МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТУСА
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ І ПРИКЛАДНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА КІБЕРБЕЗПЕКИ

А. В. Луценко

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ІІ
(Подвійний інтеграл)

Методичні рекомендації
до виконання практичних робіт
для здобувачів вищої освіти ОС «Бакалавр»
спеціальності 111 Математика

Вінниця
2024

УДК 517.3(076.5)
М 34

Затверджено на засіданні вченої ради
факультету інформаційних і прикладних технологій
Донецького національного університету імені Василя Стуса
(протокол № 2(6) від 19 грудня 2024 р.)

Укладач:

Алла ЛУЦЕНКО, доктор філософії з математики, старший викладач кафедри прикладної математики та кібербезпеки ДонНУ імені Василя Стуса.

Рецензенти:

Ірина ФРИЗ, канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри інформаційних технологій ДонНУ імені Василя Стуса;

Юлія РАССОХІНА, доктор фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник, професор понад два роки, доцент кафедри фундаментальної та прикладної хімії ДонНУ імені Василя Стуса.

М 34 Математичний аналіз ІІ (Подвійний інтеграл): методичні рекомендації до виконання практичних робіт для здобувачів вищої освіти ОС «Бакалавр» спеціальності 111 Математика / уклад. А. В. Луценко. Вінниця: ДонНУ імені Василя Стуса, 2024. 36 с.

Методичні рекомендації до виконання практичних робіт з дисципліни «Математичний аналіз ІІ» (Подвійний інтеграл) призначені для організації та виконання практичних завдань з дисципліни «Математичний аналіз ІІ». У методичних рекомендаціях подано стислий теоретичний матеріал, приклади розв’язування типових задач та завдання для самостійної роботи здобувачів. Матеріал спрямований на формування у здобувачів умінь обчислювати подвійні інтеграли в різних системах координат, застосовувати їх до знаходження площ, об’ємів та розв’язування прикладних задач. Методичні рекомендації можуть бути використані під час підготовки до практичних занять, самостійної роботи та підсумкового контролю знань. Рекомендовано для здобувачів вищої освіти спеціальності 111 Математика ОС «Бакалавр» усіх форм навчання.

УДК 517.3(076.5)

ЗМІСТ

ВСТУП 4

1. ПОНЯТТЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА 5
1.1. Основні поняття та означення 5
1.2. Основні властивості подвійних інтегралів 6

2. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ У ПРЯМОКУТНИХ ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТАХ 7
2.1. Обчислення подвійного інтеграла в прямокутній декартовій системі координат 7
2.2. Заміна змінних у подвійних інтегралах 18

3. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ У ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ 20
3.1. Перехід до полярної системи координат 20

4. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ 26
4.1. Геометричні застосування подвійних інтегралів 26
4.1.1. Обчислення площ плоских фігур 26
4.1.2. Обчислення об’ємів тіл 27
4.2. Деякі механічні застосування подвійних інтегралів 29

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ 33

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ 35

ВСТУП

Подвійний інтеграл є одним із ключових інструментів математичного аналізу, який широко використовується в багатьох галузях науки та техніки. Його застосовують для обчислення площі, об'ємів, мас, центрів мас, моментів інерції, потоків і багатьох інших фізичних та геометричних характеристик. Поняття подвійного інтеграла є важливим інструментом для студентів, науковців і практиків, які працюють у сферах математики, фізики, інженерії, економіки тощо.

У методичних рекомендаціях систематизовано та доступно пояснено основні поняття, методи, які пов'язані з подвійними інтегралами. Вони спрямовані на те, щоб допомогти читачеві зрозуміти основи теорії, навчитися виконувати розрахунки та отримати отримані знання для розв'язання практичних завдань.

У методичних рекомендаціях викладено поняття та властивості подвійного інтеграла, означення та розглянуто питання обчислення подвійного інтеграла в декартовій системі координат. Наведено формули заміни змінних у подвійному інтегралі і приклади його обчислення у полярній системі координат. Розглянуто застосування подвійного інтеграла в геометрії, механіці та фізиці.

Ці методичні рекомендації будуть корисними для студентів математичних і технічних спеціальностей, викладачів, а також усіх, хто прагне поглибити свої знання в цій темі. Сподіваємось, що поданий матеріал допоможе читачам легко засвоїти базові та прикладні аспекти подвійної інтеграції й успішно використати ці знання у професійній діяльності.

1. ПОНЯТТЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ ПОДВІЙНОГО ІНТЕГРАЛА

1.1. Основні поняття та означення

Подвійний інтеграл є узагальненням визначеного інтеграла на випадок функцій двох змінних. Він знаходить широке використання у розв'язанні прикладних задач у різноманітних галузях.

Нехай у замкненій області D, що належить площині XOY, задано неперервну функцію $z = f(x; y)$. Поділимо цю область на скінченну кількість елементарних областей $D_k(k = \overline{1; n})$. Площі отриманих областей будемо позначати відповідно через ΔS_k, а найбільшу відстань між точками області – через d_k (рис. 1.1).

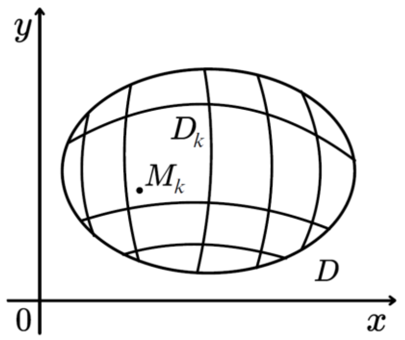


Рис. 1.1

Означення 1. У кожній елементарній області D_k оберемо довільну точку $M_k(x_k; y_k)$. $f(x_k; y_k)$ в цій точці помножимо на площу відповідної елементарної області, складемо суму всіх таких добутків:

$$f(x_1; y_1)\Delta S_1 + f(x_2; y_2)\Delta S_2 + \ldots + f(x_n; y_n)\Delta S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k; y_k)\Delta S_k.$$

Отримана сума називається ***інтегральною сумою*** функції $z = f(x; y)$ в області D.

Означення 2. Розглянемо границю інтегральної суми, коли n прагне до нескінченності так, що $max\, d_k \to 0$. Якщо така границя існує та не залежить ні від способу розбиття області на елементарні області, ні від способу вибору в них точок, то її називають ***подвійним інтегралом*** від функції $z = f(x; y)$ в області D та позначають $\iint_D f(x; y)dxdy = \iint_D f(x; y)ds$.

Отже, подвійний інтеграл визначається рівністю:

$$\iint_D f(x; y)dxdy = \lim_{\max d_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k; y_k)\, \Delta S_k.$$

Область D називають *областю інтегрування*, x та y – *змінними інтегрування*, підінтегральну функцію $z = f(x;y)$ – інтегровною в області D; $dxdy = dS$ – елементом площі.

1.2. Основні властивості подвійних інтегралів

Наведемо властивості подвійних інтегралів, що найчастіше зустрічаються в застосуваннях. Вони легко доводяться з огляду на означення 2.

1. $\iint_D [C_1 f_1(x;y) \pm C_2 f_2(x;y)]\, dxdy =$

$$= C_1 \iint_D f_1(x;y) dxdy \pm C_2 \iint_D f_2(x;y)\, dxdy,\ C_1, C_2 - const.$$

2. Якщо $f(x;y) \geq g(x;y)$ в області D, то $\iint_D f(x;y) dxdy \geq \iint_D g(x;y) dxdy$.

3. Адитивність по області інтегрування.

Якщо $D = D_1 \cup D_2 (D_1 + D_2)$, області D_1 та D_2 не перетинаються, то:

$$\iint_D f(x;y) dxdy = \iint_{D_1} f(x;y) dxdy + \iint_{D_2} f(x;y) dxdy.$$

4. Нехай в області D виконуються умови: $m \leq f(x;y) \leq M$. Тоді: $mS \leq \iint_D f(x;y)\, dxdy \leq MS$, де S – площа області D.

5. Якщо функція $f(x;y)$ неперервна в області D, то існує точка $M_0(x_0; y_0) \in D$, така, що виконується умова: $\iint_D f(x;y)\, dxdy = f(x_0; y_0) \cdot S$, звідси $f(x_0; y_0) = \frac{1}{S} \iint_D f(x;y) dxdy$ – *середнє* значення функції $f(x;y)$ в області D, S – площа області D.

2. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ У ПРЯМОКУТНИХ ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТАХ

2.1. Обчислення подвійного інтеграла в прямокутній декартовій системі координат

Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області D, то подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y)d\sigma$ не залежить від способу розбиття області D на елементарні області D_k.

Тобто область D можна розбити прямокутною сіткою, паралельною осям координат. Тоді елемент площі $d\sigma = dx \cdot dy$ (рис. 2.1).

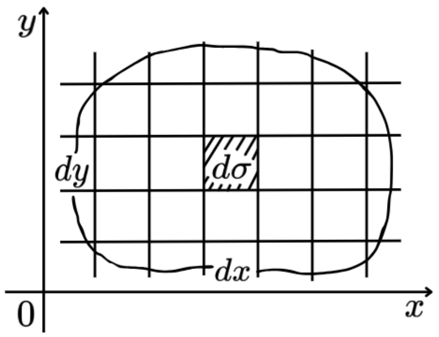


Рис. 2.1

І в цьому випадку будемо мати:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Під час обчислення подвійного інтеграла треба почати з аналізу області інтегрування D.

Обчислення подвійних інтегралів зводиться до послідовного обчислення двох звичайних інтегралів, так званих повторних інтегралів і часто залежить від властивостей границі L області D. Розглянемо такі випадки:

1. Припустимо, що область D обмежена зліва та справа прямими $x = a, x = b (a < b)$, а знизу та зверху неперервними кривими $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$, і нехай $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$.

Для будь-якого $a < x < b$ пряма, паралельна осі OY, що проходить через точку x, перетинає границю області D тільки у двох точках: $M_1(x,y)$ і $M_2(x,y)$. Таку область D ми будемо називати правильною у напрямку осі OY, і тоді область інтегрування задається умовами:

$$D : \{a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}(\text{рис. } 2.2\text{а}). \quad (1)$$

Тоді:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right] dx =$$

$$= \int_a^b \left[\Phi_1(x,y)|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\right] dx = \int_a^b \left[\Phi_1\big(x,\varphi_2(x)\big) - \Phi_1\big(x,\varphi_1(x)\big)\right] dx. \qquad (2)$$

Тобто подвійний інтеграл $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ зводиться до повторного інтеграла $\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right] dx$, де спочатку обчислюється внутрішній інтеграл $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ по змінній y, а змінна x у цьому виразі вважається параметром ($x = const$). $\Phi_1(x,y)$ – первісна функції $f(x,y)$ по змінній y. Наступне інтегрування проводиться по змінній x після застосування формули Ньютона–Лейбніца по змінній y.

Означення 3. Якщо в області D, заданій умовами (1), при кожному значенні x_0 є (a,b) пряма $x = x_0$ перетинає межу області D в одній точці входу $\varphi_1(x_0)$ та одній точці виходу $\varphi_2(x_0)$, то область називається *правильною* у напрямку осі OY.

2. Область інтегрування D обмежена знизу та зверху прямими $y = c, y = d (c < d)$, а зліва та справа – неперервними кривими $x = \phi_1(x), x = \phi_2(x)$, $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$, причому кожна з них перетинається горизонтальною прямою тільки в одній точці (рис. 2.2б). Область D у цьому випадку називається правильною в напрямку осі $0X$.

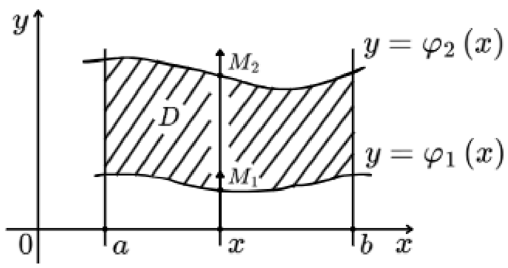
Коли область інтегрування можна подати у вигляді:

$$D\colon \{\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d\} \text{ (рис. 2.2б)}, \qquad (3)$$

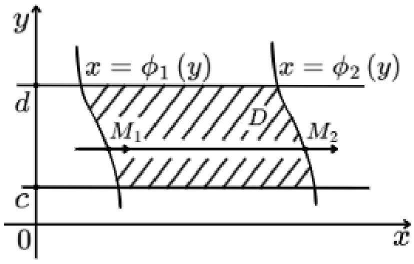
то обчислення подвійного інтеграла проводиться за такою схемою:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx\right] dy =$$

$$= \int_c^d \left[\Phi_2(x,y)|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\right] dx = \int_c^d [\Phi_2(\psi_2(y),y) - \Phi_2(\psi_1(y),y)]\,dy. \qquad (4)$$



а)



б)

Рис. 2.2

Зауваження

1. Якщо область D правильна в напрямку обох осей, то можна застосувати обидва порядки інтегрування (2) та (4). На практиці обирають той варіант, під час якого знаходження первісних і обчислення будуть простішими.

2. Якщо область D не є правильною в напрямку жодної осі, то цю область потрібно розбити на частини (наприклад, $D = D_1 \cup D_2$), до яких можна застосувати формули (2) або (4), а тоді використати властивість адитивності:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Означення 4. Інтеграли, що знаходяться в правих частинах формул (5) і (6), називають ***повторними,*** або ***двократними:***

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy\,; \tag{5}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx. \tag{6}$$

Приклад 2.1.1

Обчислити $\iint_D (x+1)ydS$, якщо D: $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geq 0$.

Розв'язання. Зобразимо схематично область D на рис. 2.3.

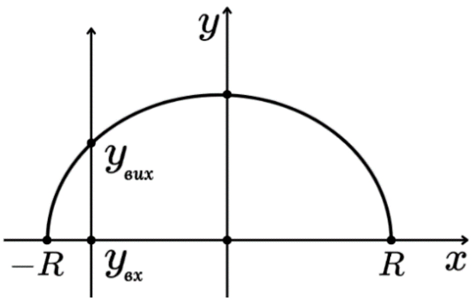


Рис. 2.3

$$\iint_D (x+1)ydS = \iint_D (x+1)ydxdy = \int_{-R}^{R} (x+1)dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} ydy =$$

$$= \int_{-R}^{R} (x+1)\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} = \int_{-R}^{R} \left(\frac{x+1}{2}\right)(R^2-x^2-0)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} (R^2x - x^3 + R^2 - x^2)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{R^2x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} + R^3 - \frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{2} + \frac{R^4}{4} + R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{2}{3}R^3.$$

Зауваження

Може статися, що область D обмежена знизу або зверху (зліва або справа) не одною лінією, а декількома.

Нехай, наприклад, $\varphi_1(x) = \begin{cases} q(x), a \le x \le c \\ p(x), c \le x \le b \end{cases}$.

Область D зображена на рис. 2.4.

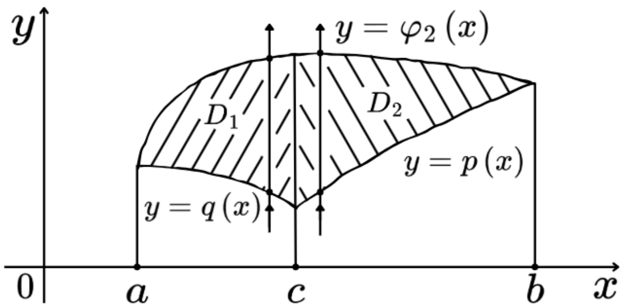


Рис. 2.4

Тоді подвійний інтеграл по області D можна представити у вигляді суми двох інтегралів:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy,$$

і через повторні інтеграли:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^c dx \int_{q(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy + \int_c^b dx \int_{p(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Приклад 2.1.2

Обчислити подвійний інтеграл $\iint(5x^2y - 2y^3)dxdy$, де область D – прямокутник: $2 \le x \le 5, \quad 1 \le y \le 3$.

Розв'язання. Область інтегрування D показано на рис. 2.5. Вона є правильною як у напрямку осі OY, так і у напрямку осі OX. Порядок інтегрування у повторному інтегралі можна обрати будь-який. Але зауважимо, що треба звертати увагу й на вигляд підінтегральної функції, тому що у деяких випадках доцільніше починати інтегрування по тій зі змінних, по якій інтеграл береться простіше.

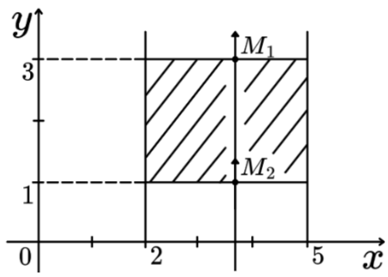


Рис. 2.5

Також бувають ситуації, коли по одній зі змінних інтеграл взяти не можна, а по іншій він легко береться. Тобто треба шукати оптимальний шлях інтегрування. Нехай зовнішній інтеграл обчислюється по змінний x, а внутрішній по y. Проводимо дві вертикальні лінії, що обмежують область зліва та справа. Область D розташована у смузі від $x = 2$ до $x = 5$. Отже, у зовнішньому інтегралі по x границі інтегрування змінюються від 2 до 5. Зараз визначимо, як змінюється y. Для цього проведемо будь-яку вертикальну пряму $x = const$ і починаємо рухатись по ній знизу вверх. Під час цього y змінюється від прямої $y = 1$ до прямої $y = 3$. Отже, інтегрування у внутрішньому інтегралі ведеться від $y = 1$ до $y = 3$:

$$\iint_D (5x^2y - 2y^3)dxdy = \int_2^5 dx \int_1^3 (5x^2y - 2y^3)dy.$$

Обчислюємо спочатку внутрішній інтеграл. Під час обчислення інтеграла по y змінна x вважається сталою:

$$\int (5x^2y - 2y^3)dy = \left(5x^2\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{2}\right)\Big|_{y=1}^{y=3} = 20x^2 - 40.$$

Інтегруємо одержану функцію по змінній x, обчислюємо зовнішній інтеграл:

$$\int_2^5 (20x^2 - 40)dx = \left(\frac{20x^3}{3} - 40x\right)\Big|_2^5 = 660.$$

Отже, $\iint (5x^2y - 2y^3)dxdy = 660.$

Приклад 2.1.3

Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, де D – область, обмежена прямими $x = 2, y = x$ і гіперболою $xy = 1$.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування (рис. 2.6). Точки перетину вказаних ліній знаходимо через сумісне розв'язання рівнянь $x = 2,\ y = x$ та $xy = 1$. Область D є правильною у напрямку осі OY, тому через крайню ліву й крайню праву точку області проводимо вертикальні прямі. Їх рівняння будуть відповідно $x = 1,\ x = 2$. Зовнішнє інтегрування буде проводитись по x, і границі інтегрування будуть: $x = 1, x = 2$. Границі інтегрування для внутрішнього інтеграла є ординати точки «входу» і точки «виходу» вертикальної прямої $x = const$.

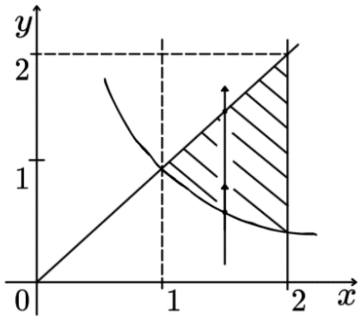


Рис. 2.6

У даному випадку для точки «входу» $y = \frac{1}{x}$, а для точки «виходу» $y = x$.

Отже, $J = \iint_D \frac{x^2}{y^2} dxdy = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy = \int_1^2 \left[\left(-\frac{x^2}{y}\right)\Big|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x} \right] dx =$

$$= \int_1^2 (x^3 - x)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{9}{4}.$$

Приклад 2.1.4

Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D xydxdy$, якщо область D обмежена лініями: $y = \sin 2x, y = 2\pi - x, x = 0$.

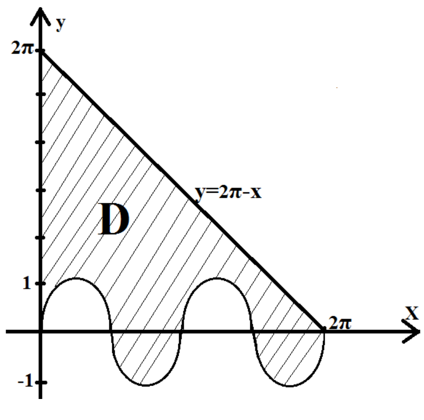


Рис. 2.7

Розв'язання. Зобразимо схематично область D (рис. 2.7). Зі властивостей функції $y = \sin 2x$ (частина межі області D) зрозуміло, що область D не є правильною у напрямку осі OX і є правильною у напрямку осі OY. З цього випливає вибір порядку інтегрування в повторному інтегралі.

Отже,

$$\iint_D xydxdy = \int_0^{2\pi} dx \int_{\sin 2x}^{2\pi - x} xydy = \int_0^{2\pi} \left[x \frac{y^2}{2} \Big|_{\sin 2x}^{2\pi - x} \right] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} x[(2\pi - x)^2 - \sin^2 2x]dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\left(4\pi^2 - \frac{1}{2} \right) x - 4\pi x^2 + x^3 + \frac{1}{2} x \cos 4x \right] dx = \frac{\pi^2}{6}(4\pi^2 - 3).$$

Зауваження

Якщо область D не є правильною ні у напрямку осі OX, ні у напрямку осі OY (тобто існують вертикальні й горизонтальні прямі, які, проходячи через внутрішні точки області D, перетинають границю області більш ніж у двох точках), то подвійний інтеграл по цій області ми не можемо представити у вигляді двократного. Якщо вдається розбити неправильну область D на скінченну кількість правильних або у напрямку осі OX, або у напрямку осі OY областей, то обчислюючи подвійні інтеграли по кожній із цих областей за допомогою двократних та додаючи їх, одержимо шуканий інтеграл по області D.

Приклад 2.1.5

Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі:

$$\int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3 - y^2}} f(x, y)dx.$$

Розв'язання. Встановимо область D, використовуючи дані границі інтегрування. Беручи до уваги порядок інтегрування, маємо, що область D знизу обмежена прямою $y = 0$, (рис. 2.8), зверху – прямою $y = 1$, зліва кривою $x = \frac{1}{2}y^2$ (парабола) і справа кривою $x = \sqrt{3 - y^2}$ (коло). Побудуємо область D.

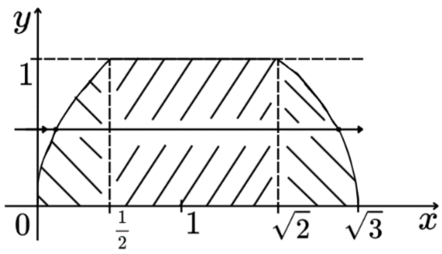


Рис. 2.8

Під час змінення порядку інтегрування, тобто під час зовнішнього інтегрування по x, через крайню ліву та крайню праву точки області проводимо вертикальні прямі. Їх рівняння $x = 0, x = \sqrt{3}$. Водночас зауважимо, що верхня границя області складається з ліній: дуги параболи, відрізка прямої й дуги кола. Рівняння цих ліній необхідно розв'язати відносно y: $y = \sqrt{2x} (y > 0), y = 1, y = \sqrt{3 - x^2} (y > 0)$. Далі область D розбиваємо на три області (абсциси точок розділу знаходимо, розв'язуючи сумісно рівняння відповідних ліній:

$D_1 = \left\{0 \le x \le \frac{1}{2}, 0 \le y \le \sqrt{2x}\right\}$, $\quad D_2 = \left\{\frac{1}{2} \le x \le \sqrt{2}, 0 \le y \le 1\right\}$,

$D_3 = \left\{\sqrt{2} \le x \le \sqrt{3}, 0 \le y \le \sqrt{3 - x^2}\right\}$.

Отже, $\int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2x}} f(x,y)dx +$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f(x,y)dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dx\,.$$

Приклад 2.1.6

Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі:

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} f(x,y)dy.$$

Розв'язання. Щоб змінити порядок інтегрування, треба поновити область інтегрування D в подвійному інтегралі (рис. 2.9). Вона обмежена лініями $x = 1, x = -1, y = x^2, y = 1$.

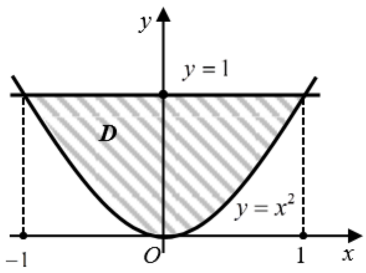


Рис. 2.9

Область D опукла в напрямку осі Ox. Проєкцією D на вісь Oy є сегмент $[0,1]$. Розв'язки рівняння $y = x^2$ відносно x задають рівняння лівої $x = -\sqrt{y}$ та правої $x = \sqrt{y}$ меж області D.

Отже, маємо:

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$$

Зауваження

Порядок інтегрування визначається тим, чи є правильною област інтегрування відносно тієї або іншої осі та кількістю повторних інтегралів, які необхідно обчислювати у тому або іншому випадку вибору порядку інтегрування.

Приклад 2.1.7

Обчислити подвійний інтеграл:

$$\int_0^2 dx \int_0^1 (x^2 + 2y)dy.$$

Розв'язання:

$$\int_0^2 dx \int_0^1 (x^2+2y)dy = \int_0^2 dx\left(x^2y + 2\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \int_0^2 (x^2+1)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3}+2 = \frac{14}{3}.$$

Приклад 2.1.8

Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D x(y-1)dxdy$, якщо D обмежена лініями $y = 5x$, $y = x$, $x = 5$.

Розв'язання. Область інтегрування D задається системою нерівностей:

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 5; \\ x \le y \le 5x. \end{cases}$$

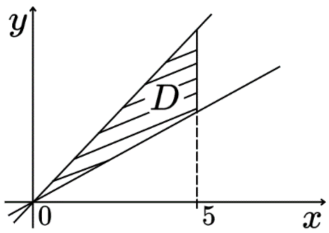


Рис. 2.10

Отже, $\iint_D x(y-1)dxdy = \int_0^5 dx \int_x^{5x} x(y-1)dy = \int_0^5 xdx \int_x^{5x} x(y-1)dy =$

$$= \int_0^5 xdx \frac{(y-1)^2}{2}\Big|_x^{5x} = \frac{1}{2}\int_0^5 xdx((5x-1)^2 - (x-1)^2) =$$

$$= x(25x^2 - 10x + 1 - x^2 + 2x - 1)dx = \frac{1}{2}\int_0^5 (24x^3 - 8x^2)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(24\frac{x^4}{4} - 8\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^5 = \frac{1}{2}\left(6\cdot 625 - \frac{8}{3}\cdot 125\right) = \frac{125}{2}\left(\frac{82}{3}\right) = \frac{5\,125}{3}.$$

Приклад 2.1.9

Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (6xy^2 - 12x^2y)\,dxdy$, де D – це квадрат зі сторонами $x = 0, x = 1, y = 2, y = 3$. У повторному інтегралі внутрішній інтеграл спочатку обчислити за змінною y, а зовнішній – за змінною x.

Обчислити даний інтеграл, змінивши порядок інтегрування.

Розв'язання. Спочатку зобразимо область інтегрування. Для обчислення скористаємося формулою (1) (оскільки за умовою внутрішній інтеграл обчислюємо за змінною y).

Запишемо заданий подвійний інтеграл через повторний:

$$\iint_D (6xy^2 - 12x^2y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_2^3 (6xy^2 - 12x^2y)dy.$$

Внутрішнє інтегрування будемо виконувати за змінною y, а зовнішнє – за змінною x. Обчислення починаємо із внутрішнього інтеграла $\int_2^3 (6xy^2 - 12x^2y)dy$, в якому змінна x розглядається як стала:

$$\int_2^3 (6xy^2 - 12x^2y)\,dy = \int_2^3 6xy^2\,dy - \int_2^3 12x^2ydy = 6x\int_2^3 y^2\,dy - 12x^2\int_2^3 ydy =$$

$$= 6x \cdot \frac{y^3}{3}\bigg|_2^3 - 12x^2 \cdot \frac{y^2}{2}\bigg|_2^3 = 2x(3^3 - 2^3) - 6x^2(3^2 - 2^2) = 38x - 30x^2.$$

Отримали функцію змінної x. Обчислюємо тепер зовнішній інтеграл:

$$\int_0^1 (38x - 30x^2)dx = \int_0^1 38xdx - \int_0^1 30x^2dx = 38\int_0^1 xdx - 30\int_0^1 x^2dx =$$

$$= 38 \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 - 30 \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = 19(1^2 - 0^2) - 10(1^3 - 0^3) = 19 - 10 = 9.$$

Отже, маємо:

$$\iint_D (6xy^2 - 12x^2y)dxdy = \int_0^1 (38x - 30x^2)dx = 9.$$

Всі наведені обчислення можна було б зробити й не обчислюючи кожен інтеграл окремо, а саме:

$$\iint_D (6xy^2 - 12x^2y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_2^3 (6xy^2 - 12x^2y)dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left[6x\int_2^3 y^2dy - 12x^2\int_2^3 ydy\right] =$$

$$= \int_0^1 \left(6x \cdot \frac{y^3}{3}\bigg|_2^3 - 12x^2 \cdot \frac{y^2}{2}\bigg|_2^3\right)dx = \int_0^1 [2x(3^3 - 2^3) - 6x^2(3^2 - 2^2)]\,dx =$$

$$= \int_0^1 (38x - 30x^2)dx = \int_0^1 38xdx - \int_0^1 30x^2dx = 38\int_0^1 xdx - 30\int_0^1 x^2dx =$$

$$= 38 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - 30 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 19(1^2 - 0^2) - 10(1^3 - 0^3) = 19 - 10 = 9.$$

Обчислимо тепер заданий за умовою подвійний інтеграл, змінивши порядок інтегрування: внутрішнє інтегрування будемо проводити за змінною x (вважаючи, що y є сталою), а зовнішнє – за змінною y:

$$\iint_D (6xy^2 - 12x^2y)\,dxdy = \int_2^3 dy \int_0^1 (6xy^2 - 12x^2y)dx =$$

$$= \int_2^3 \left[6y^2\int_0^1 xdx - 12y\int_0^1 x^2dx\right]dy = \int_2^3 \left(6y \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - 12y \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right)dy =$$

$$= \int_2^3 (3y^2 - 4y)\,dy = \left(3 \cdot \frac{y^3}{3} - 4 \cdot \frac{y^2}{2}\right)\Big|_2^3 =$$

$$= 27 - 8 - 2(9 - 4) = 19 - 10 = 9.$$

Приклад 2.1.10

Обчислити подвійний інтеграл:

$$\iint_D (6x^2y + 8xy^3)dxdy\,, \quad \text{де } D = \{1 \le x \le 2{,}3 \le y \le 4\}.$$

Розв'язання:

$$\iint_D (6x^2y + 8xy^3)dxdy = \int_1^2 \left(\int_3^4 (6x^2y + 8xy^3)dy\right)dx =$$

$$= \int_1^2 (3x^2y^2 + 2xy^4)\Big|_{y=3}^{y=4} dx = \int_1^2 (21x^2 + 350x)\,dx = (7x^3 + 175x^2)|_1^2 = 574.$$

Приклад 2.1.11

Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D (x + y + 3)dxdy$, якщо D обмежена лініями $x + y = 2$, $x = 0$, $y = 0$.

Розв'язання. Область інтегрування D обмежена прямою $y = 2 - x$ і осями координат:

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 2; \\ 0 \le y \le 2 - x. \end{cases}$$

Отже, $\iint_D (x + y + 3)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (x + y + 3)dy = \int_0^2 dx \left(xy + \frac{y^2}{2} + 3y\right)\Big|_0^{2-x} =$

$$= \int_0^2 dx\left(x(2 - x) + \frac{(2 - x)^2}{2} + 3(2 - x)\right) = \int_0^2 \left(2x - x^2 + \frac{4 - 4x + x^2}{2} + 6 - 3x\right)dx =$$

$$= \int_0^2 \left(-\frac{x^2}{2} - 3x + 8\right)dx = \left(-\frac{x^3}{6} - 3\frac{x^2}{2} + 8x\right)dx\Big|_0^2 = -\frac{8}{6} - 3\frac{4}{2} + 16 =$$

$$= -\frac{4}{3} - 6 + 16 = \frac{26}{3}.$$

Приклад 2.1.12

Обчислити подвійний інтеграл:

$$\int_0^2 dx \int_0^1 (x^2 + 2y)dy.$$

Розв'язання:

$$\int_0^2 dx \int_0^1 (x^2 + 2y)dy = \int_0^2 dx\left(x^2y + 2\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \int_0^2 (x^2 + 1)dx\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} + 2 = \frac{14}{3}.$$

2.2. Заміна змінних у подвійних інтегралах

Обчислення подвійних інтегралів $\iint_D f(x,y)dxdy$ в декартовій системі координат буває складним через специфіку як підінтегральної функції $f(x,y)$, так і області інтегрування D. В цих випадках для спрощення обчислення застосовують заміну змінних у подвійних інтегралах.

Розглянемо неперервно диференційовні функції (заміну, відображення):

$$\begin{cases} x = x(u,v); \\ y = y(u,v), \end{cases} \tag{7}$$

які взаємно однозначно відображають область $D_1(u,v)$ в область $D(x,y)$. Це означає, що існує обернене до (7) неперервно диференційовне відображення:

$$\begin{cases} u = u(x,y); \\ v = v(x,y), \end{cases} \tag{8}$$

яке однозначно відображає область $D(x,y)$ в область $D_1(u,v)$. Отже, відображення (заміни) (7) і (8) кожній точці $M(x,y) \in D$ ставлять у відповідність єдину точку $M_1(u,v) \in D_1$ і навпаки.

Теорема. Нехай виконуються умови:

1. Заміни (7) та (8) взаємно однозначно відображають область $D(x,y)$ в область $D_1(u,v)$.

2. Функції заміни (1) мають в області D_1 неперервні частинні похідні і:

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{9}$$

в області $D_1(u,v)$.

3. Функція $f(x,y)$ є неперервною в області D.

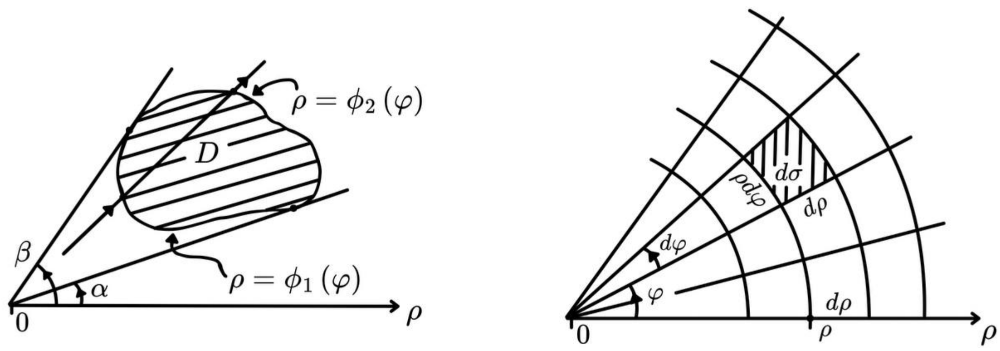
Тоді справедливий перехід до нових змінних у подвійному інтегралі:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|dudv. \tag{10}$$

Визначник $J(u,v)$ в (3) називається *визначником Якобі, або якобіаном.*

3. ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ У ПОЛЯРНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Нехай у полярній системі координат (ρ, φ) задана така область D: кожен промінь, що проходить через внутрішню точку області, перетинає границю області не більш ніж у двох точках. Припустимо, що область D обмежена кривими $\rho = \Phi_1(\varphi)$, $\rho = \Phi_2(\varphi)$ та променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$, причому $\Phi_1(\varphi) \leq \Phi_2(\varphi)$ і $\alpha < \beta$ (рис. 3.1а). Таку область знову будемо називати правильною.



а) б)

Рис. 3.1

У полярних координатах елемент площі дорівнює $d\sigma = \rho d\phi \cdot d\rho$ (рис. 3.1б).

Подвійний інтеграл від неперервної функції $F(\rho, \phi)$ по правильній області D обчислюється через повторний інтеграл за формулою:

$$\iint_D F(\rho,\phi)\rho d\rho d\phi = \int_\alpha^\beta d\phi \int_{\Phi_1(\phi)}^{\Phi_2(\phi)} F(\rho,\phi)\rho d\rho.$$

3.1. Перехід до полярної системи координат

Нехай потрібно обчислити подвійний інтеграл від функції $f(x, y)$ по області D, заданої у прямокутних координатах: $\iint_D f(x, y)dxdy$.

У подвійних інтегралах часто застосовується перехід до полярної системи координат. Як відомо, декартові координати (x, y) зв'язані з полярними координатами (ρ, φ) такими умовами:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi\,; \\ y = \rho \cdot \sin\varphi\,. \end{cases} \tag{11}$$

Тоді, $J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho \cdot \sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho \cdot \cos\varphi \end{vmatrix} = \rho(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \rho.$

Отже,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(\rho\cos\varphi\,, \rho\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi. \tag{12}$$

Зауваження

1. Полярну систему координат зручно використовувати у випадках, коли функція $f(x,y)$ або границя області D містять вирази x^2+y^2.

Тоді $x^2+y^2=\rho^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)=\ \rho^2$, а рівняння кола $x^2+y^2=\mathrm{R}^2$ перетворюється на $\rho=R$.

2. Для рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ зручно використовувати так звану узагальнену полярну систему координат:

$$\begin{cases} x=a\cdot\rho\cdot\cos\varphi\,, \\ y=b\cdot\rho\cdot\sin\varphi\,. \end{cases}$$

Водночас, як легко бачити з (3), $J(\rho,\varphi)=a\ \cdot b\cdot\rho$.

3. Під час застосування полярної системи координат область $D(x,y)$ переходить в $D_1(\rho,\varphi)$ не змінюючись, лише описується новими координатами $(\rho;\varphi)$.

Розглянемо окремо два окремі випадки області D:

а. Початок координат – точка $O(0{,}0)$, не належить області D (рис. 3.2).

Тоді: $\iint_D f(x,y)dxdy=\int_{\varphi_2}^{\varphi_1}d\phi\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}f(\rho\cos\varphi\,,\rho\sin\varphi)\rho d\rho.$

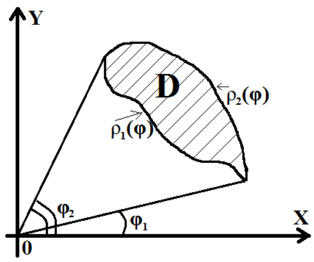


Рис. 3.2

б. Початок координат – точка $O(0{,}0)$, належить області D (рис. 3.3).

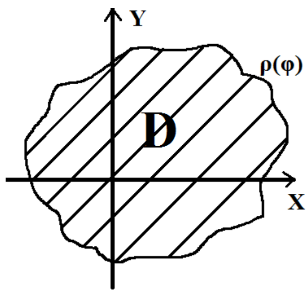


Рис. 3.3

У цьому випадку: $\iint_D f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\rho(\varphi)}f(\rho\cos\varphi\,,\rho\sin\varphi)\rho d\rho.$

Приклад 3.1.1

Обчислити $\iint_D (x+y)^3\,dxdy$, де область D обмежено лініями $x^2+y^2=2^2$, $x^2+y^2=36$, $y=x+1$, $y=x-1$, при $x>0$, $y>0$.

Із вигляду області D (рис. 3.4) зрозуміло, що обчислення цього інтеграла в декартовій системі координат буде складним. Для спрощення обчислення зробимо заміну змінних:

$$\begin{cases} u = x^2+y^2; \\ v = y - x. \end{cases} \tag{13}$$

Під час цього область D (рис. 3.4) переходить в область D_1 (прямокутник), що задається умовами $4 \le u \le 36, -1 \le v \le 1$ (рис. 3.5).

Для обчислення якобіана (9) та переходу до нових змінних $(u; v)$ в інтегралі за формулою (10) потрібно розв'язати систему рівнянь (13) відносно змінних $(x; y)$. З урахуванням умов $x>0, y>0$ маємо:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{v}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{2u - v^2}, \\ y = \dfrac{v}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{2u - v^2}. \end{cases}$$

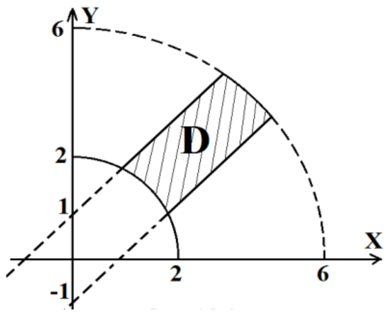


Рис. 3.4

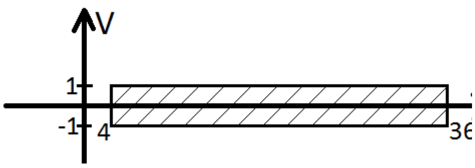


Рис. 3.5

Тоді: $J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2u-v^2}} & -\frac{1}{2} - \frac{v}{2\sqrt{2u-v^2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2u-v^2}} & \frac{1}{2} - \frac{v}{2\sqrt{2u-v^2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2u-v^2}}$.

Отже, $\iint_D (x+y)^3 dxdy = \iint_{D_1} \left(-\frac{v}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2u-v^2} + \frac{v}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2u-v^2}\right)^3 \frac{dudv}{2\sqrt{2u-v^2}} =$

$$= \frac{1}{2}\int_4^{36} d\,u \int_{-1}^{1} (2u - v^2)dv = \frac{1}{2}\int_4^{36}\left(4u - \frac{2}{3}\right)du = \frac{3\,808}{3}.$$

Приклад 3.1.2

Обчислити $\iint_D \sqrt{x^2+y^2+a^2}\,dxdy$, якщо область D (рис. 3.6) задається умовою $x^2+y^2 \le R^2$.

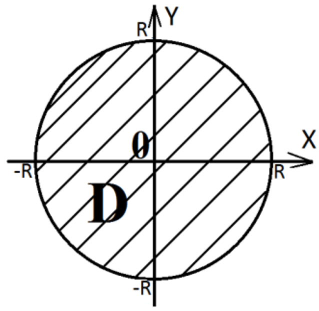


Рис. 3.6

Зважаючи на вигляд первісної:

$$\int \sqrt{u^2 + A}du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + A} + \frac{A}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C,$$

для внутрішнього повторного інтеграла (змінні x та y входять симетрично), зрозуміло, що обчислення заданого інтеграла в декартовій системі координат буде дуже громіздким. Перейдемо до полярної системи координат. Тоді:

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}dxdy = \begin{vmatrix} x = \rho cos\varphi \\ y = \rho sin\varphi \\ J = \rho \end{vmatrix} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \sqrt{\rho^2 + a^2}\rho d\rho =$$

$$= \begin{vmatrix} \rho^2 + a^2 = t \\ 2\rho d\rho = dt \end{vmatrix} = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{2}\int_{a^2}^{R^2+a^2} t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2\pi}{3}(\sqrt{(R^2 + a^2)^3} - a^3).$$

Якщо область D – правильна у полярних координатах (ρ, ϕ), то обчислення даного інтеграла можна звести до обчислення подвійного інтеграла у полярних координатах. Оскільки $x = \rho \cdot \cos\varphi\,, y = \rho \cdot \sin\varphi\,, f(x, y) = f(\rho\cos\varphi\,, \rho\sin\varphi)$, то: $\iint_D f(x, y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{\Phi_1(\phi)}^{\Phi_2(\phi)} f(\rho\cos\varphi\,, \rho\sin\varphi)\rho d\rho.$

Приклад 3.1.3

Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \frac{dxdy}{\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}$, якщо область D обмежена колом $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{16}$ (рис. 3.7).

Розв'язання. У даному інтегралі перейдемо до полярної системи координат:

$$\iint_D \frac{dxdy}{\cos^2\sqrt{x^2 + y^2}} = \iint_{D^*} \frac{\rho \cdot d\rho d\varphi}{\cos^2\rho}\ .$$

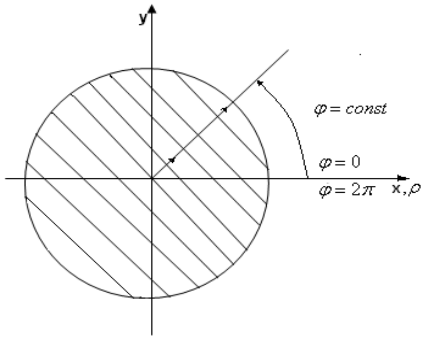


Рис. 3.7

Далі переходимо до повторного інтеграла. Зовнішній інтеграл обчислюється за змінною φ, а внутрішній – за ρ. Знайдемо границі інтегрування. Промінь, що співпадає з полярною віссю ρ, починаємо повертати проти годинникової стрілки.

Для точок області кут нахилу φ змінюється від $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$. Далі фіксуємо будь-яке проміжне значення кута і рухаємось по променю ($\varphi = const$). Для точок променя $\varphi = const$ полярна координата ρ змінюється від $\rho = 0$ до $\rho = \frac{\pi}{4}$ (остання точка будь-якого променя розташована на границі області – колі радіуса $R = \frac{\pi}{4}$). Отже, у внутрішньому інтегралі границі інтегрування змінюються від 0 до $\frac{\pi}{4}$ (у даному прикладі вони визначаються сталими числами).

Спочатку обчислюється внутрішній інтеграл за змінною ρ, при цьому змінна ϕ розглядається як стала величина:

$$J = \iint_D \frac{\rho d\rho d\varphi}{\cos^2\rho} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho d\rho}{\cos^2\rho} = \left\{ \begin{matrix} U = \rho & \Rightarrow dU = d\rho \\ dV = \dfrac{d\rho}{\cos^2\rho} & \Rightarrow V = tg\rho \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ [\rho \mathrm{tg}\rho + ln|\cos\rho| \quad \Big| \begin{matrix} \rho = \dfrac{\pi}{4} \\ \rho = 0 \end{matrix} \right\} d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right] d\varphi =$$

$$= \left[\frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cdot \varphi \, \Big| \begin{matrix} \varphi = 2\pi \\ \varphi = 0 \end{matrix} = \frac{\pi^2}{2} + 2\pi \ln\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Приклад 3.1.4

Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$, де область D обмежена колами $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$ та прямими $y = x$ і $y = 2x$.

Розв'язання. Побудуємо область інтегрування D (рис. 3.8). Визначимо границі інтегрування. Запишемо рівняння ліній, що оточують область D, у полярних координатах:

$$\rho^2 \cdot \cos^2\varphi + \rho^2 \cdot \sin^2\varphi = 4\rho \cdot \cos\varphi,$$
$$\rho^2 \cdot \cos^2\varphi + \rho^2 \cdot \sin^2\varphi = 8\rho \cdot \cos\varphi \quad \text{і} \quad \rho \cdot \sin\varphi = \rho \cdot \cos\varphi,$$
$$\rho \cdot \sin\varphi = 2\rho \cdot \cos\varphi.$$

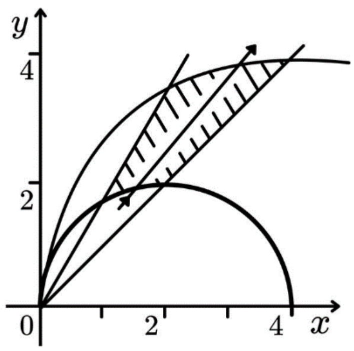


Рис. 3.8

Отже, границя області D визначається рівняннями:

$$\rho = 4 \cdot \cos\varphi\,, \quad \rho = 8 \cdot \cos\varphi\,, \quad \mathrm{tg}\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \mathrm{tg}\varphi = 2 \Rightarrow \varphi = \mathrm{arctg}2,$$

а підінтегральна функція має вигляд: $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \rho$.

Одержуємо: $\iint \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\mathrm{arctg}2} d\rho \int_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \rho^2 d\rho = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\mathrm{arctg}2} \left[\frac{\rho^3}{3}\Big|_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi}\right] d\varphi =$

$$= \frac{448}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\mathrm{arctg}2} \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{448}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\mathrm{arctg}2} (1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{448}{3}\left[\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right]\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\mathrm{arctg}2} = \frac{448}{3}\left(\frac{22}{15\sqrt{5}} - \frac{5\sqrt{2}}{12}\right).$$

Приклад 3.1.5

Обчислити подвійний інтеграл, використовуючи полярні координати:

$$\iint_D f(x;y)dxdy = \iint_D f(r\cos\varphi\,; r\sin\varphi)rdrd\varphi;$$

$$\iint_D \sqrt{(x^2+y^2)^3}dxdy\,, D \text{ – круг } x^2+y^2 = 1.$$

Розв'язання:

$$\iint_D \sqrt{(x^2+y^2)^3}dxdy = \iint_{D^*} \sqrt{(r^2)^3}rdrd\varphi = \iint_{D^*} r^3 rdrd\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{r^5}{5}\Big|_0^1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{5}\cdot 2\pi = \frac{2\pi}{5}.$$

4. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ

4.1. Геометричні застосування подвійних інтегралів

4.1.1. Обчислення площ плоских фігур

Із способу побудови інтегральних сум та змісту граничного переходу легко бачити, що подвійний інтеграл дає значення об'єму V циліндричного тіла, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y) \geq 0$, основою якого є область D в площині XOY, а зверху обмеженого поверхнею $z = f(x, y)$, $(f(x, y) \geq 0)$ (рис. 4.1), тобто:

$$V = \iint\limits_D f(x, y) dxdy. \tag{14}$$

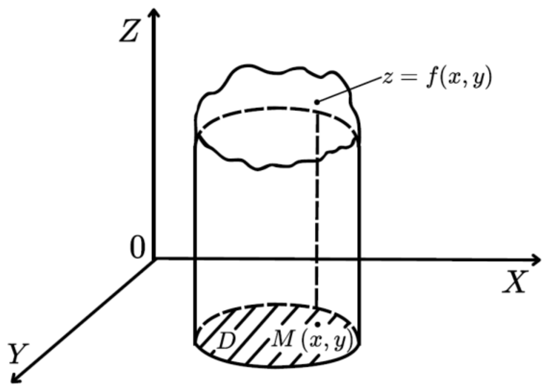


Рис. 4.1

Як наслідок, для $f(x, y) \equiv 1$ з попередньої формули для об'єму площа області D обчислюється за формулою (15):

$$S_D = \iint\limits_D dxdy. \tag{15}$$

Площа частини поверхні, представленої функцією $z = f(x, y)$, яка проєктується однозначно в область D координатної площини XOY, можна знайти за формулою (16):

$$S_{\text{пов.}} = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f_x')^2 + (f_y')^2}\, dxdy. \tag{16}$$

Приклад 4.1.1.1

Обчислити площу плоскої області D, обмежену заданими лініями:

$$y^2 = 4x, \quad x = 3, \quad y \geq 0.$$

$$S = \iint_D dxdy; \qquad D: \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le \sqrt{4x} \end{cases}.$$

Розв'язання:

$$S = \iint_D dxdy = \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{4x}} dy = \int_0^3 dxy \Big|_0^{\sqrt{4x}} = \int_0^3 \sqrt{4x}\,dx =$$

$$= 2\int_0^3 x^{\frac{1}{2}} dx = 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^3 = \frac{4}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^3 = \frac{4}{3}\sqrt{27} = \frac{4}{3}\cdot 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Приклад 4.1.1.2

Обчислити площу фігури, обмежену заданими лініями: $y = x^2 + 1, y = 0$, $x = 0, x = 2$.

Розв'язання:

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 2; \\ 0 \le y \le x^2 + 1. \end{cases}$$

$$S = \iint_D dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{x^2+1} dy = \int_0^2 dx \cdot y \Big|_0^{x^2+1} = \int_0^2 (x^2+1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}.$$

4.1.2. Обчислення об'ємів тіл

Об'єм V циліндроїда, обмеженого поверхнею $z = f(x, y), (f(x, y) \ge 0)$, дорівнює подвійному інтегралу від функції $f(x, y)$ по області D: $V = \iint_D f(x, y)d\sigma$, а в прямокутних координатах:

$$V = \iint_A f(x; y)dxdy. \tag{17}$$

Приклад 4.1.2.1

Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2$, $z = 0, y = 1$, $y = 2x$ і $y = 6 - x$.

Розв'язання. Задане тіло обмежене зверху частиною параболоїда обертання $z = x^2 + y^2$, а знизу – частиною площини Oxy, вміщеною між прямими $y = 1$, $y = 2x, y = 6 - x$.

За формулою (17):

$$V = \iint_A (x^2 + y^2)dxdy.$$

Розставляючи межі інтегрування в подвійному інтегралі, отримуємо:

$$V = \int_1^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^{6-y} (x^2 + y^2)\, dx = \int_1^4 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right)\Bigg|_{\frac{y}{2}}^{6-y} dy =$$

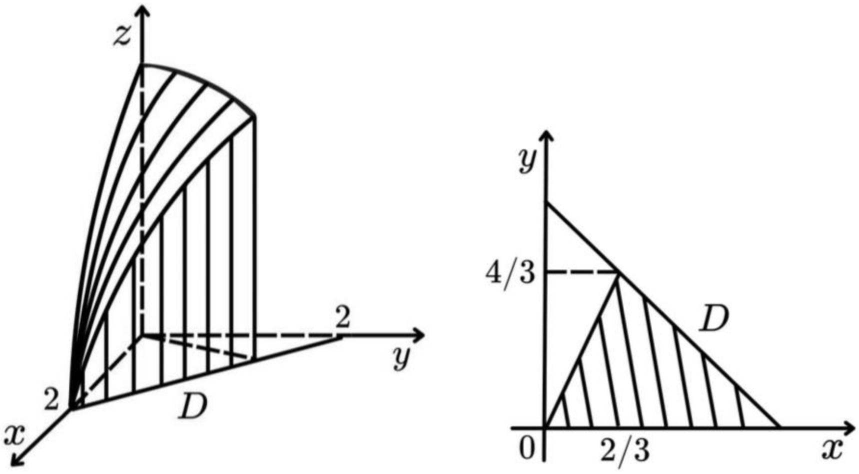
$$= \int_1^4 \left[\frac{(6-y)^3}{3} + y^2(6-y) - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2}\right] dy = 78\frac{15}{32}.$$

Приклад 4.1.2.2

Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = 4 - x^2, x + y = 2, y = 2x, z = 0, y = 0.$

Розв'язання. Дане тіло – циліндроїд (рис. 4.2а), обмежений зверху поверхнею $z = 4 - x^2$, тому $V = \iint_D (4 - x^2) dxdy.$

На площині XOY тіло вирізує трикутник, обмежений прямими $x + y = 2$, $y = 2x, y = 0$. Його вершинами є точки $(0,0), (2,0), \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ (рис. 4.2б). Область D – правильна у напрямку осі OX.



а) б)

Рис. 4.2

$$V = \iint_D (4 - x^2)\, dxdy = \int_0^{\frac{4}{3}} dy \int_{\frac{y}{2}}^{2-y} (4 - x^2) dx = \int_0^{\frac{4}{3}} \left[\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{y}{2}}^{2-y}\right] dy =$$

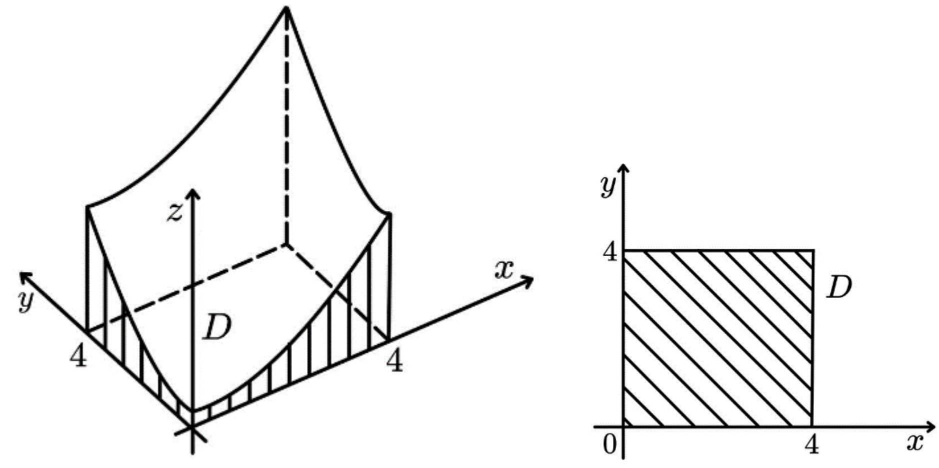
$$= \int_0^{\frac{4}{3}} \left[\frac{16}{3} 2y - 2y^2 + \frac{3}{8} y^3\right] dy = \left(\frac{16}{3} y^2 - 2\frac{y^3}{3} + \frac{3y^4}{32}\right)\Bigg|_0^{\frac{4}{3}} = \frac{328}{81} (\text{куб. од.}).$$

Приклад 4.1.2.3

Обчислити об'єм тіла, обмеженого площинами $x = 0, y = 0, x = 4, y = 4$ і параболоїдом $z = x^2 + y^2 + 1$ (рис. 4.3а).

Розв'язання. Зверху тіло обмежено параболоїдом, тому:

$$V = \iint_D (x^2 + y^2 + 1)dxdy.$$



а) б)

Рис. 4.3

Область D – квадрат: $0 \leq \mathrm{x} \leq 4, 0 \leq \mathrm{y} \leq 4$ (рис. 4.3б).

4.2. Деякі механічні застосування подвійних інтегралів

1. Маса матеріальної пластини з поверхневою густиною $\gamma'\Upsilon(x,y)$, що має форму області D в площині XOY, обчислюється через подвійний інтеграл:

$$m = \iint_D {}'\Upsilon\gamma(x,y)dxdy. \tag{18}$$

2. Статичні моменти такої пластини відносно осей OX та OY (див. відповідні означення теоретичної механіки) можна представити у вигляді:

$$M_x = \iint_D y'\Upsilon \cdot \gamma(x,y)dxdy;$$

$$M_y = \iint_D x'\Upsilon \cdot \gamma(x,y)dxdy.$$

3. Координати $x_ц$ та $y_ц$ центру мас пластини, з урахуванням попередніх позначень, обчислюються за формулами:

$$x_ц = \frac{M_y}{m}; \quad y_ц = \frac{M_x}{m}.$$

Приклад 4.2.1

Обчислити площу області D, обмеженої лініями $y = x^2, y = \frac{x^2}{4}, y = 1, y = 4.$

Розв'язання. З рис. 4.4 видно, що задана область є правильною у напрямку осі OX.

Отже,

$$S_D = \iint_D dxdy = \int_1^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} dx = \int_1^4 (2\sqrt{y} - \sqrt{y})dy = \frac{2}{3} y^{3/2} \Big|_1^4 = \frac{14}{3} \text{ (кв. од.)}.$$

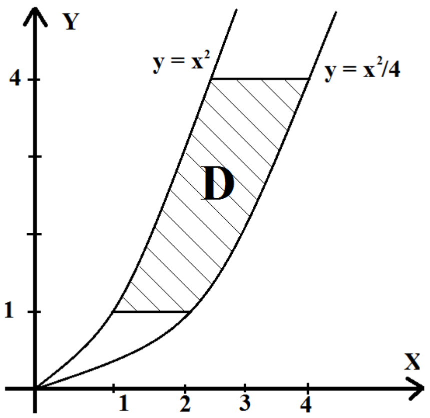


Рис. 4.4

Приклад 4.2.2

Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

Розв'язання. Виходячи з формули площі області D в декартовій системі координат $S_D = \iint_D dx\, dy$ і рівняння еліпса, обчислення зручніше провести в узагальненій системі координат: $x = a\rho \cos\varphi, \quad y = b\rho \sin\varphi, \quad J(\rho, \varphi) = ab\rho.$ Враховуючи форму еліпса (рис. 4.5), очевидно, що для внутрішньої його частини справедливі умови: $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1.$

Отже, $S = \iint_D dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ab\rho d\rho = ab \cdot (\varphi) \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{\rho^2}{2}\right) \Big|_0^1 =$

$$= ab\; 2\pi \frac{1}{2} = \pi ab \text{ (кв. од.)}.$$

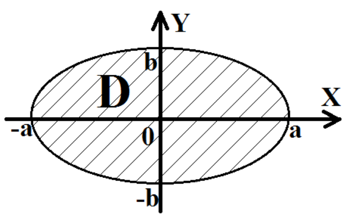


Рис. 4.5

Приклад 4.2.3

Обчислити об'єм циліндричного тіла, обмеженого поверхнями:

$$y = 2x, y = -x, x = h, z = o, z = 3x^2 + y^2 + 2.$$

Розв'язання. Рівняння $y = 2x, y = -x, x = h$ задають площини в R^3, паралельні осі OZ. Ці площини в сукупності утворюють циліндричне тіло, обмежене знизу координатною площиною XOY $(z = o)$, а зверху – еліптичним параболоїдом $z = 3x^2 + y^2 + 2$.

Основою циліндричного тіла є область D_{xy} в координатній площині XOY, яка зображена на рис. 4.6.

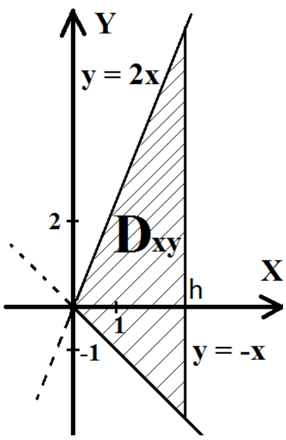


Рис. 4.6

Тоді: $V = \iint_{D_{xy}} (3x^2 + y^2 + 2)dxdy = \int_0^h dx \int_{-x}^{2x} (3x^2 + y^2 + 2)dy =$

$$= \int_0^h \left(3x^2(2x + x) + \frac{y^3}{3}\Big|_{-x}^{2x} + 2(2x + x) \right) dx = \int_0^h (12x^3 + 6x)dx =$$

$$= 3h^2(h^2 + 1).$$

Приклад 4.2.4

Знайти координати центра ваги матеріальної пластини D з густиною $\Upsilon\gamma(x, y) = xy^2$, обмеженої лініями $y = \sqrt{3}x, y = 0, x^2 + y^2 = R^2$, при $x \geq 0$.

Розв'язання. Враховуючи задані умови, форму пластини D зобразимо на рис. 4.7.

Обчислення відповідних подвійних інтегралів проведемо в полярній системі координат. При цьому з рівняння $tg\varphi = \sqrt{3}$ (пряма $y = \sqrt{3}x$, рис. 4.6) маємо гострий кут $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

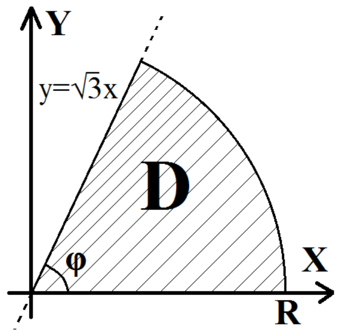


Рис. 4.7

Отже, $m = \iint_D xy^2 dxdy = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ J = \rho \end{vmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^R \rho\cos\varphi \cdot \rho^2 \sin^2\varphi \cdot \rho d\rho =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\varphi \cos\varphi \, d\varphi \int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{\sin^3\varphi}{3}\bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\rho^5}{5}\bigg|_0^R = R^5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{40};$$

$$M_x = \iint_D xy^3 dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3\varphi \, cos\,\varphi \, d\varphi \int_0^R \rho^5 d\rho = \frac{\sin^4\varphi}{4}\bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{\rho^6}{6}\bigg|_0^R = R^6 \cdot \frac{3}{128};$$

$$M_y = \iint_D x^2 y^2 dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi \int_0^R \rho^5 d\rho = \frac{R^6}{6} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 2\varphi}{4} d\varphi =$$

$$= \frac{R^6}{24} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi = \frac{R^6 (8\pi + 3\sqrt{3})}{1152}.$$

Тоді, використовуючи наведені вище формули для координат центра мас пластини, будемо мати:

$$x_{ц} = \frac{\mathrm{M}_y}{m} = \frac{R \cdot 5\sqrt{3}(8\pi + 3\sqrt{3})}{432} \approx 0{,}61R;$$

$$y_{ц} = \frac{\mathrm{M}_x}{m} = \frac{R \cdot 5\sqrt{3}}{16} \approx 0{,}54R.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

1. Розставити межі для двох різних порядків інтегрування, якщо область D обмежена заданими лініями або відповідає вказаним нерівностям:

1) $D: y = 2x, y = 0, 2x + y - 8 = 0;$
2) $D: x = 1 - y^2, y = -x - 1;$
3) $D: 4y = x^3, y = 2, x = 0;$
4) $D: y = \frac{1}{1+x}, 2x + 3y - 5 = 0;$
5) $D: y = (x-1)^2 - 1, y = x;$
6) $D: y = 1 - 2x, y = x + 4, y = 1;$
7) $D: x - 2y = 0, 2x - y = 0, y = 2;$
8) $D: y = 1 - (x+1)^2, y = 2, x = -1, x = 1;$
9) $D: y = log_3 x, y = 1, y = 1 - x;$
10) $D: x = y^2, x + y^2 - 2 = 0.$

2. Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі:

1) $\int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f(x,y)\,dx;$	2) $\int_0^1 dy \int_{-y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx;$
3) $\int_{-2}^0 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x,y)\,dy;$	4) $\int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f(x,y)\,dx;$
5) $\int_1^e dy \int_0^{ln\,y} f(x,y)\,dx;$	6) $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-1} f(x,y)\,dy;$
7) $\int_{-2}^0 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy;$	8) $\int_{-2}^0 dy \int_{-2-y}^{2+y} f(x,y)\,dx;$
9) $\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f(x,y)\,dy;$	10) $\int_1^2 dx \int_1^{\frac{2}{x}} f(x,y)\,dy.$

3. Обчислити повторний інтеграл і відновити область інтегрування:

1) $\int_0^4 dx \int_0^1 (x + 3y^2)dy;$	2) $\int_1^2 dx \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} dy;$
3) $\int_1^2 dx \int_x^{\sqrt{3}} xydy;$	4) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^3\,d\rho;$
5) $\int_0^2 dx \int_0^1 (x^2 + 2y)dy\,;$	6) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{3\cos\varphi} \rho^2 \sin^2\varphi\,d\rho;$
7) $\int_0^2 dx \int_0^4 (x + y^2)dy\,;$	8) $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2}y} \frac{ydx}{x^2+y^2}\,;$
9) $\int_1^2 dy \int_0^{ln\,y} e^x\,dx;$	10) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x yxdy.$

4. Змінити порядок інтегрування:

1) $\int_0^1 dy \int_{y/2}^{2y} f(x,y)\,dx + \int_1^4 dy \int_{y/2}^2 f(x,y)dx;$
2) $\int_1^3 dy \int_0^{log_3 y} f(x,y)dx + \int_3^4 dy \int_0^{4-y} f(x,y)dx;$

3) $\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{x/2} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{\sqrt{x^2-3}}^{x/2} f(x,y)dy$;

4) $\int_{-2}^2 dx \int_0^{(x+2)/2} f(x,y)dy + \int_2^{10/3} dx \int_{\sqrt{x^2-4}}^{(x+2)/2} f(x,y)dy$.

5. Обчислити подвійний інтеграл:

1) $\iint_D xydxdy$, D – трикутник з вершинами $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(1;0)$;

2) $\iint_D ydxdy$, D – трикутник з вершинами $O(0;0)$, $A(1;2)$, $B(2;1)$;

3) $\iint_D (x^2+y)dxdy$, D – область, обмежена параболами $y=x^2$, $y^2=x$;

4) $\iint_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, D – область, обмежена прямими $x=2$, $y=x$ і гіперболою $xy=1$.

6. Розставити межі інтегрування в $\iint_D f(x,y)\,dxdy$, якщо область:

1) D – прямокутник з вершинами $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(2;1)$, $C(0;1)$;

2) D – прямокутник з вершинами $O(0;0)$, $A(-3;0)$, $B(-3;2)$, $C(0;2)$;

3) D – трикутник з вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(1;1)$;

4) D – трикутник зі сторонами $x=0$, $y=0$, $x+y=5$;

5) D – паралелограм з вершинами $A(1;2)$, $B(2;4)$, $C(2;7)$, $D(1;5)$;

6) D – паралелограм зі сторонами $y=x$, $y=x-4$, $y=0$, $y=2$;

7. Написати рівняння кривих, які обмежують області інтегрування даних повторних інтегралів, і побудувати ці області:

1) $\int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^1 f(x;y)dy$;	2) $\int_0^{\frac{2}{3}} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{-x+\sqrt{3}} f(x;y)dy$;
3) $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x;y)dy$;	4) $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x;y)dy$;
5) $\int_0^2 dx \int_{2x}^{6-x} f(x;y)dy$;	6) $\int_{-1}^0 dy \int_{-1-2y}^{y^2} f(x;y)dx$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: навч. посіб. Київ: А.С.К., 2005. 648 с.

2. Грималюк В. П., Кухарчук М. М., Ясінський В. В. Вища математика: навч. посіб. Віпол, 2004. 376 с.

3. Методичні вказівки до виконання розрахункової роботи на тему «Визначений інтеграл» / уклад.: В. М. Горбачук, А. Ф. Мельник. Київ: Київ. політехн. ін-т ім. Ігоря Сікорського, 1992. 20 с.

4. Гула В. Г., Синєкоп М. С., Голубєва Н. Я. та ін. Вища математика: посібник для самостійного вивчення курсу: посібник / ред. М. С. Синєкопа. Харків: Харків. держ. ун-т харчування та торгівлі, 2007. 303 с.

5. Кулініч Г. Л., Таран Є. Ю., Бурим В. М. Вища математика. Спеціальні розділи: підручник / ред. Г. Л. Кулініч. 2-ге вид. Київ: Либідь, 2003. 268 с.

6. Ільюшко В. М., Золочевська Л. О. Диференціальне та інтегральне числення функцій комплексної змінної: метод. вказівки. Харків: Харків. держ. ун-т харчування та торгівлі, 2006. 144 с.

7. Ільюшко В. М., Золочевська Л. О. Ряди аналітичних функцій: метод. вказівки. Харків: Харків. держ. ун-т харчування та торгівлі, 2006. 36 с.

8. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз: підручник. Київ: Либідь, 1994. 624 с.

9. Кравченко Л. К., Синєкоп М. С., Торяник Д. О. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли: метод. вказівки. Харків: Харків. держ. ун-т харчування та торгівлі, 2006. 52 с.

Навчальне видання

Луценко Алла Володимирівна

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ II
(Подвійний інтеграл)

Методичні рекомендації
до виконання практичних робіт
для здобувачів вищої освіти ОС «Бакалавр»
спеціальності 111 Математика

Редактор О. А. Солдатова
Технічний редактор Т. О. Важеніна-Гопрак

Підписано до друку 16.12.2024.
Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Друк – цифровий. Умовн. друк. арк. 2,09.
Тираж 30. Зам. 14.

Донецький національний університет імені Василя Стуса
21021, м. Вінниця, 600-річчя, 21
Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК № 5945 від 15.01.2018