  - в)  $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ ;
  - г)  $y - y_0 = k(x - x_0)$ .
2. На площині рівняння прямої, яка проходить через задану точку із заданим кутовим коефіцієнтом, записується у вигляді:
  - а)  $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ ;
  - б)  $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_2}$ ;
  - в)  $y - y_0 = k(x - x_0)$ ;
  - г)  $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$ .
3. Умова перпендикулярності прямих  $y = k_1x + b$  та  $y = k_2x + b$  має вигляд:
  - а)  $k_1 \cdot k_2 + 1 = 0$ ;
  - б)  $k_1 \cdot k_2 - 1 = 0$ ;
  - в)  $k_1 = k_2$  і  $b_1 = b_2$ ;
  - г)  $k_1 = k_2$  і  $b_1 \neq b_2$ .
4. Умова паралельності прямих  $y = k_1x + b$  та  $y = k_2x + b$  має вигляд:
  - а)  $k_1 \cdot k_2 + 1 = 0$ ;
  - б)  $k_1 \cdot k_2 - 1 = 0$ ;
  - в)  $k_1 = k_2$ ;
  - г)  $b_1 = b_2$ .
5. Відстань від точки  $M_0(x_0; y_0)$  до прямої  $Ax + By + C = 0$  обчислюється за формулою:
  - а)  $d = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ;
  - б)  $d = -\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ;
  - в)  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ;
  - г)  $d = \frac{|Ax_0 + By_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ .
6. Умова паралельності прямих  $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}$  та  $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}$  має вигляд:
  - а)  $m_1m_2 = n_1n_2$ ;
  - б)  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ ;
  - в)  $m_1m_2 + n_1n_2 = 0$ ;
  - г)  $m_1n_1 + m_2n_2 = 0$ .
7. Кут між двома прямими  $y = k_1x + b$  та  $y = k_2x + b$  обчислюється за формулою:
  - а)  $\cos \alpha = \frac{k_1 \cdot k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}$ ;

$$\text{б) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2};$$

$$\text{в) } \sin \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2};$$

$$\text{г) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{k_1 \cdot k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

8. Для знаходження кута між двома прямими  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  та  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$  застосовується формула:

$$\text{а) } \cos \alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}};$$

$$\text{б) } \sin \alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}};$$

$$\text{в) } \cos \alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}};$$

$$\text{г) } \operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

**Тест № 3. Тема «Аналітична геометрія у просторі»**

1. При перетині двох площин отримують:
  - а) точку;
  - б) пряму;
  - в) площину;
  - г) відрізок.
2. Рівняння  $x=0$  задає у просторі:
  - а) площину  $xOy$ ;
  - б) площину  $xOz$ ;
  - в) площину  $yOz$ ;
  - г) правильної відповіді немає.
3. Якщо площина задана рівнянням  $Bu+Cz+D=0$ , то дана площина:
  - а) паралельна до осі  $Ox$ ;
  - б) паралельна до осі  $Oy$ ;
  - в) паралельна до осі  $Oz$ ;
  - г) правильної відповіді немає.
4. Якщо площина задана рівнянням  $Ax+ D=0$ , то ця площина:
  - а) паралельна до координатної площини  $xOy$ ;
  - б) паралельна до координатної площини  $xOz$ ;
  - в) паралельна до координатної площини  $yOz$ ;
  - г) правильної відповіді немає.
5. Якщо площина задана рівнянням  $Ax+ Bu+Cz+D=0$ , то ця площина:
  - а) паралельна до осі  $Ox$ ;
  - б) паралельна до осі  $Oy$ ;
  - в) паралельна до осі  $Oz$ ;
  - г) проходить через початок координат.
6. Якщо для площин  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  та  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  виконується умова  $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ , то ці площини:
  - а) паралельні;
  - б) перпендикулярні;
  - в) збігаються;
  - г) перетинаються в одній точці.
7. Якщо для площин  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  та  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  виконується умова  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ , то ці площини:
  - а) паралельні;
  - б) перпендикулярні;
  - в) збігаються;
  - г) перетинаються в одній точці.
8. Дві площини  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  та  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  паралельні, якщо виконується умова:
  - а)  $A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ ;
  - б)  $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 + D_1D_2 = 0$ ;

$$\text{в)} \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2};$$

$$\text{г)} \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

9. Рівняння площини, яка проходить через три задані точки  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2; z_2)$  і  $M_3(x_3; y_3; z_3)$ , записується у вигляді:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} x + x_1 & y + y_1 & z + z_1 \\ x_2 + x_1 & y_2 + y_1 & z_2 + z_1 \\ x_3 + x_1 & y_3 + y_1 & z_3 + z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} x + x_1 & y + y_1 & z + z_1 \\ x_2 + x_1 & y_2 + y_1 & z_2 + z_1 \\ x_3 + x_1 & y_3 + y_1 & z_3 + z_1 \end{vmatrix} = 1.$$

10. Рівняння площини, яка проходить через задану точку  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  і пряму  $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ , має вигляд:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 1;$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} x + x_0 & y + y_0 & z + z_0 \\ x_1 + x_0 & y_1 + y_0 & z_1 + z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} x + x_0 & y + y_0 & z + z_0 \\ x_1 + x_0 & y_1 + y_0 & z_1 + z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 1.$$

11. Рівняння площини, яка проходить через пряму  $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$  паралельно до іншої прямої  $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$ , має вигляд:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} x + x_1 & y + y_1 & z + z_1 \\ m_1 - m_2 & n_1 - n_2 & p_1 - p_2 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} x+x_1 & y+y_1 & z+z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

12. Рівняння площини, яка проходить через задану пряму  $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ , перпендикулярну до заданої площини  $Ax+By+Cz+D=0$ , має вигляд:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} x+x_0 & y+y_0 & z+z_0 \\ A & B & C \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A & B & C \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ m & n & p \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} x+x_0 & y+y_0 & z+z_0 \\ m & n & p \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

13. Рівняння площини, яка проходить через дві паралельні прямі, які задані рівняннями  $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$  і  $\frac{x-x_2}{m} = \frac{y-y_2}{n} = \frac{z-z_2}{p}$ , має вигляд:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 1;$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} x+x_1 & y+y_1 & z+z_1 \\ x_2+x_1 & y_2+y_1 & z_2+z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} x+x_1 & y+y_1 & z+z_1 \\ x_2+x_1 & y_2+y_1 & z_2+z_1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 1.$$

14. Рівняння площини, яка проходить через дві прямі, які задані рівняннями  $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$  і  $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$ , що перетинаються, має вигляд:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} x+x_1 & y+y_1 & z+z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{б)} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{в)} \begin{vmatrix} x+x_1 & y+y_1 & z+z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\text{г)} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 1.$$

## Тест № 4. Тема «Аналітична геометрія у просторі»

- Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  і  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ , записується у вигляді:
  - $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ ;
  - $\frac{x+x_1}{x_2+x_1} = \frac{y+y_1}{y_2+y_1} = \frac{z+z_1}{z_2+z_1}$ ;
  - $\frac{x_2-x_1}{x+x_1} = \frac{y_2-y_1}{y+y_1} = \frac{z_2-z_1}{z+z_1}$ ;
  - $\frac{x_2+x_1}{x-x_1} = \frac{y_2+y_1}{y-y_1} = \frac{z_2+z_1}{z-z_1}$ ;
- Рівняння прямої, яка проходить через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  із заданим напрямним вектором  $\bar{s} = (m; n; p)$ , має вигляд:
  - $\frac{x+x_0}{m} = \frac{y+y_0}{n} = \frac{z+z_0}{p}$ ;
  - $\frac{x-x_0}{m} + \frac{y-y_0}{n} + \frac{z-z_0}{p} = 0$ ;
  - $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ ;
  - $\frac{x-x_0}{m} + \frac{y-y_0}{n} + \frac{z-z_0}{p} = 1$ .
- Якщо для заданих прямих  $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$  і  $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$  виконується умова  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ , то ці прямі:
  - паралельні;
  - перпендикулярні;
  - перетинаються;
  - збігаються.
- Якщо для заданих прямих  $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$  і  $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$  виконується умова  $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$ , то ці прямі:
  - паралельні;
  - перпендикулярні;
  - перетинаються;
  - збігаються.
- Система рівнянь  $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$  з різними коефіцієнтами при змінних визначає:
  - площину у просторі;
  - пряму у просторі;
  - пряму на площині;
  - точку.
- Загальне рівняння прямої у просторі задається системою рівнянь  $\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$ , тоді напрямний вектор цієї прямої буде мати вигляд:
  - $\bar{s} = (A_1 + A_2; B_1 + B_2; C_1 + C_2)$ ;
  - $\bar{s} = (A_1 - A_2; B_1 - B_2; C_1 - C_2)$ ;

$$\text{в) } \bar{s} = (A_1 A_2; B_1 B_2; C_1 C_2);$$

$$\text{г) } \bar{s} = \left( \frac{A_1}{A_2}; \frac{B_1}{B_2}; \frac{C_1}{C_2} \right)$$

7. Якщо дві прямі, які задані рівняннями  $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$  і  $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$  перетинаються, то:

$$\text{а) } \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2};$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_2-m_1 & n_2-n_1 & p_2-p_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

8. Якщо дві прямі, які задані рівняннями  $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$  і  $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$  є мимобіжними, то:

$$\text{а) } \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2};$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_2-m_1 & n_2-n_1 & p_2-p_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

9. Умова, за якою дві прямі, що задані рівняннями  $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$  і  $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$  і лежать в одній площині, має вигляд:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2+x_1 & y_2+y_1 & z_2+z_1 \end{vmatrix} = 1.$$

**Тест № 5. Тема «Аналітична геометрія у просторі»**

1. Відстань від точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  до площини  $Ax+By+Cz+D=0$  обчислюється за формулою:

а)  $d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2+D^2}};$

б)  $d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$

в)  $d = \frac{|Ax+By+Cz|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$

г)  $d = \frac{Ax+By+Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$

2. Умова перпендикулярності прямої  $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$  і площини

$Ax+By+Cz+D=0$  має вигляд:

а)  $Am + Bn + Cp = 0;$

б)  $Am + Bn + Cp + D = 0;$

в)  $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p};$

г)  $\frac{A}{m} - \frac{B}{n} + \frac{C}{p} = 0.$

3. Умова паралельності прямої  $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$  і площини  $Ax+By+Cz+D=0$

має вигляд:

а)  $Am + Bn + Cp = 0;$

б)  $Am + Bn + Cp + D = 0;$

в)  $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p};$

г)  $\frac{A}{m} - \frac{B}{n} + \frac{C}{p} = 0.$

4. Кут між прямою  $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$  і площиною  $Ax+By+Cz+D=0$

обчислюється за формулою:

а)  $\sin \alpha = \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot \sqrt{m^2+n^2+p^2}};$

б)  $\cos \alpha = \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot \sqrt{m^2+n^2+p^2}};$

в)  $\sin \alpha = \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} + \sqrt{m^2+n^2+p^2}};$

г)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot \sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$

5. Нехай задано рівняння прямої  $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$  та рівняння площини

$Ax+By+Cz+D=0$ . Пряма та площина перпендикулярні, якщо виконується умова:

а)  $Am + Bn + Cp = 0;$

$$\text{б) } \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p};$$

$$\text{в) } Am + Bn + Cp = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0;$$

$$\text{г) } Am + Bn + Cp = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

6. Нехай задано рівняння прямої  $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$  та рівняння площини

$Ax + By + Cz + D = 0$ . Пряма та площина паралельні, якщо виконується умова:

$$\text{а) } Am + Bn + Cp = 0;$$

$$\text{б) } \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p};$$

$$\text{в) } Am + Bn + Cp = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0;$$

$$\text{г) } Am + Bn + Cp = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

7. Нехай задано рівняння прямої  $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$  та рівняння площини

$Ax + By + Cz + D = 0$ . Пряма належить площині, якщо виконується умова:

$$\text{а) } Am + Bn + Cp = 0;$$

$$\text{б) } \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p};$$

$$\text{в) } Am + Bn + Cp = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0;$$

$$\text{г) } Am + Bn + Cp = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

**Тест № 6. Тема «Криві другого порядку»**

1. Множина точок площини, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від заданої точки, котру називають фокусом, і заданої прямої називається:
  - а) колом;
  - б) еліпсом;
  - в) параболою;
  - г) гіперболою.
2. Множина точок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох заданих точок цієї площини, котрі називають фокусами, є величиною сталою і називається ..., а канонічне рівняння цієї кривої записується у вигляді:
  - а) еліпсом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;
  - б) еліпсом  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;
  - в) гіперболою  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;
  - г) гіперболою  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
3. Множина точок площини, абсолютна величина різниці відстаней від кожної з яких до двох заданих точок цієї площини, котрі називають фокусами, є величиною сталою і називається ..., а канонічне рівняння цієї кривої записується у вигляді:
  - а) еліпсом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;
  - б) еліпсом  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;
  - в) гіперболою  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;
  - г) гіперболою  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
4. Закінчити формулу для обчислення фокусів еліпса  $c = \dots$ :
  - а)  $\sqrt{a^2 + b^2}$ ;
  - б)  $\sqrt{a^2 - b^2}$ ;
  - в)  $\sqrt{b^2 - a^2}$ ;
  - г) правильної відповіді немає.
5. Закінчити формулу для обчислення фокусів гіперболи  $c = \dots$ :
  - а)  $\sqrt{a^2 + b^2}$ ;
  - б)  $\sqrt{a^2 - b^2}$ ;
  - в)  $\sqrt{b^2 - a^2}$ ;
  - г) правильної відповіді немає.

6. Закінчити формулу для обчислення фокусів параболи  $c=...$ :
- $2p$ ;
  - $\frac{p}{2}$ ;
  - $-\frac{p}{2}$ ;
  - правильної відповіді немає.
7. Визначити межі зміни ексцентриситету еліпса:
- $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ;
  - $0 < \varepsilon < 1$ ;
  - $\varepsilon > 0$ ;
  - $\varepsilon > 1$ .
8. Визначити межі зміни ексцентриситету гіперболи:
- $0 \leq \varepsilon \leq 1$ ;
  - $0 < \varepsilon < 1$ ;
  - $\varepsilon > 0$ ;
  - $\varepsilon > 1$ .
9. Ексцентриситет еліпса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  обчислюється за формулою ... і задовольняє умову:
- $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \varepsilon > 1$ ;
  - $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}, \varepsilon > 1$ ;
  - $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \varepsilon < 1$ ;
  - $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}, \varepsilon < 1$ .
10. Ексцентриситет гіперболи  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  обчислюється за формулою ... і задовольняє умову:
- $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \varepsilon > 1$ ;
  - $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}, \varepsilon > 1$ ;
  - $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \varepsilon < 1$ ;
  - $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}, \varepsilon < 1$ .
11. Нехай задано рівняння  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ . Це рівняння описує коло, якщо:
- $B=0, A=C \neq 0$ ;
  - $C=0, A=B \neq 0$ ;

- в)  $A > 0, C < 0$  або  $A < 0, C > 0$ ;  
г) правильної відповіді немає.
12. Нехай задано рівняння  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ . Це рівняння описує еліпс, якщо:  
а)  $B=0, A \neq C$ ;  
б)  $A=0, B \neq C$ ;  
в)  $C=0$  або  $A \neq B$ ;  
г) правильної відповіді немає.
13. Нехай задано рівняння  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ . Це рівняння описує гіперболу, якщо:  
а)  $A > 0, C > 0, B=0$ ;  
б)  $A < 0, C < 0, B=0$ ;  
в)  $A > 0, C < 0$ , або  $A < 0, C > 0, B=0$ ;  
г) правильної відповіді немає.
14. Нехай задано рівняння  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ . Це рівняння описує параболу, якщо:  
а)  $B \neq 0, A=0$  або  $C=0$ ;  
б)  $B=0, A=0$  або  $C=0$ ;  
в)  $B=0, A \neq 0, C \neq 0$ ;  
г) правильної відповіді немає.

## Тема «Множина. Функція. Теорія границь»

## Тест № 1

1. Яке з тверджень є правильним?
  - а) під множиною розуміють сукупність будь-яких предметів, об'єктів, об'єднаних між собою деякою загальною для них усіх ознакою;
  - б) множина утворюється з елементів, які мають деякі властивості та знаходяться у деяких відношеннях між собою або елементами інших множин;
  - в) множина – це сукупність, зібрання деяких предметів будь-якої природи, наприклад: множина учнів класу, множина цифр десяткової нумерації, множина букв українського алфавіту, множина міст держави, множина будинків на вулиці тощо;
  - г) множина – це сукупність різноманітних об'єктів, об'єднаних за деякою ознакою.
2. Оберіть правильну відповідь. Функцією називаємо...:
  - а) змінну  $y$  називають функцією від змінної  $x$ , якщо кожному значенню змінної  $x$  відповідає одне певне значення змінної  $y$ ;
  - б) змінну  $x$  називають функцією від змінної  $y$ , якщо кожному значенню змінної  $y$  відповідає одне певне значення змінної  $x$ ;
  - в) інше тлумачення.
3. Область визначення функції – це:
  - а) усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент);
  - б) усі значення, яких набуває залежна змінна (функція);
  - в) інша відповідь.
4. Область значення функції – це:
  - а) усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент);
  - б) усі значення, яких набуває залежна змінна (функція);
  - в) інша відповідь.
5. Дані множини: а) множина  $B$  всіх прямокутників; б) множина  $C$  усіх чотирикутників; в) множина  $D$  усіх квадратів; г) множина  $E$  усіх паралелограмів; д) множина  $F$  усіх многокутників. Випишіть літери, що позначають ці множини, в такому порядку, щоб кожна наступна позначала підмножину попередньої:
  - а)  $F \subset C \subset B \subset D \subset E$ ;
  - б)  $F \subset C \subset D \subset B \subset E$ ;
  - в)  $F \subset B \subset C \subset D \subset E$ ;
  - г)  $F \subset D \subset C \subset B \subset E$ .
6. Областю значення функції  $y = \frac{2x-1}{x+1}$  є:
  - а)  $E_y = (-\infty; -1)$ ;
  - б)  $E_y = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ ;
  - в)  $E_y = (-\infty; +\infty)$ ;
  - г)  $E_y = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ .

7. Областю значення функції  $y = \frac{2x-1}{x+1}$  є:
- а)  $D_y = (-\infty; -1)$ ;
  - б)  $D_y = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ ;
  - в)  $D_y = (-1; +\infty)$ ;
  - г)  $D_y = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ .
8. Числа 2, 6, 18, 54, 162,... Що це:
- а) послідовність цілих чисел;
  - б) нескінченно зростаюча геометрична прогресія ( $q=3$ );
  - в) зростаюча арифметична прогресія;
  - г) послідовність натуральних чисел?
9. Способи задання функції:
- а) табличний, письмовий, графічний;
  - б) табличний, аналітичний, графічний;
  - в) табличний, письмовий, графічний, алгебраїчний;
  - г) табличний, письмовий, графічний, алгебраїчний, аналітичний.
10. Які існують операції з множинами:
- а) додавання, добуток, віднімання, ділення, перетин, об'єднання, різниця;
  - б) перетин, об'єднання, різниця;
  - в) додавання, добуток, віднімання, ділення;
  - г) інша відповідь.

## Тест № 2

1. Яке з тверджень є правильним:
  - а) число  $x_0$  називається границею послідовності  $\{x_n\}$ , якщо для довільного числа  $\varepsilon > 0$  існує такий номер  $N=N(\varepsilon)$ , що при всіх  $n > N$  виконується нерівність  $|x_n + x_0| < \varepsilon$ ;
  - б) число  $x_0$  називається границею послідовності  $\{x_n\}$ , якщо для довільного числа  $\varepsilon > 0$  існує такий номер  $N=N(\varepsilon)$ , що при всіх  $n > N$  виконується нерівність  $|x_n - x_0| < \varepsilon$ ;
  - в) число  $x_0$  називається границею послідовності  $\{x_n\}$ , якщо для довільного числа  $\varepsilon > 0$  існує такий номер  $N=N(\varepsilon)$ , що при всіх  $n > N$  виконується нерівність  $|x_n - x_0| < \varepsilon$ ;
  - г) число  $x_0$  називається границею послідовності  $\{x_n\}$ , якщо для довільного числа  $\varepsilon < 0$  існує такий номер  $N=N(\varepsilon)$ , що при всіх  $n < N$  виконується нерівність  $|x_n - x_0| < \varepsilon$ ?
2. Чи правильне твердження: якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  і  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$ :
  - а) так;
  - б) ні;
  - в) інша відповідь?
3. Чи правильне твердження: якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  і  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B$ :
  - а) ні;
  - б) так;
  - в) інша відповідь?
4. Чи правильне твердження: якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  і  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = A - B$ :
  - а) так;
  - б) ні;
  - в) інша відповідь?
5. Можна сказати про співвідношення двох нескінченно малих  $\frac{\alpha_n}{\beta_n}$ :
  - а) дорівнює нулю;
  - б) дорівнює  $const$ ;
  - в) дорівнює нескінченності;
  - г) невизначеність  $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ .
6. Границя  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  дорівнює:
  - а) 1;
  - б)  $e$ ;
  - в)  $\pi$ ;
  - г) інша відповідь.

7. Границя  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  дорівнює:  
а) 1;  
б)  $e$ ;  
в)  $\pi$ ;  
г) інша відповідь.
8. Границя  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$  дорівнює:  
а) 1;  
б)  $e$ ;  
в)  $\pi$ ;  
г) інша відповідь.
9. Границя  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$  дорівнює:  
а) 1;  
б)  $e$ ;  
в)  $\pi$ ;  
г) інша відповідь.
10. Границя  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$  дорівнює:  
а) 1;  
б)  $e$ ;  
в)  $\pi$ ;  
г) інша відповідь.
11. Границя  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$  дорівнює:  
а) 1;  
б)  $e$ ;  
в)  $\pi$ ;  
г) інша відповідь.
12. Якщо  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B$  при ... – розрив першого роду:  
а)  $A=B$ ;  
б)  $A \neq B$ ;  
в) інша відповідь.
13. Розрив у точці  $x_0$  називається розривом другого роду, якщо:  
а) обидві односторонні границі існують або дорівнюють нескінченності;  
б) хоча б одна з односторонніх границь існує або дорівнює нескінченності;  
в) хоча б одна з односторонніх границь не існує або дорівнює нескінченності;  
г) обидві односторонні границі не існують або дорівнюють нескінченності.
14. Відомо, що функція  $f(x)$  у точці  $x_0$  має розрив. Це буде усувний розрив, якщо:  
а)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  не існує;

- б)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ ;  
в)  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ ;  
г) інша відповідь.
15. Вкажіть правильні твердження для функції  $y = \arcsin x$ :
- а) монотонна;
  - б) обмежена;
  - в) необмежена;
  - г) парна;
  - д) непарна;
  - е) загального виду;
  - ж) явна;
  - и) неявна;
  - к) складна.
16. Вкажіть правильні твердження для функції  $y = \operatorname{arctg} x$ :
- а) монотонна;
  - б) обмежена;
  - в) необмежена;
  - г) парна;
  - д) непарна;
  - е) загального виду;
  - ж) явна;
  - и) неявна;
  - к) складна.
17. Вкажіть правильні твердження для функції  $y = e^x$ :
- а) монотонна;
  - б) обмежена;
  - в) необмежена;
  - г) парна;
  - д) непарна;
  - е) загального виду;
  - ж) явна;
  - и) неявна;
  - к) складна.

## Тест № 3

1. Функція  $f(x)$  називається нескінченно малою за умови  $x \rightarrow x_0$ , якщо:
  - а)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ;
  - б)  $f(x_0) = 0$ ;
  - в)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ ;
  - г)  $f(x_0) = -\infty$ .
2. Функція  $f(x)$  називається нескінченно великою за умови  $x \rightarrow x_0$ , якщо:
  - а)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ ;
  - б)  $f(x_0) = 0$ ;
  - в)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ;
  - г)  $f(x_0) = +\infty$ .
3. Яке з тверджень є правильним:
  - а) числовою функцією  $f$  називають відображення множини  $D \subset R$  на множину  $E \subset R$ . Причому кожному значенню  $x \in D$  поставлено у відповідність по деякому закону єдине значення  $y \in E$ ;
  - б) числовою функцією  $f$  називають відображення множини  $D \cup R$  на множину  $E \cup R$ . Причому кожному значенню  $x \in D$  поставлено у відповідність по деякому закону єдине значення  $y \in E$ ;
  - в) інша відповідь?
4. Функція  $y=f(x)$  неперервна в точці  $x_0$ . Чи обов'язково вона є диференційованою в цій точці:
  - а) так;
  - б) ні;
  - в) інша відповідь?
5. Функція  $y=f(x)$  називається парною, якщо виконується умова ... для будь-яких  $x \in D(f)$ :
  - а)  $f(-x) = f(x)$ ;
  - б)  $f(-x) = -f(x)$ ;
  - в)  $f(-x) = f(-x)$ ;
  - г) інша відповідь.
6. Функція  $y=f(x)$  називається непарною, якщо виконується умова ... для будь-яких  $x \in D(f)$ :
  - а)  $f(-x) = f(x)$ ;
  - б)  $f(-x) = -f(x)$ ;
  - в)  $f(-x) = f(-x)$ ;
  - г) інша відповідь.

7. Функція  $y=f(x)$ , визначена на всій числовій прямій, називається періодичною, якщо існує таке число  $T$ , що:
- а)  $f(x + T) = f(x) + f(T)$ ;
  - б)  $f(x) + T = f(x)$ ;
  - в)  $f(x + T) = f(x)$ ;
  - г) інша відповідь.
8. Функція  $\sin^2 x$  та  $x^2$  еквівалентні, якщо  $x \rightarrow 0$ :
- а) так;
  - б) ні;
  - в) інша відповідь.
9. Функція  $e^x - 1$  та  $2x$  еквівалентні, якщо  $x \rightarrow 0$ :
- а) ні;
  - б) так;
  - в) інша відповідь.
10. Чи еквівалентні функції  $\operatorname{tg} 3x$  та  $x$  за умови, що  $x \rightarrow 0$ :
- а) так;
  - б) ні;
  - в) інша відповідь?

## ДОДАТОК В

### *Букви латинського алфавіту та їх читання у формулах*

| Букви     |            | Читання<br>букви | Букви     |            | Читання<br>букви |
|-----------|------------|------------------|-----------|------------|------------------|
| Друкована | Курсив     |                  | Друкована | Курсив     |                  |
| A a       | <i>A a</i> | а                | N n       | <i>N n</i> | ен               |
| B b       | <i>B b</i> | бе               | O o       | <i>O o</i> | о                |
| C c       | <i>C c</i> | це               | P p       | <i>P p</i> | пе               |
| D d       | <i>D d</i> | де               | Q q       | <i>Q q</i> | ку (кю)          |
| E e       | <i>E e</i> | е                | R r       | <i>R r</i> | ер               |
| F f       | <i>F f</i> | еф               | S s       | <i>S s</i> | ес               |
| G g       | <i>G g</i> | ге (же)          | T t       | <i>T t</i> | те               |
| H h       | <i>H h</i> | ха (аш)          | U u       | <i>U u</i> | у                |
| I i       | <i>I i</i> | і                | V v       | <i>V v</i> | ве               |
| J j       | <i>J j</i> | йот (жі)         | W w       | <i>W w</i> | дубль-ве         |
| K k       | <i>K k</i> | ка               | X x       | <i>X x</i> | ікс              |
| L l       | <i>L l</i> | ель              | Y y       | <i>Y y</i> | ігрек            |
| M m       | <i>M m</i> | ем               | Z z       | <i>Z z</i> | зет              |

### *Букви грецького алфавіту та їх читання у формулах*

| Букви     |            | Читання<br>букви | Букви     |            | Читання<br>букви |
|-----------|------------|------------------|-----------|------------|------------------|
| Друкована | Курсив     |                  | Друкована | Курсив     |                  |
| A α       | <i>A α</i> | альфа            | N ν       | <i>N ν</i> | ню (ні)          |
| B β       | <i>B β</i> | бета             | Ξ ξ       | <i>Ξ ξ</i> | ксі              |
| Γ γ       | <i>Γ γ</i> | гамма            | O o       | <i>O o</i> | омікрон          |
| Δ δ       | <i>Δ δ</i> | дельта           | Π π       | <i>Π π</i> | пі               |
| E ε       | <i>E ε</i> | епсилон          | Ρ ρ       | <i>Ρ ρ</i> | ро               |
| Z ζ       | <i>Z ζ</i> | дзета            | Σ σ       | <i>Σ σ</i> | сигма            |
| Η η       | <i>Η η</i> | ета              | Τ τ       | <i>Τ τ</i> | тау              |
| Θ θ       | <i>Θ θ</i> | тета             | Υ υ       | <i>Υ υ</i> | іпсилон          |
| I ι       | <i>I ι</i> | йота             | Φ φ       | <i>Φ φ</i> | фі               |
| K κ       | <i>K κ</i> | капа             | Χ χ       | <i>Χ χ</i> | хі               |
| Λ λ       | <i>Λ λ</i> | ламбда           | Ψ ψ       | <i>Ψ ψ</i> | псі              |
| Μ μ       | <i>Μ μ</i> | мю (мі)          | Ω ω       | <i>Ω ω</i> | омега            |

## 1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

| № помилки | Характер помилки                                                                    | Конспект лекцій та завдання для самостійної роботи студентів до розділу Елементи лінійної алгебри / упоряд. К. В. Власенко. Харків: УПА, 2005. 40 с. | Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. Изд. 2-е. Москва: Высшая школа, 1974. 416 с. |              | Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. Изд. 3-е, стереотипн. Харьков: изд-во при Харьковском гос. ун-те, 1967 |
|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|           |                                                                                     |                                                                                                                                                      | теорія                                                                                                                 | практика     |                                                                                                                                |
| 1         | 2                                                                                   | 3                                                                                                                                                    | 4                                                                                                                      | 5            | 6                                                                                                                              |
| 1.1       | Не вмієте обчислювати визначник другого порядку                                     | Л. 1, с. 5                                                                                                                                           | Гл. 1, § 5                                                                                                             |              | Ч. 1, гл. 15, № 15.1                                                                                                           |
| 1.2       | Не вмієте обчислювати визначник третього порядку за допомогою правила «трикутника». | Л. 1, с. 6                                                                                                                                           |                                                                                                                        |              | Ч. 1, гл. 15, № 15.3                                                                                                           |
| 1.3       | Не знаєте, як виносити спільний множник рядка або стовпця                           | Л. 1, с. 7                                                                                                                                           | Гл. 1, § 5                                                                                                             | № 218        |                                                                                                                                |
| 1.4       | Не знаєте, як обчислити мінор відповідного елемента визначника                      | Л. 1, с. 8                                                                                                                                           | Гл. 1, § 5                                                                                                             |              | Ч. 1, гл. 15, № 15.21                                                                                                          |
| 1.5       | Не знаєте, як обчислити алгебраїчне доповнення відповідного елемента визначника     | Л. 1, с. 9                                                                                                                                           | Гл. 1, § 5                                                                                                             | № 217        |                                                                                                                                |
| 1.6       | Не знаєте, як обчислити визначник за допомогою алгебраїчних доповнень               | Л. 1, с. 9                                                                                                                                           | Гл. 1, § 5                                                                                                             | № 217, № 218 |                                                                                                                                |

| 1    | 2                                                                                                      | 3           | 4          | 5               | 6                              |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|------------|-----------------|--------------------------------|
| 1.7  | Не знаєте, як розв'язати систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими за допомогою правила Крамера | Л. 2, с. 13 | Гл. 1, § 5 | № 208           | Ч. 1, гл. 15, № 15.5, № 15.6   |
| 1.8  | Не знаєте, як розв'язати однорідну систему двох лінійних рівнянь з трьома невідомими                   |             | Гл. 1, § 5 | № 209           | Ч. 1, гл. 15, № 15.18          |
| 1.9  | Не знаєте, як розв'язати систему трьох лінійних рівнянь за допомогою правила Крамера                   | Л. 2, с. 13 | Гл. 1, § 5 | № 219           | Ч. 1, гл. 15, № 15.13          |
| 1.10 | Не знаєте, як додавати дві матриці                                                                     | Л. 3, с. 16 | Гл. 4, § 2 | № 394           |                                |
| 1.11 | Не знаєте, як знаходити добуток матриці на числовий множник                                            | Л. 3, с. 16 | Гл. 4, § 2 | № 395           |                                |
| 1.12 | Не знаєте, як знаходити добуток двох матриць                                                           | Л. 3, с. 17 | Гл. 4, § 2 | № 396;<br>№ 397 |                                |
| 1.13 | Не знаєте, як знаходити детермінант матриці                                                            |             | Гл. 4, § 2 | № 406;<br>№ 407 | Ч. 1, гл. 15, № 15.16, № 15.12 |
| 1.14 | Не знаєте, як знаходити транспоновану матрицю                                                          | Л. 1, с. 6  |            |                 |                                |
| 1.15 | Не знаєте, як знаходити обернену матрицю по відношенню до даної                                        | Л. 3, с. 18 | Гл. 4, § 2 | № 406,<br>№ 407 |                                |
| 1.16 | Не знаєте, як розв'язувати систему лінійних рівнянь матричним методом                                  | Л. 3, с. 19 | Гл. 4, § 2 | № 407           |                                |

| 1    | 2                                                                                               | 3           | 4          | 5                                   | 6 |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|------------|-------------------------------------|---|
| 1.17 | Не знаєте, як знаходити базисні мінори матриці                                                  |             | Гл. 4, § 4 | № 432,<br>№ 433,<br>№ 437           |   |
| 1.18 | Не знаєте, як визначити ранг матриці методом нулів та границь                                   | Л. 4, с. 22 | Гл. 4, § 4 | № 429,<br>№ 430,<br>№ 431,<br>№ 432 |   |
| 1.19 | Не знаєте, як знаходити розширену матрицю системи                                               |             | Гл. 4, § 5 | № 438,<br>№ 439                     |   |
| 1.20 | Не знаєте, як застосовувати теорему Кронекера–Капеллі для визначення сумісності системи рівнянь | Л. 4, с. 24 | Гл. 4, § 5 | № 438,<br>№ 439                     |   |
| 1.21 | Не знаєте, як розв'язувати систему лінійних рівнянь методом Гауса                               | Л. 2, с. 11 | Гл. 4, § 6 | № 444,<br>№ 445                     |   |
| 1.22 | Не знаєте, як розв'язувати систему лінійних рівнянь методом Жордана–Гауса                       |             | Гл. 4, § 7 | № 452,<br>№ 453,<br>№ 454,<br>№ 455 |   |
| 1.23 | Не знаєте, як застосовувати метод Жордана–Гауса для визначення рангу матриці                    |             | Гл. 4, § 7 | № 456                               |   |

## 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

| № помилки | Характер помилки                                    | Конспект лекцій та завдання для самостійної роботи студентів до розділу Аналітична геометрія на площині та у просторі / упоряд. К. В. Власенко. Харків: УПА, 2005. 53 с. | Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1. Изд. 2-е. Москва: Высшая школа, 1974. 416 с. |                          | Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. Изд. 3-е, стереотипн. Харьков: изд-во при Харьковском гос. ун-те, 1967 |
|-----------|-----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|           |                                                     |                                                                                                                                                                          | теорія                                                                                                                 | практика                 |                                                                                                                                |
| 1         | 2                                                   | 3                                                                                                                                                                        | 4                                                                                                                      | 5                        | 6                                                                                                                              |
| 2.1       | Не знаєте, як додавати вектори                      | Л. 5, с. 5                                                                                                                                                               | Гл. 2, § 2                                                                                                             | Гл. 2, § 2, № 240        | Гл. 16, № 16.7                                                                                                                 |
| 2.2       | Не знаєте, як віднімати вектори                     | Л. 5, с. 6                                                                                                                                                               | Гл. 2, § 2                                                                                                             | Гл. 2, § 2, № 241        | Гл. 16, № 16.7                                                                                                                 |
| 2.3       | Не знаєте, як знаходити добуток вектора та скаляра  | Л. 5, с. 6                                                                                                                                                               | Гл. 2, § 2                                                                                                             | Гл. 2, § 2               |                                                                                                                                |
| 2.4       | Не знаєте, як знаходити скалярний добуток векторів  | Л. 5, с. 9                                                                                                                                                               | Гл. 2, § 3                                                                                                             | Гл. 2, § 3, № 254, № 256 | Гл. 16, № 16.15, № 16.17                                                                                                       |
| 2.5       | Не знаєте, як знаходити довжину вектора             | Л. 5, с. 9                                                                                                                                                               | Гл. 1, § 1, п. 2                                                                                                       | Гл. 2, § 2, № 243        | Гл. 16, № 16.15, № 16.17                                                                                                       |
| 2.6       | Не знаєте, як довести колінеарність векторів        | Л. 5, с. 5                                                                                                                                                               | Гл. 2, § 3                                                                                                             | Гл. 2, § 3               |                                                                                                                                |
| 2.7       | Не знаєте, як розкласти вектор по базисним векторам | Л. 5, с. 6                                                                                                                                                               |                                                                                                                        |                          |                                                                                                                                |

| 1    | 2                                                                     | 3           | 4                            | 5                                    | 6                        |
|------|-----------------------------------------------------------------------|-------------|------------------------------|--------------------------------------|--------------------------|
| 2.8  | Не знаєте, як знаходити кут між векторами                             | Л. 5, с. 9  | Гл. 2, § 3                   |                                      | Гл. 16, № 16.15, № 16.17 |
| 2.9  | Не знаєте, як визначати координати відрізка за двома заданими точками |             | Гл. 2, § 2                   | Гл. 2, § 2, № 244                    |                          |
| 2.10 | Не знаєте, як знаходити координати середини відрізка                  |             | Гл. 1, § 1, п. 2; Гл. 2, § 1 | Гл. 1, § 1, № 13, 14; Гл. 2, § 1     | Гл. 2, № 2.1, № 2.3      |
| 2.11 | Не знаєте, як знаходити мішаний добуток векторів                      | Л. 6, с. 11 | Гл. 2, § 3                   | Гл. 2, § 3, № 264, № 265             |                          |
| 2.12 | Не знаєте, як знаходити векторний добуток векторів                    | Л. 6, с. 10 | Гл. 2, § 3                   | Гл. 2, § 3, № 259, № 260, № 261      | Гл. 16, № 16.20, № 16.23 |
| 2.13 | Не знаєте, як перевіряти компланарність векторів                      | Л. 5, с. 7  | Гл. 2, § 3                   | Гл. 2, § 3; № 264, № 266; Гл. 3, § 1 |                          |
| 2.15 | Не знаєте, як застосовувати загальне рівняння прямої на площині       | Л. 7, с. 14 | Гл. 1, § 1                   | Гл. 1, § 1, № 65                     | Гл. 4, № 4.7, № 4.9      |
| 2.16 | Не знаєте, як застосовувати рівняння прямої на площині у відрізках    | Л. 7, с. 15 | Гл. 1, § 1                   | Гл. 1, § 1, № 64                     | Гл. 3, № 3.11            |

| 1    | 2                                                                                              | 3           | 4                | 5                            | 6                             |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 2.16 | Не знаєте, як застосовувати векторно-параметричне рівняння прямої на площині                   | Л. 7, с. 14 |                  |                              |                               |
| 2.17 | Не знаєте, як застосовувати канонічне рівняння прямої на площині                               |             | Гл. 1, § 2       | Гл. 1, § 2                   |                               |
| 2.18 | Не знаєте, як знаходити відстань від точки до прямої на площині                                | Л. 7, с. 16 | Гл. 1, § 2       | Гл. 1, § 2, № 84, № 85       | Гл. 5, № 5.1, № 5.2, № 5.7    |
| 2.19 | Не знаєте, як знаходити відхилення точки від прямої                                            | Л. 7, с. 17 | Гл. 1, § 2, п. 6 |                              |                               |
| 2.20 | Не знаєте, як знаходити кут між двома прямими на площині                                       | Л. 7, с. 15 | Гл. 1, § 2       | Гл. 1, § 2, № 78             | Гл. 4, № 4.14, № 4.16         |
| 2.21 | Не знаєте, як застосовувати рівняння прямої, що проходить через задану точку в даному напрямку |             | Гл. 1, § 2       | Гл. 1, § 2, № 87             | Гл. 4, № 4.7, № 4.9           |
| 2.22 | Не знаєте, як застосовувати рівняння прямої, що проходить через дві задані точки               | Л. 7, с. 14 | Гл. 1, § 2       | Гл. 1, § 2, № 81, № 82       | Гл. 4, № 4.1, № 4.2           |
| 2.23 | Не знаєте, як застосовувати рівняння пучка прямих на площині                                   |             | Гл. 1, § 2       | Гл. 1, § 2, № 96, № 97, № 98 | Гл. 6, № 6.14, № 6.12, № 6.13 |

| 1    | 2                                                                            | 3           | 4          | 5                        | 6                                 |
|------|------------------------------------------------------------------------------|-------------|------------|--------------------------|-----------------------------------|
| 2.24 | Не знаєте, як застосовувати рівняння бісектриси кута                         |             | Гл. 1, § 2 | Гл. 1, § 2, № 92, № 93   | Гл. 6, № 6.1, № 6.2               |
| 2.25 | Не знаєте, як застосовувати загальне рівняння площини                        |             | Гл. 3, § 1 | Гл. 3, § 1, № 288        | Гл. 17, № 17.33, № 17.32          |
| 2.26 | Не знаєте, як застосовувати рівняння площини у відрізках                     | Л. 8, с. 19 | Гл. 3, § 1 | Гл. 3, § 1, № 290        | Гл. 17, № 17.10                   |
| 2.27 | Не знаєте, як знаходити відстань від точки до площини                        | Л. 8, с. 20 | Гл. 3, § 1 | Гл. 3, § 1, № 287        | Гл. 17, № 17.19                   |
| 2.28 | Не знаєте, як знаходити відхилення точки від площини                         | Л. 8, с. 20 |            |                          |                                   |
| 2.29 | Не знаєте, як застосовувати рівняння площини, що проходить через три точки   | Л. 8, с. 20 | Гл. 3, § 1 | Гл. 3, § 1, № 94         | Гл. 17, № 17.35                   |
| 2.30 | Не знаєте, як знаходити кут між двома площинами                              | Л. 8, с. 19 | Гл. 3, § 1 | Гл. 3, § 1               | Гл. 17, № 17.30                   |
| 2.31 | Не знаєте, як застосовувати рівняння пучка площин                            |             | Гл. 3, § 1 | Гл. 3, § 1, № 291, № 292 | Гл. 19, № 19.18, № 19.17, № 19.14 |
| 2.32 | Не знаєте, як застосовувати векторно-параметричне рівняння прямої у просторі | Л. 8, с. 21 |            |                          |                                   |
| 2.33 | Не знаєте, як застосовувати параметричне рівняння прямої у просторі          |             | Гл. 3, § 1 | Гл. 3, § 1, № 318        |                                   |

| 1    | 2                                                                                           | 3           | 4          | 5                 | 6                       |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|------------|-------------------|-------------------------|
| 2.34 | Не знаєте, як застосовувати канонічне рівняння прямої у просторі                            | Л. 8, с. 21 | Гл. 3, § 1 | Гл. 3, § 1, № 316 | Гл. 18, № 18.1–№ 18.4   |
| 2.35 | Не знаєте, як знаходити кут між двома прямими у просторі                                    | Л. 8, с. 22 | Гл. 3, § 1 | Гл. 3, § 1        | Гл. 18, № 18.12         |
| 2.36 | Не знаєте, як застосовувати загальне рівняння прямої у просторі                             |             | Гл. 3, § 1 |                   |                         |
| 2.37 | Не знаєте, як знаходити кут між прямою і площиною у просторі                                | Л. 8, с. 22 | Гл. 3, § 1 | Гл. 3, § 1        | Гл. 19, № 19.1, № 19.2  |
| 2.38 | Не знаєте, як визначати належність двох прямих одній площині                                |             | Гл. 3, § 1 |                   |                         |
| 2.39 | Не знаєте, як знаходити координати точки перетину прямої і площини у просторі               |             | Гл. 3, § 1 | Гл. 3, § 1        | Гл. 19, № 19.7, № 19.10 |
| 2.40 | Не знаєте, як застосовувати рівняння прямої, що проходить через дві задані точки у просторі |             | Гл. 3, § 1 | Гл. 3, § 1        | Гл. 18, № 18.16         |
| 2.41 | Не знаєте, як застосовувати нормальне рівняння прямої                                       | Л. 8, с. 20 | Гл. 3, § 1 | Гл. 3, § 1, № 286 | Гл. 17, № 17.14         |

| 1    | 2                                                                                               | 3 | 4          | 5                 | 6                        |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|---|------------|-------------------|--------------------------|
| 2.42 | Не знаєте, як знаходити відстань від точки до прямої у просторі                                 |   | Гл. 3, § 1 | Гл. 3, § 1        |                          |
| 2.43 | Не знаєте, як знаходити відстань між мимобіжними прямими у просторі                             |   | Гл. 3, § 1 |                   |                          |
| 2.44 | Не знаєте, як обчислювати площу паралелограма, побудованого на векторах, розкладених по базисам |   | Гл. 2, § 3 | Гл. 2, § 3        | Гл. 16, № 16.20          |
| 2.45 | Не знаєте, як обчислювати об'єм тетраедра                                                       |   | Гл. 2, § 3 | Гл. 2, § 3, № 265 | Гл. 16, № 16.27, № 16.28 |
| 2.46 | Не знаєте, як знаходити точку, симетричну заданій точці відносно прямої                         |   | Гл. 3, § 1 | Гл. 3, § 1, № 322 |                          |
| 2.47 | Не знаєте, як знаходити точку, симетричну заданій точці відносно площини                        |   | Гл. 3, § 1 | Гл. 3, § 1, № 321 |                          |

## 3. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

| №<br>поми<br>лки | Характер<br>помилки                                   | Каплан И. А.<br>Практические<br>занятия по высшей<br>математике. Изд.<br>3-е, стереотип.<br>Харьков: изд-во<br>при Харьковском<br>гос. ун-те, 1967 | Кручкович Г. И.,<br>Гутарина Н. И.,<br>Дрюбок П. Е. и др.<br>Сборник задач по курсу<br>высшей математики:<br>учеб. пособ. для втузов.<br>Изд. 3-е, перераб. / под<br>ред. Г. И. Кручковича.<br>Москва: Высшая школа,<br>1973. 576 с. | Данко П. Е.,<br>Попов А. Г.<br>Высшая<br>математика в<br>упражнениях и<br>задачах. Ч. 1.<br>Изд. 2-е.<br>Москва:<br>Высшая школа,<br>1974. 416 с. | Лейфура В. М.,<br>Голодницький Г. І.,<br>Файст Й. І.<br>Математика:<br>підручн. для студ.<br>екон. спец. вищ.<br>навч. заклад. І–ІІ<br>рівнів акредитац.<br>Київ: Техніка,<br>2003. 640 с. | Пискунов Н. К.<br>Дифференци<br>альное и<br>интегральное<br>исчисление: учеб.<br>пособ. для<br>ВТУЗов. В 2-х т.<br>13-е изд. Т. І.<br>Москва: Наука,<br>Гл. ред. физ.-мат.<br>лит., 1985. 432 с. | Мышкис А. Д.<br>Лекции по<br>высшей<br>математике.<br>4-е изд.,<br>стереотип.<br>Москва: Наука,<br>1973. 640 с. |
|------------------|-------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1                | 2                                                     | практика                                                                                                                                           | практика                                                                                                                                                                                                                             | практика                                                                                                                                          | лекції                                                                                                                                                                                     | лекції                                                                                                                                                                                           | лекції                                                                                                          |
| 3.1              | Не знаєте, як знайти<br>область визначення<br>функції | Ч. 2, № 2.19–<br>2.24, № 3.16,<br>№ 3.17                                                                                                           | Гл. 4, § 1,<br>№ 530–535                                                                                                                                                                                                             | Гл. 5, § 2,<br>№ 472–474                                                                                                                          | Р. 9, § 1,<br>с. 156                                                                                                                                                                       | Гл. 1, § 6,<br>с. 20                                                                                                                                                                             | Гл. 1, § 3,<br>п. 15, с. 42                                                                                     |
| 3.2              | Не знаєте, як знайти<br>область значень<br>функції    |                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                   | Р. 9, § 1,<br>с. 156                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                  | Гл. 1, § 3,<br>п. 15, с. 43                                                                                     |
| 3.3              | Не знаєте, як визна-<br>чити періодичність<br>функції | Ч. 2,<br>№ 9.8–9.11                                                                                                                                | Гл. 6, § 4,<br>№ 1099, п. 1                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                   | Р. 11, § 1,<br>с. 196                                                                                                                                                                      | Гл. 1, § 8,<br>с. 24                                                                                                                                                                             | Гл. 1, § 3,<br>п. 16, с. 46                                                                                     |
| 3.4              | Не знаєте, як визна-<br>чити монотонність<br>функції  |                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                   | Р. 9, § 5,<br>с. 164                                                                                                                                                                       | Гл. 1, § 7,<br>с. 20                                                                                                                                                                             | Гл. 1, § 3,<br>п. 16, с. 44                                                                                     |
| 3.5              | Не знаєте, як<br>визначити парність<br>функції        | Ч. 2, № 4.1–<br>4.2, № 4.6                                                                                                                         | Гл. 4, § 1,<br>№ 536                                                                                                                                                                                                                 | Гл. 5, § 2,<br>№ 471                                                                                                                              | Р. 9, § 6,<br>с. 165                                                                                                                                                                       | Гл. 5, § 11,<br>с. 183                                                                                                                                                                           | Гл. 1, § 3,<br>п. 16, с. 47                                                                                     |

| 1    | 2                                                | 3                      | 4                              | 5                           | 6                  | 7                 | 8                        |
|------|--------------------------------------------------|------------------------|--------------------------------|-----------------------------|--------------------|-------------------|--------------------------|
| 3.6  | Не знаєте, як визначити обмеженість функції      |                        |                                |                             | Р. 9, § 7, с. 166  | Гл. 2, § 3, с. 39 |                          |
| 3.7  | Не знаєте, як знайти обернену функцію            | Ч. 2, № 9.1–9.2, № 9.4 | Гл. 4, § 2, п. 1, с. 147       |                             | Р. 9, § 12, с. 173 | Гл. 1, § 8, с. 23 | Гл. 1, § 3, п. 21, с. 52 |
| 3.8  | Не знаєте, як побудувати графік функції          | Ч. 2, № 4.13–4.14      | Гл. 4, § 1, № 538–560, № 568   | Гл. 5, § 3, № 483–485       | Р. 9, § 1, с. 156  | Гл. 1, § 8, с. 23 | Гл. 1, § 3, п. 14, с. 41 |
| 3.9  | Не знаєте, як задати функцію аналітично          | Ч. 2, № 4.21           | Гл. 4, § 2, № 579–584          | Гл. 5, § 3, № 486–497       | Р. 9, § 3, с. 160  | Гл. 1, § 7, с. 21 | Гл. 1, § 3, п. 13, с. 39 |
| 3.10 | Не знаєте, як задати функцію графічно            | Ч. 2, № 6.1–6.2, № 6.4 | Гл. 4, § 2, рис. 76–81, с. 146 | Гл. 5, § 3, рис. 22, с. 185 | Р. 9, § 3, с. 161  | Гл. 1, § 7, с. 21 | Гл. 1, § 3, п. 13, с. 40 |
| 3.11 | Не знаєте, як задати функцію таблично            | Ч. 2, № 5.1, № 5.5     |                                |                             | Р. 9, § 3, с. 161  | Гл. 1, § 7, с. 20 | Гл. 1, § 3, п. 13, с. 40 |
| 3.12 | Не знаєте, як задати функцію неявно              |                        | Гл. 3, § 4, № 475–481          | Гл. 1, § 4, № 187–195       | Р. 9, § 4, с. 162  |                   | Гл. 1, § 3, п. 20, с. 51 |
| 3.13 | Не знаєте, як знайти спільний член послідовності | Ч. 2, № 10.1–10.4      | Гл. 4, § 3, № 585–586          |                             | Р. 15, § 1, с. 326 |                   | Гл. 3, § 1, п. 1, с. 93  |
| 3.14 | Не знаєте, як знайти границю послідовності       | Ч. 2, № 11.1–11.3      | Гл. 4, § 2, № 590–591          | Гл. 5, § 2, № 498–499       | Р. 15, § 3, с. 330 |                   |                          |

|      |                                                                         |                                               |                       |                       |  |  |                    |                         |                         |
|------|-------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|--|--|--------------------|-------------------------|-------------------------|
|      |                                                                         |                                               |                       |                       |  |  |                    |                         |                         |
| 3.15 | Не знаєте, як застосувати властивості границь послідовностей            | Ч. 2, № 12.2, № 12.9, № 12.11, № 12.12        | Гл. 4, § 3, № 590     |                       |  |  | Р. 15, § 4, с. 334 |                         |                         |
| 3.16 | Не знаєте, як визначити нескінченно малу послідовність                  | Ч. 2, № 12.1                                  |                       |                       |  |  | Р. 15, § 5, с. 336 |                         |                         |
| 3.17 | Не знаєте, як застосувати властивості нескінченно малих послідовностей  | Ч. 2, № 12.1–12.2, № 12.11                    |                       |                       |  |  | Р. 15, § 6, с. 337 |                         |                         |
| 3.18 | Не знаєте, як знайти границю функції в точці                            | Ч. 2, № 14.1, № 14.3, № 14.5                  | Гл. 4, § 4, № 612–613 | Гл. 5, § 4, № 500–508 |  |  | Гл. 2, § 2, с. 33  | Гл. 3, § 2, п. 4, с. 97 |                         |
| 3.19 | Не знаєте, як знайти лівосторонню границю функції в точці               | Ч. 2, № 15.19, № 15.21, № 20.23               | Гл. 4, § 7, № 779–782 | Гл. 5, § 4, № 513–514 |  |  | Гл. 2, § 2, с. 35  |                         |                         |
| 3.20 | Не знаєте, як знайти правосторонню границю функції в точці              | Ч. 2, № 15.19, № 15.21, № 20.23               | Гл. 4, § 7, № 779–782 | Гл. 5, § 4, № 513–514 |  |  | Гл. 2, § 2, с. 35  |                         |                         |
| 3.21 | Не знаєте, як застосувати властивості функцій, що мають границю в точці | Ч. 2, № 14.1, № 14.3, № 14.5, № 4.13, № 14.11 | Гл. 4, § 5; № 623–629 |                       |  |  | Р. 16, § 6, с. 371 | Гл. 2, § 5, с. 43       | Гл. 3, § 2, п. 5, с. 99 |

| 1    | 2                                                                 | 3                                           | 4                     | 5                     | 6                               | 7                 | 8                       |
|------|-------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------------------|-------------------|-------------------------|
| 3.22 | Не знаєте, як визначити нескінченно малу функцію                  |                                             | Гл. 4, § 4, № 618     |                       | Р. 16, § 8, с. 377              | Гл. 2, § 4, с. 40 | Гл. 3, § 1, п. 1, с. 93 |
| 3.23 | Не знаєте, як застосувати властивості нескінченно малих функцій   |                                             |                       |                       |                                 | Гл. 2, § 4, с. 41 | Гл. 3, § 1, п. 2, с. 95 |
| 3.24 | Не знаєте, як визначити нескінченно велику функцію                |                                             | Гл. 4, § 4, № 619     |                       |                                 | Гл. 2, § 3, с. 3  | Гл. 3, § 1, п. 3, с. 96 |
| 3.25 | Не знаєте, як застосувати властивості нескінченно великих функцій |                                             |                       |                       |                                 | Гл. 2, § 3, с. 3  | Гл. 3, § 1, п. 3, с. 96 |
| 3.26 | Не знаєте, як застосувати властивості границь функцій             | Ч. 2, № 15.1, № 15.6–15.9, № 15.10, № 15.12 | Гл. 4, § 5, № 623–629 | Гл. 5, § 4, № 500–514 | Р. 16, § 6, с. 371, § 7, с. 375 | Гл. 2, § 5, с. 43 | Гл. 3, § 2, п. 5, с. 99 |
| 3.27 | Не знаєте, як застосувати першу чудову границю                    | Ч. 2, № 16.6, № 16.7, № 16.9                | Гл. 4, § 5, № 685–686 | Гл. 5, § 4, № 507     | Р. 16, § 2, с. 361              | Гл. 2, § 6, с. 47 |                         |
| 3.28 | Не знаєте, як застосувати наслідки із першої чудової границі      | Ч. 2, № 16.6, № 16.7, № 16.9, № 16.12       | Гл. 4, § 5, № 685–686 | Гл. 5, § 4, № 507     | Р. 16, § 2, с. 361              | Гл. 2, § 6, с. 48 |                         |

| 1    | 2                                                                                      | 3                                   | 4                                | 5                     | 6                  | 7                  | 8                        |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------|-----------------------|--------------------|--------------------|--------------------------|
| 3.29 | Не знаєте, як застосувати другу чудову границю                                         | Ч. 2, № 17.1–17.9, № 17.13, № 17.15 | Гл. 4, § 5, № 700–702            | Гл. 5, § 4, № 512     | Р. 16, § 3, с. 363 | Гл. 2, § 7, с. 50  |                          |
| 3.30 | Не знаєте, як застосувати наслідки із другої чудової границі                           | Ч. 2, № 17.1–17.9, № 17.13, № 17.15 | Гл. 4, § 5, № 700–702            | Гл. 5, § 4, № 512     | Р. 16, § 3, с. 363 | Гл. 2, § 7, с. 52  |                          |
| 3.31 | Не знаєте, як застосувати означення границі функції в точці мовою « $\xi$ - $\delta$ » |                                     | Гл. 4, § 4, № 612                |                       | Р. 16, § 4, с. 363 | Гл. 2, § 2, с. 33  |                          |
| 3.32 | Не знаєте, як застосувати означення границі функції в точці мовою послідовностей       |                                     | Гл. 4, § 4, № 613                | Гл. 5, § 4, № 498–499 | Р. 16, § 5, с. 368 | Гл. 2, § 2, с. 36  |                          |
| 3.33 | Не знаєте, як порівняти нескінченно малі функції                                       | Ч. 2, № 19.6, № 19.7, № 19.9        | Гл. 4, § 6, № 709–712            | Гл. 5, § 5, № 564–566 |                    | Гл. 2, § 11, с. 61 | Гл. 3, § 3, п. 7, с. 104 |
| 3.34 | Не знаєте, як обчислити границю за допомогою еквівалентних нескінченно малих функцій   | Ч. 2, № 19.11                       | Гл. 4, § 6, № 712–714, № 727–740 | Гл. 5, § 5, № 567     |                    | Гл. 2, § 11, с. 61 | Гл. 3, § 3, п. 8, с. 105 |

| 1    | 2                                                                     | 3                                            | 4                        | 5                 | 6                   | 7                  | 8                                                   |
|------|-----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|--------------------------|-------------------|---------------------|--------------------|-----------------------------------------------------|
| 3.35 | Не знаєте, як застосувати властивості нескінченно малих функцій       |                                              | Гл. 4, § 6, № 727, № 735 |                   |                     | Гл. 2, § 4, с. 41  | Гл. 3, § 1, п. 2, с. 95                             |
| 3.36 | Не знаєте, як визначити неперервність функції                         | Ч. 2, № 20.1–20.4, № 20.15, № 20.16, № 20.37 |                          |                   | Р. 16, § 9, с. 379  | Гл. 2, § 9, с. 54  | Гл. 1, § 3, п. 16, с. 45; Гл. 3, § 4, п. 12, с. 108 |
| 3.37 | Не знаєте, як визначити розрив першого роду                           | Ч. 2, № 20.32                                | Гл. 4, § 7, № 779–780    | Гл. 5, § 6, № 584 |                     | Гл. 2, § 9, с. 58  | Гл. 3, § 4, п. 12, с. 109                           |
| 3.38 | Не знаєте, як визначити розрив другого роду                           | Ч. 2, № 20.28                                | Гл. 4, § 7, № 781–782    | Гл. 5, § 6, № 583 |                     |                    |                                                     |
| 3.39 | Не знаєте, як визначити виправний розрив                              | Ч. 2, № 20.33, № 20.34                       | Гл. 4, § 7, № 778        | Гл. 5, § 6, № 585 |                     |                    | Гл. 3, § 4, п. 13, с. 108                           |
| 3.40 | Не знаєте, як застосувати властивості неперервних функцій на відрізку | Ч. 2, № 35.1, п. 3                           | Гл. 4, § 7, № 778        |                   | Р. 16, § 10, с. 381 | Гл. 2, § 10, с. 58 | Гл. 3, § 4, п. 14, с. 110                           |

Навчальне видання

*Данильчук Оксана Миколаївна  
Половенко Людмила Петрівна*

**ВИЩА МАТЕМАТИКА**

***Методичні вказівки до організації та планування  
самостійної роботи студентів  
(частина I)***

**для студентів денної та заочної форм навчання**

*Редактор А. О. Цяпало*

*Технічний редактор Т. О. Алімова*

Підписано до друку 16.03.2020 р.  
Формат 60х84/16. Папір офсетний.  
Друк – цифровий. Умовн. друк. арк. 10,86  
Тираж 30 прим. Зам. № 3

Донецький національний університет імені Василя Стуса,  
21021, м. Вінниця, вул. 600-річчя, 21  
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру  
серія ДК № 5945 від 15.01.2018 р.