

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ І ПРИКЛАДНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ**

О. М. Данильчук

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

**Навчально-методичний посібник
(для студентів та слухачів підготовчих курсів)**

**Вінниця
ДонНУ імені Василя Стуса
2020**

УДК 519.6 (075.3)
Д 183

*Затверджено на засіданні вченої ради
факультету інформаційних і прикладних технологій
(Протокол № 3 від 27.11.2019 р.)*

Автор: О. М. Данильчук, канд. пед. наук, старший викладач кафедри прикладної математики.

Рецензенти: Л. П. Половенко, канд. пед. наук, доцент;
О. Д. Трофименко, канд. фіз.-мат. наук, доцент.

О. М. Данильчук

Д 183 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь: навчально-методичний посібник (для студентів та слухачів підготовчих курсів) / укладач О. М. Данильчук. Вінниця: ДонНУ, 2020. 60 с.

У посібнику в стислій формі наведено теоретичний матеріал шкільного курсу математики (означення, формули, теореми). Розглянуто основні методи дослідження і багато уваги приділено розв'язуванню систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Кожен пункт супроводжується достатньою кількістю прикладів, до яких наведено відповіді. Призначений для слухачів підготовчих курсів інституту доуніверситетської підготовки та учнів загальноосвітніх шкіл, гімназій, коледжів, а також для підготовки до занять з дисциплін: «Методика викладання математики», «Методика викладання інформатики», «Практикум з розв'язування задач».

УДК 519.6 (075.3)

©Данильчук О. М., 2020
©ДонНУ імені Василя Стуса, 2020

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	4
ТЕМА 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, ОЗНАЧЕННЯ ТА ТЕОРЕМИ.....	6
1.1. Рівносілні системи рівнянь	6
ТЕМА 2. ТОЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА НЕВІДОМИМИ	8
2.1. Метод підстановки	9
2.2. Системи лінійних рівнянь	10
2.3. Метод виключення невідомих	11
2.4. Метод Крамера	13
2.5. Геометрична інтерпретація розв'язку систем лінійних рівнянь з двома змінними.....	19
2.6. Системи лінійних рівнянь, що містять знак модуля	25
2.7. Вправи для практичного і самостійного розв'язування.....	30
ТЕМА 3. ТОЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ТРЬОМА НЕВІДОМИМИ	35
3.1. Метод підстановки	35
3.2. Метод виключення невідомих	36
3.3. Метод Гаусса	40
3.4. Метод Крамера	44
3.5. Геометрична інтерпретація розв'язку систем лінійних рівнянь з трьома змінними	50
3.6. Системи лінійних рівнянь, що містять знак модуля	51
3.7. Вправи для практичного і самостійного розв'язування.....	53
ТЕМА 4. ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ЗА РІВНЯМИ СТАНДАРТУ	57
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	60

ПЕРЕДМОВА

Пропонований навчально-методичний посібник підготовлений відповідно до програм з математики для слухачів підготовчих курсів ДонНУ імені Василя Стуса, освітніх програм для студентів математичного профілю навчання, програм загальноосвітніх шкіл та програм міністерства освіти і науки України з математики. Його мета – допомогти абітурієнтам та слухачам підготовчих курсів при вищих навчальних закладах опанувати точні методи розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь; більш ґрунтовно підготуватись студентам до практичних занять з дисциплін «Практикум з розв’язування задач», «Методика викладання математики» та інше.

Посібник розрахований на активну самостійну роботу читача. Одним із ефективних засобів самоперевірки глибини засвоєння теоретичних знань є самостійне розв’язування задач.

У посібнику подано такі точні методи розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, як метод додавання, метод підстановки, геометричне розв’язання систем рівнянь та метод Гаусса. Розглянуті задачі згруповані здебільшого за методами розв’язання. Отже, до кожного пункту пропонуються вправи та задачі з повним викладом їхнього розв’язання, а також деяких нетрадиційних методів. Оскільки в посібнику приділено значну увагу методам розв’язання, то там, де це має сенс, розглядаються інші методи розв’язання раніше розглянутих задач, що допоможе слухачам знаходити більш раціональні методи розв’язання.

Також розглянуті задачі з модулем та параметрами. В кожному пункті разом з розглянутими задачами подані і вправи для самостійного опрацювання із заздалегідь відомими відповідями. Пропонуються завдання різного рівня складності для самостійного розв’язання.

Завдання, запропоновані у цьому посібнику, нададуть можливість студентам застосовувати способи і методи розв'язування вправ під час проходження виробничих практик в школах, ліцеях, гімназіях.

Якщо Ваша практична діяльність вимагає поновлення в пам'яті математичних знань із систем лінійних рівнянь, а школу Ви закінчили давно, радимо звернутись до цього посібника, який є прекрасним для самоосвіти.

ТЕМА 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, ОЗНАЧЕННЯ ТА ТЕОРЕМИ

1.1. Рівносильні системи рівнянь

Розглянемо докладніше системи рівнянь з двома та трьома невідомими. Нехай задано два рівняння з двома невідомими

$$f_1(x, y) = g_1(x, y) \text{ та } f_2(x, y) = g_2(x, y)$$

потрібно знайти всі пари $(x_0; y_0)$, що задовольняють кожне з цих рівнянь. Тоді говорять, що задано систему рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y), \\ f_2(x, y) = g_2(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

Але система з двома невідомими може мати більше ніж два рівняння. Аналогічно позначаються і системи рівнянь з трьома, або більшою кількістю невідомих.

Розглянемо, як приклад, систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4x + y = 5, \\ x - y^2 = 0. \end{cases}$$

Пара чисел $(1; 1)$ називається **розв'язком системи**, тому що вони задовольняють обидва її рівняння. Розв'язати систему рівнянь — означає знайти всі її розв'язки, або довести, що їх не існує. Система рівнянь, яка має хоча б один розв'язок, називається **сумісною**. Якщо система не має розв'язків, то вона називається **несумісною**. Дві системи рівнянь називаються **рівносильними**, якщо будь-який розв'язок першої системи є розв'язком другої, і всякий розв'язок іншої системи є розв'язком першої. Дві несумісні системи вважаються рівносильними. Процес розв'язку системи рівнянь полягає в послідовній заміні даної системи рівносильною системою якнайпростішого виду.

Запишемо основні теореми про рівносильність систем алгебраїчних рівнянь.

Теорема 1. *Якщо в системі рівнянь замінити будь-яке рівняння рівносильним, то отримаємо систему, рівносильну даній.*

Теорема 2. *Система рівнянь*

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

рівносильна системі рівнянь

$$\begin{cases} f(x, y) + \varphi(x, y) \cdot g(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

де функція $\varphi(x; y)$ визначена при всіх допустимих значеннях невідомих даної системи. Зокрема, функція $\varphi(x; y)$ може бути константою.

Теорема 3. Система рівнянь

$$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4)$$

рівносілляна систємі

$$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (5)$$

Наслідок 1. *Якщо із одного рівняння системи виразити одну невідому через інші, а потім підставити цей вираз в усі інші рівняння системи, то отримаємо рівносильну систему.*

Системою p лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n$ називається система виду:

[illegible]

Величини $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{p1}, a_{p2}, \dots, a_{pn}$ називаються **коефіцієнтами** даної системи рівнянь, причому a_{ij} – коефіцієнт, що знаходиться в i -тому рівнянні при невідомому x_j , де $i=1,2,\dots,p$; $j=1,2,\dots,n$. Величини $b_1, b_2, \dots, b_p$ називаються **вільними членами** першого, другого, ..., p -го рівняння системи. Система рівнянь (6) називається **однорідною**, якщо всі числа b_i дорівнюють нулю, де $i=1,2,\dots,p$, і **неоднорідною**, якщо хоча б одне b_i відмінне від нуля.

Упорядкована множина n чисел $(k_1; k_2; k_3; \dots; k_n)$ називається **розв'язком системи** (6), якщо при підстановці його в систему, замість невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$, усі рівняння системи перетворюються в тотожність. Розв'язати систему рівнянь – означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Система рівнянь називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок, і несумісною, якщо вона не має жодного розв'язку. Сумісна система лінійних рівнянь називається **визначеною**, якщо вона має єдиний розв'язок. Сумісна система лінійних рівнянь називається **невизначеною**, якщо розв'язків більше, ніж один.

Система однорідних рівнянь завжди має нульовий розв'язок $(0; 0; \dots; 0)$. Якщо система однорідних рівнянь має ненульовий розв'язок $(k_1; k_2; k_3; \dots; k_n)$, тобто хоча б одне з чисел k_i відмінне від нуля, то така система має незліченну множину розв'язків виду $(t \cdot k_1; t \cdot k_2; \dots; t \cdot k_n)$, де $t \in R$.

Дві системи рівнянь рівносильні, якщо будь-який розв'язок першої системи є розв'язком другої і всякий розв'язок другої системи є розв'язком першої. Дві несумісні системи вважаються *рівносильними*.

ТЕМА 2. ТОЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА НЕВІДОМИМИ

Розглянемо систему

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases} \quad (7)$$

де x, y – невідомі, a_i, b_i, c_i – числові коефіцієнти, $i=1,2$. Розв'язком такої системи називається упорядкована пара $(x_0; y_0)$, при підстановці якої в систему кожне її рівняння перетворюється в тотожність.

Якщо $a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 0$, то будь-яка пара чисел буде розв'язком даної системи.

Якщо ж $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$, але $c_1 \neq 0$ або $c_2 \neq 0$, то система не має жодного розв'язку, тобто несумісна.

Якщо $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ і $a_2 \neq 0$, то система набуває вигляду

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0, \\ x = \frac{c_2 - b_2y}{a_2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{c_2 - b_2t}{a_2}, \\ y = t, \text{ де } t \in R, \end{cases}$$

тобто має безліч розв'язків виду $\left(\frac{c_2 - b_2t}{a_2}; t\right)$, де $t \in R$.

Якщо $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ і b_2 , то система набуває вигляду

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0, \\ y = \frac{c_2 - a_2x}{b_2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = \frac{c_2 - a_2t}{b_2}. \end{cases}$$

де $t \in R$, тобто має безліч розв'язків виду $\left(t; \frac{c_2 - a_2t}{b_2}\right)$, де $t \in R$.

Якщо $a_2 = b_2 = c_2 = 0$ і $a_1 \neq 0$, то система набуває вигляду

$$\begin{cases} x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1}, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{c_1 - b_1t}{a_1}, \\ y = t, \text{ де } t \in R, \end{cases}$$

тобто має безліч розв'язків виду $\left(\frac{c_1 - b_1t}{a_1}; t\right)$, де $t \in R$.

Якщо $a_2 = b_2 = c_2 = 0$ і $b_1 \neq 0$, то система набуває вигляду

$$\begin{cases} y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = \frac{c_1 - a_1t}{b_1}, \end{cases}$$

де $t \in R$, тобто має безліч розв'язків виду $\left(t; \frac{c_1 - a_1t}{b_1}\right)$, де $t \in R$.

Якщо $a_1 = b_1 = 0$ і $c_1 \neq 0$ або $a_2 = b_2 = 0$ і $c_2 \neq 0$, то система несумісна.

Розглянемо випадок, коли хоч би одне з чисел a_1, b_1 та a_2, b_2 відмінне від нуля, тобто $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ та $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

Система $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ називається **системою лінійних рівнянь з двома невідомими**, де $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ і $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

2.1. Метод підстановки

Метод розв'язання системи рівнянь, що ґрунтується на теоремі 3, називається **методом підстановки**. На теоремі 2 ґрунтується **метод алгебраїчного додавання рівнянь**.

Спосіб підстановки полягає в тому, що:

- 1) із одного рівняння ми знаходимо вираз одного з невідомих, наприклад x , через відомі величини та іншу невідому y ;
- 2) знайдений вираз підставляємо в інше рівняння, в якому після цієї підстановки буде міститися тільки одна невідома y ;
- 3) розв'язуємо отримане рівняння і знаходимо значення y ;
- 4) підставляючи знайдене значення y у вираз замість невідомого x , знайдений на початку розв'язку, отримуємо значення x .

Цей метод полягає в тому, що з одного рівняння визначаємо вираз для однієї змінної і підставляємо його в інше рівняння. Звідси одержуємо значення для цієї змінної, за яким одержуємо значення першої змінної.

Нехай $a_1 \neq 0$, тоді виразимо з першого рівняння x :

$x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}$ і підставимо в друге рівняння:

$$a_2 \cdot \frac{c_1 - b_1 y}{a_1} + b_2 y = c_2 \Leftrightarrow a_2(c_1 - b_1 y) + a_1 b_2 y = a_1 c_2 \Leftrightarrow$$

$$a_2 c_1 - a_2 b_1 y + a_1 b_2 y = a_1 c_2 \Leftrightarrow (a_1 b_2 - a_2 b_1) y = a_1 c_2 - a_2 c_1.$$

Якщо $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, то $y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$, підставивши y значення x знайдемо значення x маємо, що система (2) має єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$, де $x_0 = \frac{c_1 - b_1 y_0}{a_1}$ і $y_0 = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$.

Якщо $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, і при цьому $a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0$, то одержуємо рівність $0 \cdot y = 0$, яка виконується для довільних $y \in R$, тобто в цьому випадку система (2) має безліч розв'язків виду $(\frac{c_1 - b_1 t}{a_1}; t)$, де $t \in R$.

Якщо $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, і при цьому $a_1 c_2 - a_2 c_1 \neq 0$, то одержуємо рівність $0 \cdot y = a_1 c_2 - a_2 c_1$, яка не виконується при жодному значенні y , тобто в цьому випадку система (2) не має розв'язків.

Приклад 1. Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 3x - y + 5 = 0, \\ 4x + 3y - 2 = 0. \end{cases}$

Розв'язання

З першого рівняння знайдемо $y = 3x + 5$ і підставимо цей вираз в друге рівняння:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - y + 5 = 0, \\ 4x + 3y - 2 = 0, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 5, \\ 4x + 3(3x + 5) - 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 5, \\ 13x = -13; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \cdot (-1) + 5, \\ x = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(-1; 2)\}$.

Приклад 2. При яких значеннях параметрів a і b система рівнянь

$$\begin{cases} ax - 2y - 1 = 0, \\ 6x - 4y - b = 0 \end{cases} \text{ має єдиний розв'язок, має безліч розв'язків та} \\ \text{не має жодного розв'язку?}$$

Розв'язання

З першого рівняння знайдемо $2y = ax - 1$ і підставимо цей вираз в друге рівняння:

$$\begin{aligned} \begin{cases} ax - 2y - 1 = 0, \\ 6x - 4y - b = 0, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = ax - 1, \\ 6x - 2(ax - 1) - b = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = ax - 1, \\ (6 - 2a)x = b - 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Якщо $(6 - 2a) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 3$, то система має єдиний розв'язок.

Якщо $\begin{cases} 6 - 2a = 0, \\ b - 2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3, \\ b = 2, \end{cases}$ то друге рівняння системи набуває вигляду $0 \cdot x = 0$, яке виконується для довільних $x \in R$, тобто система має безліч розв'язків.

Якщо $\begin{cases} 6 - 2a = 0, \\ b - 2 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3, \\ b \neq 2, \end{cases}$ то друге рівняння системи не виконується при жодному значенні x , тобто в цьому випадку система не має розв'язків.

Відповідь: при $a \neq 3$ система має єдиний розв'язок;

при $a = 3$ і $b = 2$ система має безліч розв'язків;

при $a = 3$ і $b \neq 2$ система не має жодного розв'язку.

Спосіб додавання або віднімання полягає в тому, що:

- 1) обидві частини одного рівняння множаться на деякий множник; обидві частини іншого рівняння множаться на інший множник; ці множники підбираються таким чином, щоб коефіцієнти при одному із невідомих в обох рівняннях після їх множення на ці множники мали одну і ту ж абсолютну величину;
- 2) додаємо два рівняння або віднімаємо одне від одного, дивлячись на те, має рівняння коефіцієнти з різними або однаковими знаками; цим одне із невідомих виключається;
- 3) розв'язуємо отримане рівняння з одним невідомим;
- 4) інше невідоме можна знайти таким же чином, але легше підставити значення першого невідомого в будь-яке із заданих рівнянь і розв'язати рівняння з одним невідомим.

2.2. Системи лінійних рівнянь.

Система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (8)$$

називається *системою лінійних рівнянь з двома невідомими* ($a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ і $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$).

Свою назву така система отримала від того, що обидва рівняння системи є рівняннями прямих ліній. З геометричної точки зору розв'язок такої системи – це координати точки перетину цих прямих. Можливі такі випадки:

1. **Прямі паралельні.** В цьому випадку розв'язків немає, тому виконується умова:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}. \quad (9)$$

2. **Прямі перетинаються.** Система має єдиний розв'язок. У цьому випадку кутові коефіцієнти прямих не рівні між собою:

$$\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2} \quad \text{або} \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}. \quad (10)$$

Домножимо перше рівняння (6) на b_2 , і друге – на b_1 :

$$\begin{cases} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = b_2 c_1, \\ a_2 b_1 x + b_2 b_1 y = b_1 c_2 \end{cases}$$

віднімаючи перше рівняння від другого почленно, отримаємо

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) x = b_2 c_1 - b_1 c_2.$$

Із даного рівняння знаходимо значення x :

$$x = \frac{b_2 c_1 - b_1 c_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Далі знаходимо y :

$$y = \frac{c_2 a_1 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

3. **Прямі збігаються.** В цьому випадку система має безліч розв'язків, тому виконується умова

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}. \quad (11)$$

У цьому випадку всі розв'язки системи задаються парами виду: $\left(x = t, y = \frac{c_1 - a_1 t}{b_1}\right)$, де $t \in \mathbf{R}$.

2.3. Метод виключення невідомих

Нехай $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, тоді помножимо перше рівняння системи (2) на a_2 , друге на $(-a_1)$ і додамо рівняння:

$$\begin{aligned} a_2 \cdot a_1 x + a_2 b_1 y - a_1 a_2 x - a_1 b_2 y &= a_2 c_1 - a_1 c_2 \Leftrightarrow a_2 b_1 y - \\ - a_1 b_2 y &= a_2 c_1 - a_1 c_2 \Leftrightarrow (a_2 b_1 - a_1 b_2) \cdot y = a_1 c_2 - a_1 c_2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot y &= a_1 c_2 - a_1 c_2. \end{aligned}$$

Далі все аналогічно, як і в методі підстановки.

Приклад 3. Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 3x - y + 5 = 0, \\ 4x + 3y - 2 = 0. \end{cases}$

Розв'язання

Перше рівняння помножимо на 4, а друге на (-3) , після чого додамо рівняння і результат запишемо замість другого рівняння початкової системи:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - y + 5 = 0, \\ 4x + 3y - 2 = 0, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 4y = -20, \\ -12x - 9y = -6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y + 5 = 0, \\ -13y = -26; \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y-5}{3}, \\ y = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(-1; 2)\}$.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} y - 4x = a, \\ 8x - 2y = 1. \end{cases}$

Розв'язання

Домножимо перше рівняння системи на 2 і додамо до другого рівняння, а результат запишемо замість першого рівняння початкової системи:

$$\begin{cases} y - 4x = a, \\ 8x - 2y = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + y = a, \\ 8x - 2y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2a + 1, \\ 8x - 2y = 1. \end{cases}$$

Якщо $a = -\frac{1}{2}$ система набуває вигляду:

$$\begin{cases} 0 = 0, \\ 8x - 2y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0, \\ y = 4x - \frac{1}{2}, \end{cases} \text{ тобто є сумісною і невизначеною та}$$

має розв'язок $\left(t; 4t - \frac{1}{2}\right)$, де $t \in R$.

Якщо $a \neq -\frac{1}{2}$ система несумісна, оскільки в ній присутнє рівняння $0 = 2a + 1$, яке має зміст лише при $a = -\frac{1}{2}$.

Відповідь: якщо $a = -\frac{1}{2}$ система має безліч розв'язків виду $\left(t; 4t - \frac{1}{2}\right)$, де $t \in R$; при $a \neq -\frac{1}{2}$ система несумісна.

Приклад 5. При яких значеннях n система рівнянь $\begin{cases} 3x + ny = 3, \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$ має розв'язок, який задовольняє умови $x > 0$ і $y < 0$?

Розв'язання

Домножимо перше рівняння на 2 і додамо до другого рівняння, яке попередньо помножимо на (-3) , а результат додавання запишемо замість першого рівняння початкової системи:

$$\begin{cases} 3x + ny = 3, \\ 2x - 4y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2n + 12)y = 6 - 3, \\ 2x - 4y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(n + 6)y = 3, \\ 2x - 4y = 1. \end{cases}$$

Якщо $n = -6$ система набуває вигляду $\begin{cases} 0 \cdot y = 3, \\ 2x - 4y = 1, \end{cases}$ тобто несумісна.

Якщо $n \neq -6$ отримаємо:

$$\begin{cases} 2(n+6)y = 3, \\ 2x - 4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2(n+6)}, \\ x = \frac{1+4y}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12+n}{2(n+6)}, \\ y = \frac{3}{2(n+6)}, \end{cases} \text{ тобто система має}$$
 розв'язок $\left(\frac{12+n}{2(n+6)}; \frac{3}{2(n+6)}\right)$. Оскільки, за умовою, цей розв'язок задовольняє умови $x > 0$ і $y < 0$, то маємо:

$$\begin{cases} \frac{12+n}{2(n+6)} > 0, \\ \frac{3}{2(n+6)} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n+6 < 0, \\ 12+n < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n < -6, \\ n < -12; \end{cases} \Leftrightarrow n < -12.$$

Відповідь: $n \in (-\infty; -12)$.

2.4. Метод Крамера

Поняття визначника виникло при розв'язуванні задачі знаходження загальних формул для розв'язування систем лінійних рівнянь через їхні коефіцієнти і вільні члени.

У нашій системі двох лінійних рівнянь з двома невідомими x і y :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

помножимо перше рівняння на b_2 , друге на $(-b_1)$, і, додавши ці рівняння, отримаємо: $(a_1b_2 - b_1a_2) = c_1b_2 - c_2b_1$. Аналогічно, перемноживши обидві частини першого рівняння на $(-a_2)$, друге на a_1 , і додавши ці рівняння, одержимо: $(a_1b_2 - b_1a_2) = a_1c_2 - a_2c_1$.

Коефіцієнт при невідомих x і y у лівих частинах одержаних рівнянь один і той самий множник $a_1b_2 - b_1a_2$, який називають визначником даної системи.

Визначником другого порядку називається число, що визначається за формулою: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2$.

Рівняння нашої системи тепер можна записати у вигляді $\Delta \cdot x = \Delta_x$ та $\Delta \cdot y = \Delta_y$, де через $\Delta, \Delta_x, \Delta_y$ позначають визначники

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2, \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - b_1c_2, \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - c_1a_2. \end{aligned}$$

Перейдемо тепер безпосередньо до метода Крамера. Для системи (7) можливі два основні випадки: $\Delta \neq 0$ або $\Delta = 0$.

I. Якщо визначник цієї системи $\Delta \neq 0$, то система (7) має єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$, де $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}$.

II. Якщо визначник цієї системи $\Delta = 0$, то можливі два випадки:

- 1) $\Delta_x = \Delta_y = \Delta = 0$ і система (7) має безліч розв'язків, оскільки одне з її рівнянь набуває вигляду $0 \cdot x = 0$ або $0 \cdot y = 0$, і зв'язок між невідомими визначається одним з рівнянь системи (7);
- 2) $\Delta_x \neq 0$ або $\Delta_y \neq 0$ і система (7) розв'язків не має, оскільки в ній буде присутнім хоча б одне з рівнянь: $0 \cdot x = \Delta_x$ або $0 \cdot y = \Delta_y$, яке не має змісту.

Приклад 6. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 3x - y = -5, \\ 4x + 3y = 2. \end{cases}$$

Розв'язання

Знайдемо визначник даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = 9 + 4 = 13;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-5) \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = -15 + 2 = -13;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-5) \cdot 4 = 6 + 20 = 26.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$, де $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-13}{13} = -1$ та $y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{26}{13} = 2$.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(-1; 2)\}$.

Приклад 7. Дослідити і розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 3x + 2y = m(2 - x), \\ 2x + my = 1. \end{cases}$$

Розв'язання

$$\begin{cases} 3x + 2y = m(2 - x), \\ 2x + my = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3 + m)x + 2y = 2m, \\ 2x + my = 1. \end{cases}$$

Знайдемо визначники даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 + m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = (3 + m) \cdot m - 2 \cdot 2 = m^2 + 3m - 4 = (m - 1)(m + 4);$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2m & 2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 2m \cdot m - 2 \cdot 1 = 2m^2 - 2 = 2(m - 1)(m + 1);$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 + m & 2m \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3 + m) \cdot 1 - 2m \cdot 2 = 3 + m - 4m = 3 - 3m = 3(1 - m) = -3(m - 1).$$

Якщо $\Delta \neq 0$, тобто $(m - 1)(m + 4) \neq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -4) \cup (-4; 1) \cup (1; \infty)$, то система має єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$, де $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2(m-1)(m+1)}{(m-1)(m+4)} = \frac{2(m+1)}{m+4}$ та $y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-3(m-1)}{(m-1)(m+4)} = -\frac{3}{m+4}$.

Якщо $\Delta = 0$, тобто $(m - 1)(m + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1, \\ m = -4, \end{cases}$ то система має безліч розв'язків або зовсім їх не має.

Якщо $m = -4$ маємо: $\Delta = 0$, а $\Delta_x = 30 \neq 0$, тобто система розв'язків не має.

Якщо $m = 1$ маємо: $\Delta_x = \Delta_y = \Delta = 0$, тобто система має безліч розв'язків. Дослідимо, якого вигляду набувають ці розв'язки. При $m = 1$ дана система набуває вигляду

$$\begin{cases} 4x + 2y = 2, \\ 2x + y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 1, \\ 2x + y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = 1 - 2t, \end{cases} \quad \text{де } t \in R.$$

Отже, при $m = 1$ система має безліч розв'язків виду $(t; 1 - 2t)$, де $t \in R$.

Відповідь: якщо $m \in (-\infty; -4) \cup (-4; 1) \cup (1; \infty)$ система має єдиний розв'язок $\left(\frac{2(m+1)}{m+4}; -\frac{3}{m+4}\right)$; якщо $m = -4$ система не має розв'язків; якщо $m = 1$ система має безліч розв'язків $(t; 1 - 2t)$, де $t \in R$.

Приклад 8. Дослідити і розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} ax + 2y = 2, \\ 2x + by = 4. \end{cases}$

Розв'язання

Знайдемо визначники даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & b \end{vmatrix} = a \cdot b - 4; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & b \end{vmatrix} = 2b - 8 = 2 \cdot (b - 4);$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4a - 4 = 4 \cdot (a - 1).$$

Якщо $\Delta \neq 0$, тобто $a \cdot b \neq 4$, то система має єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$, де $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2b-8}{ab-4}$ та $y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{4a-4}{ab-4}$.

Якщо $\Delta = 0$, тобто $a \cdot b = 4$, то варто розглянути окремо два випадки: $a = 1$ і при цьому $b = 4$ та $a \neq 1$, оскільки $\Delta_x = 0$ при $b = 4$ та $\Delta_y = 0$ при $a = 1$.

Якщо $a \cdot b = 4$ і $a \neq 1$ маємо: $\Delta = 0$, а $\Delta_y \neq 0$, тобто система розв'язків не має.

Якщо $a = 1$ і $b = 4$ маємо: $\Delta_x = \Delta_y = \Delta = 0$, тобто система має безліч розв'язків. Дослідимо, якого вигляду набувають ці розв'язки. Якщо $a = 1$ і $b = 4$ маємо наша система набуває вигляду:

$$\begin{cases} x + 2y = 2, \\ 2x + 4y = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 2, \\ x + 2y = 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y, \\ y = t; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2t, \\ y = t, \end{cases} \quad \text{де } t \in R.$$

Тобто, якщо $a = 1$ і $b = 4$ система має безліч розв'язків виду $(2 - 2t; t)$, де $t \in R$.

Відповідь: якщо $a \cdot b \neq 4$ система має єдиний розв'язок $\left(\frac{2b-8}{ab-4}; \frac{4a-4}{ab-4}\right)$; при $a \cdot b = 4$ і $a \neq 1$ система розв'язків не має; якщо $a = 1$ і $b = 4$ система має безліч розв'язків $(2 - 2t; t)$, де $t \in R$.

Приклад 9. Знайти всі значення параметра a , при яких система $\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ ax - 3y = 8 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

Розв'язання

Знайдемо визначники даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ a & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 2 \cdot a = -9 - 2a. \text{ Дана система має єдиний розв'язок тоді, коли } \Delta \neq 0, \text{ тобто } -9 - 2a \neq 0 \Leftrightarrow 2a \neq -9 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a \neq -\frac{9}{2} \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right) \cup \left(-\frac{9}{2}; \infty\right).$$

$$\text{Відповідь: } a \in \left(-\infty; -\frac{9}{2}\right) \cup \left(-\frac{9}{2}; \infty\right).$$

Приклад 10. При яких значеннях параметра a система
$$\begin{cases} 3x - (a + 1)y = 4, \\ 6x - (3a - 7)y = a - 1 \end{cases}$$
 має безліч розв'язків?

Розв'язання

Знайдемо визначники даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -(a + 1) \\ 6 & -(3a - 7) \end{vmatrix} = -3(3a - 7) + 6(a + 1) = 27 - 3a;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -(a + 1) \\ a - 1 & -(3a - 7) \end{vmatrix} = -12a + 28 + a^2 - 1 = a^2 - 12a + 27;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & a - 1 \end{vmatrix} = 3a - 3 - 24 = 3a - 27.$$

Дана система має безліч розв'язків тоді, коли: $\Delta_x = \Delta_y = \Delta = 0$, тобто

$$27 - 3a = a^2 - 12a + 27 = 3a - 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 27 - 3a = 0, \\ a^2 - 12a + 27 = 0 \\ 3a - 27 = 0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 9, \\ (a - 3)(a - 9) = 0 \\ a = 9; \end{cases} \Leftrightarrow a = 9.$$

Відповідь: $a = 9$.

Приклад 11. При яких значеннях параметра a система
$$\begin{cases} ax - 6y = a + 1, \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$$
 не має розв'язків?

Розв'язання

Знайдемо визначники даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a + 12; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} a + 1 & -6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3a + 3 + 18 = 3a + 21;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & a + 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a - 2a - 2 = a - 2.$$

Дана система не має розв'язків тоді, коли $\Delta = 0$ і при цьому $\Delta_x \neq 0$ або $\Delta_y \neq 0$.

Оскільки $\Delta = 0$ при $a = -4$ і при $a = -4$ маємо: $\Delta_x = 9 \neq 0$ і $\Delta_y = -6 \neq 0$, то при $a = -4$ дана система не має розв'язків.

Відповідь: $a = -4$.

Приклад 12. Знайти всі значення параметра a , при яких система рівнянь

$$\begin{cases} 4x - 3y - a = 0, \\ 5x - ay + 8 = 0 \end{cases}$$
 має єдиний розв'язок, який задовольняє одночасно умови $x < 0$ і $y < 0$.

Розв'язання

Знайдемо визначники даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -a \end{vmatrix} = -4a + 15; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} a & -3 \\ -8 & -a \end{vmatrix} = -a^2 - 24;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & a \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = -32 - 5a.$$

Тоді дана система має єдиний розв'язок $\left(\frac{a^2+24}{4a-15}; \frac{32+5a}{4a-15}\right)$ якщо $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{15}{4}$. За умовою цей розв'язок задовольняє одночасно умови $x < 0$ і $y < 0$, тобто маємо

$$\begin{cases} \frac{a^2+24}{4a-15} < 0 \\ \frac{32+5a}{4a-15} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-15 < 0, \\ 32+5a > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{15}{4}, \\ a > -\frac{32}{5}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 3\frac{3}{4}, \\ a > -6\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$a \in (-6,4; 3,75).$$

Відповідь: $a \in (-6,4; 3,75)$.

Приклад 13. При яких значеннях параметра p система рівнянь $\begin{cases} 3x + py = 3, \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$ має розв'язок, який задовольняє умови $x < 0$ і $y < 0$?

Розв'язання

Знайдемо визначник даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & p \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 2p; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & p \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -12 - p;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3.$$

Якщо $\Delta = 0 \Leftrightarrow -12 - 2p = 0 \Leftrightarrow p = -6$, то система несутісна, оскільки $\Delta_y = -3 \neq 0$.

Якщо $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow p \neq -6$, то система має єдиний розв'язок $\left(\frac{12+p}{12+2p}; \frac{3}{12+2p}\right)$. Оскільки за умовою $x < 0$ і $y < 0$, то маємо

$$\begin{cases} \frac{12+p}{12+2p} < 0 \\ \frac{3}{12+2p} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{12+p}{12+2p} < 0, \\ 12+2p > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12+p < 0, \\ 12+2p > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p < -12, \\ p > -6; \end{cases} \Leftrightarrow p \in \emptyset.$$

Відповідь: таких значень параметра p не існує.

Приклад 14. Знайти всі значення a і b , при яких рівносильні системи рівнянь $\begin{cases} 2x + ay = b, \\ x + y = 1 \end{cases}$ і $\begin{cases} 2x + 3y = a - 2, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$

Розв'язання

Розглянемо систему $\begin{cases} 2x + ay = b, \\ x + y = 1 \end{cases}$ (1*): визначники даної системи $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - a$; $\Delta_x = \begin{vmatrix} b & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = b - a$; $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - b$.

Розглянемо систему $\begin{cases} 2x + 3y = a - 2, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$ (2*) та знайдемо визначники цієї системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} a - 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a - 2) \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 2a - 7;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & a - 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - (a - 2) \cdot 1 = 2 - a + 2 = 4 - a.$$

Оскільки визначник системи (2*) $\Delta = 1 \neq 0$, то вона має єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$, де $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 2a - 7$ і $y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 4 - a$. Тоді, згідно з означення рівносильних систем, системи (1*) і (2*) рівносильні лише у тому випадку, коли система (1*) сумісна і визначена, тобто визначник системи (1*) $\Delta = 2 - a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2$. Якщо $a \neq 2$ система (1*) має єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$, де $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{b-a}{2-a}$ і $y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2-b}{2-a}$.

Отже, системи (1*) та (2*) рівносильні тоді, коли

$$\begin{cases} \frac{b-a}{2-a} = 2a-7, \\ \frac{2-b}{2-a} = 4-a, \\ a \neq 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-b}{2-a} = 4-a, \\ \frac{b-a}{2-a} = 2a-7, \\ a \neq 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-b-(4-a)(2-a)=0, \\ b-a-(2a-7)(2-a)=0, \\ a \neq 2; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -a^2 + 6a - 6, \\ a^2 - 6a + 8 = 0, \\ a \neq 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a^2 + 6a - 6, \\ a = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2, \\ a = 4. \end{cases}$$

Відповідь: $a = 4$ і $b = 2$.

Приклад 15. Числа a , b , c такі, що система рівнянь $\begin{cases} ax - by = 2a + b, \\ (c+1)x + cy = 10 - a + 3b \end{cases}$ має безліч розв'язків, причому $(1;3)$ – один із цих розв'язків. Знайти числа a , b , c .

Розв'язання

Знайдемо визначники даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ c+1 & c \end{vmatrix} = ac + b(c+1);$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2a+b & -b \\ 10-a+3b & c \end{vmatrix} = (2a+b)c + b(10-a+3b);$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 2a+b \\ c+1 & 10-a+3b \end{vmatrix} = a(10-a+3b) - (2a+b)(c+1).$$

Дана система має безліч розв'язків тоді, коли $\Delta_x = \Delta_y = \Delta = 0$, тобто $ac + b(c+1) = (2a+b)c + b(10-a+3b) = a(10-a+3b) - (2a+b)(c+1) = 0$ позначимо через (*).

Оскільки (1; 3) – розв'язок даної системи для шуканих чисел a, b, c , то для них маємо систему справедливих рівностей:

$$\begin{cases} a - 3b = 2a + b, \\ c + 1 + 3c = 10 - a + 3b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4b, \\ 4c = 9 - a + 3b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4b, \\ 4c = 9 + 7b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4b, \\ c = \frac{9+7b}{4}. \end{cases}$$

Тоді умова (*) буде рівносильна

$$\begin{aligned} (-4b) \cdot \frac{9+7b}{4} + b \left(\frac{9+7b}{4} + 1 \right) &= (-8b+b) \cdot \frac{9+7b}{4} + b(10+4b+3b) = \\ &= -4b(10+4b+3b) - (-8b+b) \left(\frac{9+7b}{4} + 1 \right) = 0 \\ \Leftrightarrow -9b - 7b^2 + b \cdot \frac{13+7b}{4} &= -7b \cdot \frac{9+7b}{4} + b(10+7b) = \\ &= -4b(10+7b) + 7b \cdot \frac{13+7b}{4} = 0 \Leftrightarrow -9b - 7b^2 + \frac{13}{4}b + \frac{7}{4}b^2 = \\ &= -\frac{63}{4}b - \frac{49}{4}b^2 + 10b + 7b^2 = -40b - 28b^2 + \frac{91}{4}b + \frac{49}{4}b^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -21b^2 - 23b &= -21b^2 - 23b = -63b^2 - 69b = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 21b^2 + 23b &= 63b^2 + 69b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b(21b+23) = 0, \\ 3b(21b+23) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow b(21b+23) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = -1\frac{2}{21}. \end{cases} \end{aligned}$$

Якщо $b = 0$, то відповідно $a = -4b = \frac{92}{21} = 4\frac{8}{21}$ і $c = \frac{9+7b}{4} = \frac{9-\frac{23}{3}}{4} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$.

Відповідь: $a = b = 0, c = 2\frac{1}{4}$ або $a = 4\frac{8}{21}, b = -1\frac{2}{21}, c = \frac{1}{3}$.

2.5. Геометрична інтерпретація розв'язку систем лінійних рівнянь з двома змінними

Кожне з рівнянь системи $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ якщо $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ і $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$

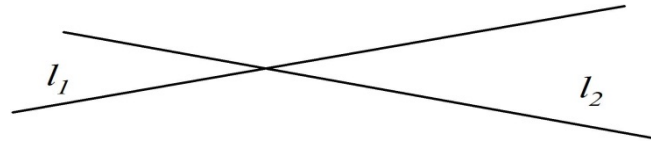
задає лінію відповідності між змінними x і y . Будь-яка лінійна відповідність між змінними x і y визначає в прямокутній системі координат xOy деяку пряму. Розв'язок цієї системи – це координати точки перетину прямих $l_1: a_1x + b_1y = c_1$ та $l_2: a_2x + b_2y = c_2$.

Нагадаємо, що рівняння прямої l_1 має вигляд:

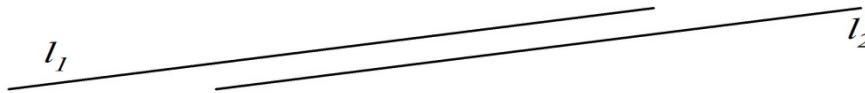
$y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1}$ якщо $b_1 \neq 0$ або $y = k_1x + d_1$ і рівняння прямої l_2 має вигляд $y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2}$ якщо $b_2 \neq 0$ або $y = k_2x + d_2$, де d_1, d_2 – вільні члени, $k_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ і $k_2 = -\frac{a_2}{b_2}$ – кутові коефіцієнти цих прямих.

Розглянемо випадки взаємного розташування прямих l_1 та l_2 .

I. Прямі перетинаються, і система має єдиний розв'язок, якщо кутові коефіцієнти прямих k_1 та k_2 різні, тобто $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$ або $\frac{a_1}{b_2} \neq \frac{a_2}{b_1}$.



II. Прямі паралельні і система неsumісна, якщо $\frac{a_1}{b_2} \neq \frac{a_2}{b_1} \neq \frac{c_1}{c_2}$.



III. Прямі збігаються і система має безліч розв'язків, якщо $\frac{a_1}{b_2} = \frac{a_2}{b_1} = \frac{c_1}{c_2}$.



При цьому розв'язки системи можна представити у вигляді $\left(t; \frac{c_1 - a_1 t}{b_1}\right)$, де $t \in R$ або $\left(\frac{c_1 - b_1 t}{a_1}; t\right)$, де $t \in R$.

Зауваження. Якщо йдеться не про прямі l_1 та l_2 , а про систему рівнянь $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ то інколи необхідно проводити дослідження і для випадків, коли одне з рівнянь перетворюється в тотожність або суперечливу рівність. Наприклад, система рівнянь $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ має безліч розв'язків також і у випадку, коли $a_2 = b_2 = c_2 = 0$ і $b_1 \neq 0$ та $a_1 = b_1 = c_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 0$.

Приклад 16. Знайти всі значення параметра a , при яких система $\begin{cases} 2x + (25x^2 - 2)y = 5a, \\ x + y = 1, \end{cases}$ не має розв'язків.

Розв'язання

Згідно з геометричною інтерпретацією розв'язку системи лінійних рівнянь, дана система не має розв'язків тоді, коли

$$\frac{2}{1} = \frac{25a^2 - 2}{1} \neq \frac{5a}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} 25a^2 - 2 = 2, \\ 5a \neq 2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25a^2 = 4, \\ a \neq \frac{2}{5}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm \frac{2}{5}, \\ a \neq \frac{2}{5}; \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{2}{5}.$$

Відповідь: $a = -\frac{2}{5}$.

Приклад 17. Знайти всі значення параметра a , при яких система

$$\begin{cases} 2x + (a - 1)y = 3, \\ 4x + \left(a + \frac{1}{2}\right)y = 2a + 1 \end{cases}$$

має безліч розв'язків.

Розв'язання

Згідно з геометричною інтерпретацією розв'язку системи лінійних рівнянь має виконуватися умова:

$$\frac{2}{4} = \frac{a-1}{a+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2a+1} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a-1}{a+\frac{1}{2}} = \frac{2}{4}, \\ \frac{3}{2a+1} = \frac{2}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 1 = 4a - 4, \\ 4a + 2 = 12, \\ a \neq -\frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 5, \\ a \neq -\frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2}, \\ a \neq -\frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}.$$

Якщо $\begin{cases} 2a + 1 = 0, \\ a + \frac{1}{2} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$, то початкова система набуває вигляду

$\begin{cases} x = 0, \\ y = -2, \end{cases}$ тобто має єдиний розв'язок, що не задовольняє умову задачі.

Відповідь: $a = \frac{5}{2}$.

Приклад 18. Знайти всі значення параметра a , при яких система

$$\begin{cases} 2x + (a - 1)y = 3, \\ 4x + \left(a + \frac{1}{2}\right)y = 2a + 1 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок.

Розв'язання

Згідно з геометричною інтерпретацією розв'язку системи лінійних рівнянь, має виконуватися умова:

$$\frac{2}{4} = \frac{a-1}{a+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 1 = 4a - 4, \\ a \neq -\frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq \frac{5}{2}, \\ a \neq -\frac{1}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; \infty\right).$$

Якщо $a + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$, то початкова система набуває вигляду

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = -2, \end{cases}$$

тобто теж має єдиний розв'язок.

Відповідь: $a \neq \frac{5}{2}$.

Приклад 19. При яких значеннях a система $\begin{cases} 3x - (a + 1)y = 4, \\ 6x - (3a - 7)y = a - 1 \end{cases}$ має безліч розв'язків. Знайдіть ці розв'язки.

Розв'язання

Згідно з геометричною інтерпретацією розв'язку системи лінійних рівнянь, дана система має безліч розв'язків тоді, коли виконується умова

$$\frac{3}{6} = \frac{-(a+1)}{-(3a-7)} = \frac{4}{a-1} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+1}{3a-7} = \frac{3}{6}, \\ \frac{4}{a-1} = \frac{3}{6}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 6 = 9a - 21, \\ 3a - 3 = 24, \\ a \neq \frac{7}{3}, \\ a \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 27, \\ a \neq \frac{7}{3}, \\ a \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9, \\ a \neq \frac{7}{3}, \\ a \neq 1; \end{cases} \Leftrightarrow a = 9.$$

Якщо $a = 1$ або $a = \frac{7}{3}$, то система не може мати безліч розв'язків. Якщо $a = 9$, то дана система набуває вигляду:

$$\begin{cases} 3x - 10y = 4, \\ 6x - 20y = 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 10y = 4, \\ 3x - 10y = 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = \frac{3t-4}{10}, \end{cases} \text{ де } t \in R.$$

Відповідь: якщо $a = 9$, то система має безліч розв'язків $\left(t; \frac{3t-4}{10}\right)$, де $t \in R$.

Приклад 20. При яких значеннях a прямі $2x + ay = 1$ та $3x + y = 2$ паралельні?

Розв'язання

Згідно з геометричною інтерпретацією розв'язку системи лінійних рівнянь, дані прямі паралельні тоді, коли $\frac{2}{3} = \frac{a}{1} \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}$.

Відповідь: $a = \frac{2}{3}$.

Приклад 21. При яких значеннях параметра a прямі $y = -4x + a$ і $y = 2x - 3$ перетинаються на осі ординат?

Розв'язання

Згідно з умовою задачі, необхідно знайти значення параметра a , при яких система рівнянь $\begin{cases} y = -4x + a, \\ y = 2x - 3 \end{cases}$ має розв'язок, абсциса якого дорівнює нулю. Тобто отримаємо

$$\begin{cases} y = -4x + a, \\ y = 2x - 3, \\ x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = a, \\ y = -3, \\ x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3, \\ x = 0, \\ y = -3. \end{cases}$$

Отже, $a = -3$.

Відповідь: $a = -3$.

Приклад 22. При яких значеннях a і b прямі $3x - y + b = 0$ і $ax - 2y - 10 = 0$ перетинаються в точці $(2; -1)$

Розв'язання

Дані прямі перетинаються тоді, коли $\frac{a}{3} \neq \frac{2}{1} \Leftrightarrow a \neq 6$. Згідно з умовою задачі, необхідно знайти значення параметрів a і b , при яких система рівнянь $\begin{cases} 3x - y + b = 0 \\ ax - 2y - 10 = 0 \end{cases}$, має розв'язок $(2; -1)$, і при цьому $a \neq 6$. Отже, підставивши в систему $x = 2$ і $y = -1$ та врахувавши $a \neq 6$, одержимо:

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 + 1 + b = 0, \\ a \cdot 2 + 2 - 10 = 0, \\ a \neq 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -7, \\ a = 4, \\ a \neq 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -7, \\ a = 4. \end{cases}$$

Відповідь: $a = 4$ і $b = -7$.

Приклад 23. Визначити, при яких значеннях a і b система рівнянь $\begin{cases} 5x - (a+1)y = 3b \\ x - 2y = 3 \end{cases}$, має безліч розв'язків.

Розв'язання

Згідно з геометричною інтерпретацією розв'язку системи лінійних рівнянь, дана система має безліч розв'язків тоді, коли

$$\frac{5}{1} = \frac{-(a+1)}{-2} = \frac{3b}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1 = 10, \\ b = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9, \\ b = 5. \end{cases}$$

Відповідь: $a = 9$ і $b = 5$.

Приклад 24. Знайти всі значення параметра a , при яких точка $M(x_0; y_0)$ перетину прямих $5x + 4y = 6$ і $ax + 6y = 10$ задовольняє умови $x_0 > 0$ та $y_0 < 1$.

Розв'язання

$$\text{Розглянемо систему рівнянь } \begin{cases} 5x + 4y = 6, \\ ax + 6y = 10. \end{cases}$$

Згідно з геометричною інтерпретацією розв'язку системи лінійних рівнянь, дані прямі перетинаються тоді, коли $\frac{a}{5} \neq \frac{6}{4} \Leftrightarrow a \neq \frac{15}{2}$. Знайдемо визначники даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ a & 6 \end{vmatrix} = 30 - 4a; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 40 = -4;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ a & 10 \end{vmatrix} = 50 - 6a.$$

Якщо $a \neq \frac{15}{2}$, то дана система має єдиний розв'язок $(x_0; y_0)$, де $x_0 = \frac{-4}{30-4a} = \frac{2}{2a-15}$ і $y_0 = \frac{50-6a}{30-4a} = \frac{3a-25}{2a-15}$, який і є точкою перетину прямих $5x + 4y = 6$ і $ax + 6y = 10$. Оскільки за умовою $x_0 > 0$ та $y_0 < 1$, то отримаємо

$$\begin{cases} \frac{2}{2a-15} > 0, \\ \frac{3a-25}{2a-15} < 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-15 > 0, \\ \frac{3a-25-2a+15}{2a-15} < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{15}{2}, \\ a-10 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 7,5, \\ a < 10; \end{cases} \Leftrightarrow a \in (7,5; 10).$$

Відповідь: $a \in (7,5; 10)$.

Приклад 25. Числа a, b, c такі, що система рівнянь

$$\begin{cases} ax - by = 2a + b, \\ (c + 1)x + cy = 10 - a + 3b, \end{cases}$$
 має безліч розв'язків,
 причому $(1; 3)$ – один із цих розв'язків. Знайти числа a, b, c .

Розв'язання

Згідно з геометричною інтерпретацією розв'язку системи лінійних рівнянь, дана система має безліч розв'язків тоді, коли $\frac{a}{c+1} = \frac{-b}{c} = \frac{2a+b}{10-a+3b}$. Оскільки $(1; 3)$ – розв'язок даної системи для шуканих чисел a, b, c , то для них маємо систему справедливих рівностей

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a = -4b, \\ 4c = 9 - a + 3b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4b, \\ 4c = 9 + 7b; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4b, \\ c = \frac{9+7b}{4}. \end{cases} \\ & \text{Тоді } \frac{a}{c+1} = \frac{-b}{c} = \frac{2a+b}{10-a+3b} \Leftrightarrow \frac{-4b}{\frac{9+7b}{4}+1} = \frac{-b}{\frac{9+7b}{4}} = \frac{-8b+b}{10+4b+3b} \Leftrightarrow \frac{-16b}{13+7b} = \frac{-4b}{9+7b} = \\ & = \frac{-7b}{10+7b} \Leftrightarrow \frac{16b}{13+7b} = \frac{4b}{9+7b} = \frac{7b}{10+7b} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16b}{13+7b} = \frac{4b}{9+7b}, \\ \frac{4b}{9+7b} = \frac{7b}{10+7b}; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 16b(9+7b) = 4b(13+7b), \\ 4b(10+7b) = 7b(9+7b), \\ b \neq -\frac{13}{7}, \\ b \neq -\frac{9}{7}, \\ b \neq -\frac{10}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b(9+7b) = b(13+7b), \\ 4b(10+7b) = 7b(9+7b), \\ b \neq -1\frac{6}{7}, \\ b \neq -1\frac{2}{7}, \\ b \neq -1\frac{3}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 36b + 28b^2 - 13b - 7b^2 = 0, \\ 40b + 28b^2 - 63b - 49b^2 = 0, \\ b \neq -1\frac{6}{7}, \\ b \neq -1\frac{2}{7}, \\ b \neq -1\frac{3}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 21b^2 + 23b = 0, \\ 21b^2 + 23b = 0, \\ b \neq -1\frac{6}{7}, \\ b \neq -1\frac{2}{7}, \\ b \neq -1\frac{3}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} b(21b + 23) = 0, \\ b \neq -1\frac{6}{7}, \\ b \neq -1\frac{2}{7}, \\ b \neq -1\frac{3}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0, \\ b \neq -1\frac{2}{21}, \\ b \neq -1\frac{6}{7}, \\ b \neq -1\frac{2}{7}, \\ b \neq -1\frac{3}{7}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0, \\ b \neq -1\frac{2}{21}. \end{cases} \end{aligned}$$

Якщо $b = 0$, то відповідно $a = -4b = 0$ і $c = \frac{9+7b}{4} = 2\frac{1}{4}$. Якщо $b = -1\frac{2}{21}$, то відповідно $a = -4b = \frac{92}{21} = 4\frac{8}{21}$ і $c = \frac{9+7b}{4} = \frac{1}{3}$.

Зауважимо, що випадок $c + 1 = c = 10 - a + 3b = 0$ немає потреби розглядати, оскільки $c \neq c + 1$ при жодному $c \in R$.

Відповідь: $a = b = 0$, $c = 2\frac{1}{4}$ або $a = 4\frac{8}{21}$, $b = -1\frac{2}{21}$, $c = \frac{1}{3}$.

2.6. Системи лінійних рівнянь, що містять знак модуля

Якщо хоча б одне з лінійних рівнянь системи містить модуль, то його зручно розкрити або за означенням, або скориставшись методом інтервалів.

Приклад 26. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x - 2|y| = -3, \\ |x| + y = 3. \end{cases}$$

Розв'язання

Оскільки за означенням модуля $|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0, \end{cases}$ та

$|y| = \begin{cases} y, & \text{якщо } y \geq 0, \\ -y, & \text{якщо } y < 0, \end{cases}$ то розглянемо такі випадки:

1) якщо $x = 0$, то система набуває вигляду

$$\begin{cases} -2|y| = -3, \\ y = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y| = \frac{3}{2}, \\ y = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm\frac{3}{2}, \\ y = 3, \end{cases} \text{ тобто система не сумісна;}$$

2) якщо $y = 0$, то система набуває вигляду

$$\begin{cases} x = \pm\frac{3}{2}, \\ x = 3, \end{cases} \Leftrightarrow x = -3, \text{ тобто упорядкована пара } (-3; 0) \text{ є розв'язком даної системи;}$$

3) якщо $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \end{cases}$ то система набуває вигляду

$$\begin{cases} x - 2y = -3, \\ x + y = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 2y, \\ -3y = -6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases} \text{ тобто упорядкована пара } (1; 2) \text{ є розв'язком даної системи, оскільки } x = 1 > 0 \text{ і } y = 2 > 0;$$

4) якщо $\begin{cases} x < 0, \\ y > 0, \end{cases}$ то система набуває вигляду

$$\begin{cases} x - 2y = -3, \\ -x + y = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 2y, \\ -y = 0, \end{cases} \begin{cases} x = -3, \\ y = 0, \end{cases} \text{ що не задовольняє даний випадок;}$$

5) якщо $\begin{cases} x < 0, \\ y < 0, \end{cases}$ то система набуває вигляду

$$\begin{cases} x - 2y = -3, \\ -x + y = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 2y, \\ 3y = 0, \end{cases} \begin{cases} x = -3, \\ y = 0, \end{cases} \text{ що не задовольняє даний випадок;}$$

6) якщо $\begin{cases} x > 0, \\ y < 0, \end{cases}$ то система набуває вигляду

$$\begin{cases} x + 2y = -3, \\ x + y = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 2y, \\ y = -6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 12, \\ y = -6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9, \\ y = -6, \end{cases}$$

тобто упорядкована пара $(9; -6)$ є розв'язком даної системи, оскільки $x = 9 > 0$ і $y = -6 < 0$.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(-3; 0), (1; 2), (9; -6)\}$.

Приклад 27. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} |x| + 2y = 5, \\ 2x + |y - 1| = 0. \end{cases}$

Розв'язання

Оскільки за означенням модуля $|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0, \end{cases}$ то розглянемо такі випадки:

1) якщо $x \geq 0$, то система набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x \geq 0, \\ x + 2y = 5, \\ 2x + |y - 1| = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x = 5 - 2y, \\ 10 - 4y + |y - 1| = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ x = 5 - 2y, \\ 10 - 4y + |y - 1| = 0, \\ y \geq 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x = 5 - 2y, \\ 10 - 4y + |y - 1| = 0, \\ y < 1; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ x = 5 - 2y, \\ y = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x = 5 - 2y, \\ y = \frac{11}{5}, \\ y < 1; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 0, \\ x = -1, \\ y = 3; \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0, \\ x = \frac{3}{5}, \\ y = \frac{11}{5}, \\ y < 1; \end{cases} \end{cases} \quad \text{тобто маємо} \end{aligned}$$

сукупність несумісних систем, оскільки $\begin{cases} x \geq 0, \\ x = -1, \end{cases}$ несумісна система і $\begin{cases} y = \frac{11}{5}, \\ y < 1 \end{cases}$, теж несумісна система;

2) якщо $x < 0$, то дана система набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x < 0, \\ x + 2y = 5, \\ 2x + |y - 1| = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x = 2y - 5, \\ 4y - 10 + |y - 1| = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \begin{cases} x < 0, \\ x = 2y - 5, \\ 4y - 10 + y - 1 = 0, \\ y \geq 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x = 2y - 5, \\ 4y - 10 + 1 - y = 0, \\ y < 1; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < 0, \\ x = 2y - 5, \\ 5y = 11, \\ y \geq 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x = 2y - 5, \\ y = 3, \\ y < 1; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x < 0, \\ x = -\frac{3}{5}, \\ y = \frac{11}{5}, \\ y \geq 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x = 2y - 5, \\ y = 3, \\ y < 1; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$\begin{cases} x = -0,6, \\ y = 2,2, \end{cases}$ оскільки система $\begin{cases} y = 3, \\ y < 1, \end{cases}$ несумісна.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(-0,6; 2,2)\}$.

Приклад 28. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} |x| + y = a, \\ x + 2|y| = -1. \end{cases}$

Розв'язання

Оскільки за означенням модуля $|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0 \end{cases}$ та

$|y| = \begin{cases} y, & \text{якщо } y \geq 0, \\ -y, & \text{якщо } y < 0, \end{cases}$ то розглянемо такі випадки:

1) якщо $x = 0$, то система набуває вигляду $\begin{cases} y = a, \\ 2|y| = -1, \end{cases}$ тобто система несутісна;

2) якщо $y = 0$, то система набуває вигляду $\begin{cases} |x| = a, \\ x = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ a = 1, \end{cases}$ тобто початкова система має розв'язок $(-1; 0)$ якщо $a = 1$;

3) якщо $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \end{cases}$ то система набуває вигляду $\begin{cases} x + y = a, \\ x + 2y = -1, \end{cases}$ для якої

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2a + 1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - a$$

і, згідно формул Крамера, отримаємо розв'язок

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 2a + 1, y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -1 - a,$$

який буде розв'язком початкової системи при тих a , при яких цей розв'язок не є розв'язком початкової системи при жодному дійсному значенні a ;

4) якщо $\begin{cases} x < 0, \\ y > 0, \end{cases}$ то система набуває вигляду $\begin{cases} -x + y = a, \\ x + 2y = -1, \end{cases}$ для якої

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0, \Delta_x = \begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2a + 1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -1 & a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - a$$

і, згідно формул Крамера, отримаємо розв'язок $x = \frac{2a+1}{-3}, y = \frac{a-1}{3}$, який буде розв'язком початкової системи при a , якщо

$$\begin{cases} \frac{2a+1}{-3} < 0, \\ \frac{a-1}{3} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+1 > 0, \\ a-1 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -\frac{1}{2}, \\ a > 1; \end{cases} \Leftrightarrow a > 1,$$

тобто цей розв'язок $\left(\frac{2a+1}{-3}; \frac{a-1}{3}\right)$ є розв'язком початкової системи якщо $a > 1$;

5) якщо $\begin{cases} x < 0, \\ y < 0, \end{cases}$ то система набуває вигляду $\begin{cases} -x + y = a, \\ x - 2y = -1, \end{cases}$ для якої

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2a + 1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -1 & a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - a$$

і, згідно формул Крамера, отримаємо розв'язок

$$x = 1 - 2a, \quad y = 1 - a,$$

який буде розв'язком початкової системи при a , якщо

$$\begin{cases} 1 - 2a < 0, \\ 1 - a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{1}{2}, \\ a > 1; \end{cases} \Leftrightarrow a > 1,$$

тобто цей розв'язок $(1 - 2a; 1 - a)$ є розв'язком початкової системи якщо $a > 1$;

6) якщо $\begin{cases} x > 0, \\ y < 0, \end{cases}$ то система набуває вигляду $\begin{cases} x + y = a, \\ x - 2y = -1, \end{cases}$ для якої

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2a + 1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - a$$

і, згідно формул Крамера, отримаємо розв'язок $x = \frac{2a-1}{3}, y = \frac{1+a}{3}$, який буде розв'язком початкової системи при тих a , якщо

$$\begin{cases} 2a - 1 > 0, \\ 1 + a < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > \frac{1}{2}, \\ a < -1; \end{cases} \Leftrightarrow a \in \emptyset,$$

тобто розв'язок $\left(\frac{2a-1}{3}; \frac{1+a}{3}\right)$ утвореної системи не є розв'язком початкової системи при жодному дійсному значенні a .

Відповідь: якщо $a < 1$, то система несумісна; якщо $a = 1$, то система має єдиний розв'язок $(-1; 0)$; якщо $a > 1$, то система має розв'язки $\left(\frac{2a+1}{-3}; \frac{a-1}{3}\right)$ та $(1 - 2a; 1 - a)$.

У системах виду $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ |a_2x + n_1| + |b_2y + n_2| = c_2 \end{cases}$ доцільно застосовувати

метод підстановки, тобто з першого рівняння виразити, наприклад, x через y (якщо $a_1 \neq 0$) і підставити його в друге рівняння системи, яке перетвориться в лінійне рівняння з однією змінною і модулями та легко розв'язується за допомогою методів інтервалів при розкриванні модулів.

Приклад 29. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 2|x - 1| + 3|y + 2| = 17. \end{cases}$

Розв'язання

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 2|x - 1| + 3|y + 2| = 17; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x, \\ 2|x - 1| + 3|7 - 2x + 2| = 17; \end{cases} \Leftrightarrow$$

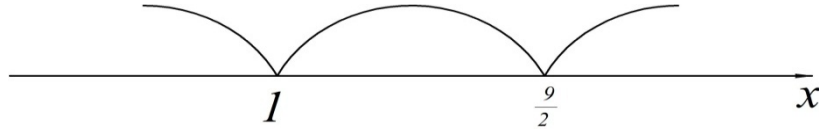
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x, \\ 2|x - 1| + 3|9 - 2x| = 17. \end{cases}$$

Розглянемо друге рівняння останньої системи:

$2|x - 1| + 3|9 - 2x| = 17$ (*). Застосуємо метод інтервалів при розкриванні модулів. Знайдемо характерні точки підмодулевих виразів:

$$\begin{cases} x - 1 = 0, \\ 9 - 2x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

Знайденими характерними значеннями змінної x розбиваємо числову вісь на проміжки знакостатості.



Розглянемо рівняння (*) на кожному з утворених проміжків:

1) $x \leq 1$: $|x - 1| = 1 - x$, $|9 - 2x| = 9 - 2x$ і рівняння (*) набуває вигляду $2(1 - x) + 3(9 - 2x) = 17$, тобто маємо систему

$$\begin{cases} x \leq 1, \\ 2(1 - x) + 3(9 - 2x) = 17; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ 2 - 2x + 27 - 6x - 17 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ 8x = 12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ x = \frac{3}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset;$$

2) $1 < x < \frac{9}{2}$: $|x - 1| = x - 1$, $|9 - 2x| = 9 - 2x$ і рівняння (*) набуває вигляду $2(1 - x) + 3(9 - 2x) = 17$, тобто маємо систему

$$\begin{cases} 1 < x < \frac{9}{2}, \\ 2(1 - x) + 3(9 - 2x) = 17; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < \frac{9}{2}, \\ 2x - 2 + 27 - 6x - 17 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < \frac{9}{2}, \\ 4x = 8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < \frac{9}{2}, \\ x = 2; \end{cases} \Leftrightarrow x = 2;$$

3) $x \geq \frac{9}{2}$: $|x - 1| = x - 1$, $|9 - 2x| = 2x - 9$ і рівняння (*) набуває вигляду $2(1 - x) + 3(2x - 9) = 17$, тобто маємо систему

$$\begin{cases} x \geq \frac{9}{2}, \\ 2(1 - x) + 3(2x - 9) = 17; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{9}{2}, \\ 2x - 2 - 27 + 6x = 17; \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{9}{2}, \\ 8x = 46; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{9}{2}, \\ x = \frac{23}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{23}{4}.$$

Оскільки $2|x - 1| + 3|9 - 2x| = 17 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = \frac{23}{4}, \end{cases}$ то система

$$\begin{cases} y = 7 - 2x, \\ 2|x - 1| + 3|9 - 2x| = 17; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 7 - 2x, \\ \begin{cases} x = 2, \\ x = \frac{23}{4}; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 3, \\ x = \frac{23}{4}, \\ y = -\frac{9}{2}. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(2; 3), (\frac{23}{4}; -\frac{9}{2})\}$.

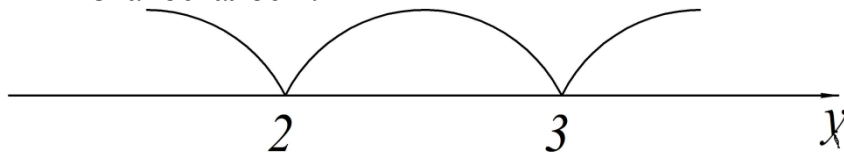
Приклад 30. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 1, \\ |x + 1| + |y - 3| = 1. \end{cases}$

Розв'язання

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ |x + 1| + |y - 3| = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y, \\ |1 - y + 1| + |y - 3| = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y, \\ |2 - y| + |y - 3| = 1. \end{cases}$$

Розглянемо друге рівняння останньої системи: $|2 - y| + |y - 3| = 1$ (*). Застосуємо метод інтервалів при розкриванні модулів. Знайдемо характерні точки підмодулевих виразів: $\begin{cases} 2 - y = 0, \\ y - 3 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 3. \end{cases}$

Знайденими характерними значеннями змінної x розбиваємо числову вісь на проміжки знакосталості.



Розглянемо рівняння (*) на кожному з утворених проміжків:

1) $y < 2$: $|2 - y| = 2 - y$, $|y - 3| = 3 - y$ і рівняння (*) набуває вигляду

$2 - y + 3 - y = 1$, тобто отримаємо систему

$$\begin{cases} y < 2, \\ 2 - y + 3 - y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 2, \\ -2y = -4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < 2, \\ y = 2; \end{cases} \Leftrightarrow y \in \emptyset;$$

2) $2 \leq y \leq 3$: $|2 - y| = y - 2$, $|y - 3| = 3 - y$ і рівняння (*) набуває вигляду $y - 2 + 3 - y = 1$, тобто маємо систему

$$\begin{cases} 2 \leq y \leq 3, \\ y - 2 + 3 - y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq y \leq 3, \\ 1 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq y \leq 3, \\ y \in R; \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \leq y \leq 3;$$

3) $y > 3$: $|2 - y| = y - 2$, $|y - 3| = y - 3$ і рівняння (*) набуває вигляду $y - 2 + y - 3 = 1$, тобто маємо систему

$$\begin{cases} y > 3, \\ y - 2 + y - 3 = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 3, \\ 2y = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 3, \\ y = 3; \end{cases} \Leftrightarrow y \in \emptyset.$$

Оскільки $|x + 1| + |y - 3| = 1 \Leftrightarrow y \in [2; 3]$, то система

$$\begin{cases} x = 1 - y, \\ |x + 1| + |y - 3| = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y, \\ y \in [2; 3]; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = t, \text{ де } t \in [2; 3] \end{cases}$$

Відповідь: система має безліч розв'язків виду $(1 - t; t)$, де $t \in [2; 3]$.

2.7. Вправи для практичного і самостійного розв'язування

1. Розв'язати системи рівнянь:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \begin{cases} 2x + 3y = 11, \\ 3x + 2y = 9; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 3x - 4y = 1, \\ 3x + 4y = 18; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} 4x - y = 3, \\ 5x + 2y = 4; \end{cases} \\ \text{г)} \begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ x - 2y = 4; \end{cases} & \text{д)} \begin{cases} x + y = 1, \\ 3x + 3y = 6; \end{cases} & \text{е)} \begin{cases} x - y = 5, \\ 3x - 3y = 2; \end{cases} \\ \text{є)} \begin{cases} 3x - 2y = 7, \\ 2x + 5y = 3; \end{cases} & \text{ж)} \begin{cases} 2x + 5y = 2, \\ 6x + 15y = 5. \end{cases} & \end{array}$$

Відповідь: а) $\{(1; 3)\}$; б) $\left\{\left(\frac{19}{3}; \frac{17}{8}\right)\right\}$; в) $\left\{\left(\frac{10}{13}; \frac{1}{13}\right)\right\}$;

г) $\left\{\left(2\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)\right\}$; д) система несумісна; е) система несумісна;

є) $\left\{\left(2\frac{3}{19}; -\frac{5}{19}\right)\right\}$; ж) система несумісна.

2. Розв'язати системи рівнянь:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \begin{cases} x - 2y = 3, \\ 2x - 4y = 6; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 3x - y = 1, \\ 12x - 4y = 4; \end{cases} \\ \text{в)} \begin{cases} x + 2y = 3, \\ 4x + 8y = 12; \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} 2x - 14y = 8, \\ 3x - 21y = 12. \end{cases} \end{array}$$

Відповідь: системи мають безліч розв'язків виду:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} \left(t; \frac{1}{2}(t - 3)\right), \text{ де } t \in R; & \text{б)} (t; 3t - 1), \text{ де } t \in R; \\ \text{в)} (3 - 2t; t), \text{ де } t \in R; & \text{г)} (4 + 7t; t), \text{ де } t \in R. \end{array}$$

3. При кожному дійсному значенні параметра m розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} mx + y = 2, \\ x + y = 2m. \end{cases}$$

Відповідь: якщо $m \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$, то система має єдиний розв'язок $(-2; 2m+2)$; якщо $m = 1$, то система має безліч розв'язків виду $(t; 2-t)$, де $t \in R$.

4. Дослідити і розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x - ay = 4, \\ x + 2y = a. \end{cases}$

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; -4) \cup (-4; \infty)$, то система має єдиний розв'язок $\left(\frac{a^2+8}{a+4}; \frac{2(a-2)}{a+4}\right)$; якщо $a = -4$, то система несумісна.

5. Дослідити і розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} (a-1)^2x + (a^2-1)y = (a+1)^2, \\ (2a-1)x + (a+1)y = a^2-1. \end{cases}$$

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$, то система має єдиний розв'язок $\left(\frac{a^2-2a-3}{a-1}; -\frac{a^2-5a+2}{a-1}\right)$; якщо $a = -1$, то система має безліч розв'язків виду $(0; t)$, де $t \in R$; якщо $a = 0$, то система

має безліч розв'язків виду $(t; t-1)$, де $t \in R$; якщо $a = 1$, то система несумісна.

6. Визначити кількість розв'язків системи $\begin{cases} (a+3)x + 4y = 5 - 3a, \\ 2x + (5+a)y = 8 \end{cases}$ залежно від значення параметра a .

Відповідь: якщо $a \neq 7$ і $a \neq -1$, то система має єдиний розв'язок; якщо $a = -7$, то система не має розв'язків; якщо $a = -1$ система має безліч розв'язків.

7. Визначити, при яких значеннях p система рівнянь $\begin{cases} 2px + 2y = 2p, \\ 2px + px = 4 \end{cases}$ має:
а) єдиний розв'язок; б) безліч розв'язків; в) не має розв'язків.

Відповідь: а) якщо $p \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; \infty)$; б) якщо $p = 2$; в) якщо $p = 0$.

8. Знайти всі значення параметра a , при яких система рівнянь $\begin{cases} 3x + (a-1)y = 12, \\ (a-1)x + 12y = 24 \end{cases}$ має єдиний розв'язок і знайти цей розв'язок.

Відповідь: $\left(\frac{24}{a+5}; \frac{12}{a+5}\right)$, якщо $a \in (-\infty; -5) \cup (-5; 7) \cup (7; \infty)$.

9. Показати, що система рівнянь $\begin{cases} ax + (a-1)y = 2a, \\ 3(a+2)x + (4a+1)y = a+5 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

10. Визначити, при яких значеннях параметра b системи рівнянь мають єдиний розв'язок: а) $\begin{cases} (b-1)x + 3y = b, \\ x + (b+1)y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (b-1)x + 2by = -2, \\ 2bx + (b-1)y = b-1; \end{cases}$
в) $\begin{cases} (2b-3)x - by = 3b-2, \\ 5x - (2b+3)y = 5. \end{cases}$

Відповідь: а) $b \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$; б) $b \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$; в) $b \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{9}{4}\right) \cup \left(\frac{9}{4}; \infty\right)$.

11. Визначити, при яких значеннях параметра m , система рівнянь несумісна:

- а) $\begin{cases} mx + y = m, \\ 2mx + my = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (m-2)x + 6y = 15, \\ 3x + (2m-4)y = 15; \end{cases}$
в) $\begin{cases} (3m-1)x - my = 1, \\ 3x + 2my = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x + my = 5, \\ 4x + 3y = 12; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x + (9m^2-2)y = 3m, \\ x + y = 1. \end{cases}$

Відповідь: а) $m = 0$; б) $m = -1$; в) $m = -\frac{1}{6}$; г) $m = \frac{3}{2}$; д) $m = -\frac{2}{5}$.

12. Визначити, при яких значеннях параметра b системи рівнянь мають

- безліч розв'язків: а) $\begin{cases} 2x + (p+5)y = 8, \\ (p+3)x + 4y = 5 - 3p; \end{cases}$
б) $\begin{cases} (p+1)x + 8y = 4p, \\ px + (p+3)y = 3p-1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} px + y = p, \\ 2px + py = 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} px + y = p^2, \\ x + py = 1; \end{cases}$

$$\text{д) } \begin{cases} (p+4)x + 3y = p+1, \\ px + (p-1)y = p-1. \end{cases}$$

Відповідь: а) $p = -1$; б) $p = 1$; в) $p = 2$; г) $p = 1$; д) $p = 2$.

13. При яких значеннях параметра a прямі $2x + y = 1$ та $3ax - 2y = 4$ перетинаються?

Відповідь: $a \neq -\frac{4}{3}$.

14. При яких значеннях параметра b прямі $y = 3x + 1$ та $y = 2bx - 3$ паралельні?

Відповідь: $b = \frac{3}{2}$.

15. При яких значеннях k прямі $2x + y = 9$ і $kx + 5y = 18$ перетинаються в точці, яка лежить на бісектрисі першого координатного кута?

Відповідь: $k = 1$.

16. При яких значеннях a система рівнянь $\begin{cases} 3x - y = 1 - a, \\ x + y = 2a + 1 \end{cases}$ має розв'язок, який задовольняє умови $x < 0$ і $y < 0$?

Відповідь: $a \in (-12; -6)$.

17. При яких значеннях a система рівнянь $\begin{cases} 3x - y = 1 - a, \\ x + y = 2a + 1 \end{cases}$ має розв'язок, який задовольняє умови $x \geq 1$ і $y \leq 4$?

Відповідь: $a = 2$.

18. Визначити, при яких значеннях параметра a всі розв'язки системи $\begin{cases} (a-1)x + y = 2, \\ x + y = a, \end{cases}$ задовольняють умови $x < 0$ і $y \geq 0$?

Відповідь: $a \in [-1; 2) \cup (2; \infty)$.

19. Знайти всі значення параметра a , при яких точка $M(x_0; y_0)$ перетину прямих $3x + y = -2$ і $x - (1-a)y = 3$ задовольняє умови $x_0 \leq 2$ і $y_0 > 0$?

Відповідь: $a \in \left(\frac{4}{3}; \infty\right)$.

20. При яких значеннях n існують розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} x + ny = 3, \\ nx + 4y = 6, \end{cases}$ які задовольняють одночасно нерівності $x > 0$ і $y > 0$?

Відповідь: $n \in (-2; 4)$.

21. Визначити, при яких значеннях a і b система рівнянь $\begin{cases} 5x - (a+1)y = 3b, \\ x - 2y = 3, \end{cases}$ не має розв'язків?

Відповідь: $a = 9$ і $b \neq 5$.

22. При яких значеннях a і b система рівнянь
$$\begin{cases} ax + (b - 1)y = 2, \\ 3x + 10y = -1 \end{cases}$$
 невизначена?

Відповідь: $a = -6$ і $b = -19$.

23. Визначити, при яких значеннях α і β система рівнянь
$$\begin{cases} (\alpha + 1)^2 x - (\beta + 1)y = -\alpha, \\ (\beta - 1)x + (5 - 2\beta)y = \alpha + 4 \end{cases}$$
 має єдиний розв'язок $(1; 1)$.

Відповідь: $\alpha = \beta = 0$ або $\alpha = -4$, $\beta = 4$.

24. При яких значеннях a і b прямі $3x - y + b = 0$ і $ax - 2y - 10 = 0$ паралельні між собою?

Відповідь: $a = 6$ і $b \neq -5$.

25. Визначити, при яких $b \in R$ система рівнянь
$$\begin{cases} 3x + y = a, \\ ax - y = b \end{cases}$$
 має хоча б один розв'язок при довільних $a \in R$.

Відповідь: $b = 3$.

26. Дослідити і розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} ax + y = b, \\ x + ay = b. \end{cases}$$

Відповідь: якщо $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$ і довільного b система має єдиний розв'язок $(\frac{b}{a+1}; \frac{b}{a+1})$; якщо $a = -1$ і $b = 0$, то система має безліч розв'язків виду $(t; t)$, де $t \in R$; якщо $a = -1$ і $b \neq 0$, то система несумісна; якщо $a = 1$ і довільному b система має безліч розв'язків виду $(t; b-t)$, де $t \in R$.

27. Знайти всі значення параметра a і b , при яких рівносильні системи рівнянь
$$\begin{cases} ax + 2y = b + 1, \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 2x + y = a^2 + 2, \\ x + 3y = 3. \end{cases}$$

Відповідь: $a = -2$ і $b = -7$.

28. Числа a, b, c такі, що система рівнянь
$$\begin{cases} ax - by = 2a - b, \\ (c + 1)x + cy = 2b - a \end{cases}$$
 має безліч розв'язків, причому $(1; 3)$ – один із цих розв'язків. Знайти числа a, b, c .

Відповідь: $a = b = 0$, $c = 2\frac{1}{4}$ або $a = 2, b = -1, c = 1$.

29. При яких значеннях a, b, c система рівнянь
$$\begin{cases} ax + 2by = a - b, \\ (c - 1)x + cy = 2b - a \end{cases}$$
 має безліч розв'язків, якщо $(1; 2)$ – один із цих розв'язків.

Відповідь: $a = b = 0$, $c = \frac{1}{3}$ або $a = 1, b = c = 0$.

ТЕМА 3. ТОЧНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ТРЬОМА НЕВІДОМИМИ

$$\text{Розглянемо систему } \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \quad (12)$$

де x, y, z – невідомі, a_{ij} – числові коефіцієнти, b_1, b_2, b_3 – вільні члени, $i = 1, 2, 3$ та $j = 1, 2, 3$. Розв'язком такої системи називається упорядкована трійка $(x_0; y_0; z_0)$, при підстановці якої в систему кожне її рівняння перетворюється в тотожність.

Якщо всі $a_{ij} = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ якщо $i = 1, 2, 3$ та $j = 1, 2, 3$, то будь-яка трійка чисел буде розв'язком даної системи.

Якщо виконується хоча б одна з умов $a_{ij} = 0$ і $b_1 \neq 0$ при $i = 1, j = 1, 2, 3$ або $a_{ij} = 0$ і $b_2 \neq 0$ при $i = 2, j = 1, 2, 3$, або $a_{ij} = 0$ і $b_3 \neq 0$ при $i = 3, j = 1, 2, 3$ то система несумісна.

Якщо $a_{ij} = b_1 = b_2 = 0$ і $a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \neq 0$ при $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$ або $a_{ij} = b_1 = b_3 = 0$ і $a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 \neq 0$ при $i = 1, 3, j = 1, 2, 3$ або $a_{ij} = b_2 = b_3 = 0$ і $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 \neq 0$ при $i = 2, 3, j = 1, 2, 3$, то система має безліч розв'язків.

Якщо $a_{11} = a_{12} = a_{13} = b_1 = 0$ і $a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \neq 0$ або $a_{21} = a_{22} = a_{23} = b_2 = 0$ і $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 \neq 0, a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \neq 0$ або $a_{31} = a_{32} = a_{33} = b_3 = 0$ і $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 \neq 0, a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 \neq 0$, то система теж може мати безліч розв'язків.

Розглянемо випадок, якщо

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 \neq 0, a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 \neq 0 \text{ і } a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 \neq 0.$$

Якщо хоча б два рівняння системи (12) є несумісними, то й система несумісна. Якщо ж сумісна система містить два однакові рівняння, то вона має безліч розв'язків.

3.1. Метод підстановки

Розглянемо метод підстановки для трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими на прикладі для випадку, коли розв'язок системи єдиний.

Приклад 31. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5. \end{cases}$$

Розв'язання

Із першого рівняння визначимо $y = x + 3z - 9$ і підставимо цей вираз у друге і третє рівняння:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3z - 9, \\ 3x - 5(x + 3z - 9) + z = -4, \\ 4x - 7(x + 3z - 9) + z = 5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3z - 9, \\ 2x + 14z = 49, \\ 3x + 20z = 58. \end{cases}$$

Із другого рівняння одержаної системи визначимо $x = \frac{49-14z}{2}$ і підставимо в третє рівняння:

$$\begin{cases} y = x + 3z - 9, \\ 2x + 14z = 49, \\ 3x + 20z = 58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3z - 9, \\ x = \frac{49-14z}{2}, \\ 3 \cdot x = \frac{49-14z}{2} + 20z = 58; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3z - 9, \\ x = \frac{49-14z}{2}, \\ z = \frac{31}{2}. \end{cases}$$

Тоді одержане значення $z = \frac{31}{2}$ підставимо в друге рівняння системи для знаходження x :

$$\begin{cases} y = x + 3z - 9, \\ x = \frac{49-14z}{2}, \\ z = \frac{31}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 3z - 9, \\ x = \frac{49-14 \cdot \frac{31}{2}}{2}, \\ z = \frac{31}{2}. \end{cases}$$

Одержані значення $x = -84$ та $z = \frac{31}{2}$ підставимо в перше рівняння останньої системи для визначення y :

$$\begin{cases} y = x + 3z - 9, \\ x = -84, \\ z = \frac{31}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -84 + 3 \cdot \frac{31}{2} - 9, \\ x = -84, \\ z = \frac{31}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{93}{2}, \\ x = -84, \\ z = \frac{31}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -84, \\ y = -\frac{93}{2}, \\ z = \frac{31}{2}. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x; y; z)\} = \left\{\left(-84; -\frac{93}{2}; \frac{31}{2}\right)\right\}$.

3.2. Метод виключення невідомих

При цьому методі, комбінуючи певним чином рівняння системи, виключають одну із невідомих у всіх рівняннях, крім одного. Аналогічно виключають другу невідому і в результаті одержують систему з одним невідомим, за яким знаходять дві інші невідомі. При цьому час, витрачений на одержання розв'язку методом виключення, буде залежати від організації обчислень.

Продemonструємо даний метод виключення невідомих на попередньому прикладі.

Приклад 32. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5. \end{cases}$$

Розв'язання

Домножимо друге рівняння системи на (-1) і додамо його до третього рівняння, а результат запишемо замість третього рівняння даної системи. Аналогічно помножимо друге рівняння системи на (-3) і додамо до першого рівняння системи, а результат запишемо замість другого рівняння даної системи.

Тоді отримаємо:
$$\begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ -8x + 14y = 21, \\ x - 2y = 9. \end{cases}$$

Третє рівняння одержаної системи помножимо на 8 і додамо його до другого рівняння, а результат запишемо замість другого рівняння:

$$\begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ -8x + 14y = 21, \\ x - 2y = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ -2y = 93, \\ x - 2y = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 9 \\ y = -\frac{93}{2}, \\ x - 2y = 9. \end{cases}$$

Тоді одержане значення $y = -\frac{93}{2}$ підставимо в третє рівняння системи для знаходження x :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ y = -\frac{93}{2}, \\ x - 2y = 9, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ y = -\frac{93}{2}, \\ x = 9 + 2y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ y = -\frac{93}{2}, \\ x = 9 + 2 \cdot \left(-\frac{93}{2}\right); \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ y = -\frac{93}{2}, \\ x = -84. \end{cases} \end{aligned}$$

А одержані значення $x = -84$ та $y = -\frac{93}{2}$ підставимо в перше рівняння останньої системи для знаходження z :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y + 3z = 9, \\ y = -\frac{93}{2}, \\ x = -84, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{9-x+y}{3}, \\ y = -\frac{93}{2}, \\ x = -84, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{9+84-\frac{93}{2}}{3}, \\ y = -\frac{93}{2}, \\ x = -84. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{31}{2}, \\ y = -\frac{93}{2}, \\ x = -84. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -84, \\ y = -\frac{93}{2}, \\ z = \frac{31}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Відповідь: $\{(x; y; z)\} = \left\{\left(-84; -\frac{93}{2}; \frac{31}{2}\right)\right\}$.

Приклад 33. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x + 3y - 4z = -21, \\ 2x - 3y - 2z = 6, \\ 3x + 3y - 8z = -31. \end{cases}$$

Розв'язання

Домножимо перше рівняння системи до другого, і результат запишемо замість другого рівняння, а третє рівняння системи додамо до першого рівняння, помноженого на (-1) , і результат додавання запишемо замість третього рівняння даної системи:

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = -21, \\ 2x - 3y - 2z = 6, \\ 3x + 3y - 8z = -31; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 4z = -21, \\ 3x - 6z = -15, \\ -2x + 4z = 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 4z = -21, \\ x - 2z = -5, \\ -x + 2z = 5; \end{cases}$$

Оскільки друге та третє рівняння одержаної сумісної системи є одне й теж рівняння, то система має безліч розв'язків. Дійсно, додавши друге та третє рівняння системи, отримаємо:

$$(1 - 1)x + (-2 + 2)z = -5 + 5 \Leftrightarrow 0 \cdot x + 0 \cdot z = 0 \Leftrightarrow z \in R.$$

А з першого і другого рівняння останньої системи знайдемо зв'язок невідомих x та y із невідомою z . Отже,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x + 3y - 4z = -21, \\ x - 2z = -5, \\ -x + 2z = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 4z = -21, \\ x - 2z = -5, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 4z = -21, \\ x - 2z = -5, \\ 0 \cdot z = 0; \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-21 - x + 4z}{3}, \\ x = 2z - 5, \\ z = t, \text{ де } t \in R; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-21 - 2t + 5 + 4t}{3}, \\ x = 2t - 5, \\ z = t, \text{ де } t \in R; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}(2t - 16), \\ x = 2t - 5, \\ z = t, \text{ де } t \in R; \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t - 5, \\ y = \frac{2}{3}(t - 8), \\ z = t, \text{ де } t \in R. \end{cases} \end{aligned}$$

Відповідь: система має безліч розв'язків виду $(2t - 5; \frac{2}{3}(t - 8); t)$, де $t \in R$.

Приклад 34. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ 2x + y + 3z = 0, \\ x + y + 2z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Оскільки маємо систему однорідних рівнянь, то $(0; 0; 0)$ є її розв'язком. Додамо перше рівняння системи до другого рівняння, і результат запишемо замість другого рівняння даної системи:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ 2x + y + 3z = 0, \\ x + y + 2z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ 3x + 3y + 6z = 0, \\ x + y + 2z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ x + y + 2z = 0, \\ x + y + 2z = 0; \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y + 2z) + (y + z) = 0, \\ 2x + y + 3z = 0, \\ x + y + 2z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0, \\ (x + z) + (y + z) = 0, \\ (x + z) + (y + z) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0, \\ x + z = 0, \\ x + z = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Оскільки друге та третє рівняння одержаної сумісної системи однакові, система має безліч розв'язків. Дійсно, додавши друге рівняння системи до третього, помноженого на (-1) , одержимо: $0 \cdot z = 0 \Leftrightarrow z = t$, де $t \in R$.

$$\text{Отже, } \begin{cases} y + z = 0, \\ x + z = 0, \\ x + z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = 0, \\ x + z = 0, \\ 0 \cdot z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z, \\ y = -z, \\ z = t, \text{ де } t \in R; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -t, \\ y = -t, \\ z = t, \text{ де } t \in R. \end{cases}$$

Відповідь: система має безліч розв'язків виду $(-t; -t; t)$, де $t \in R$.

$$ax + y + z = b_1,$$

$$\text{У системах виду } x + ay + z = b_2,$$

$$x + ay + az = b_3,$$

де a, b_1, b_2, b_3 – деякі дійсні числа, зручно виключати невідомі таким методом: додаємо всі рівняння системи і одержуємо

$$(a + 2)x + (a + 2)y + (a + 2)z = b_1 + b_2 + b_3 \quad (*).$$

Звідки $x + y + z = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{a + 2}$ якщо $a = -2$, після чого $(*)$ і цим самим відразу визначаємо невідомі x, y та z . Доречі, при $a = -2$ рівняння $(*)$ набуває вигляду $0 \cdot (x + y + z) = b_1 + b_2 + b_3$, яке не має розв'язків при $b_1 + b_2 + b_3 \neq 0$ і має безліч розв'язків при $b_1 + b_2 + b_3 = 0$.

Приклад 35. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 3x + y + z = 6, \\ x + 3y + z = 9, \\ x + y + 3z = 10. \end{cases}$$

Розв'язання

Додамо всі три рівняння даної системи:

$$5x + 5y + 5z = 25 \Leftrightarrow 5(x + y + z) = 25 \Leftrightarrow x + y + z = 5 \quad (*).$$

Тепер від кожного рівняння даної системи віднімемо одержане рівняння $(*)$, тобто маємо:

$$\begin{cases} 3x + y + z = 6, \\ x + 3y + z = 9, \\ x + y + 3z = 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 6 - 5, \\ 2y = 9 - 5, \\ 2z = 10 - 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = 2, \\ z = \frac{5}{2}. \end{cases}$$

Відповідь: $\{x; y; z\} = \left\{\left(\frac{1}{2}; 2; \frac{5}{2}\right)\right\}$.

Продемонструємо метод виключення невідомих і для систем з чотирьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими.

Приклад 36. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 3x + y + z = 6, \\ x + 3y + z = 9, \\ x + y + 3z = 10. \end{cases}$$

Розв'язання

Додамо всі три рівняння даної системи:

$$3x + 3y + 3z = 30 \Leftrightarrow 3(x + y + z + t) = 30 \Leftrightarrow x + y + z + t = 10 \quad (*).$$

Тепер від кожного рівняння даної системи віднімемо одержане рівняння (*), тобто маємо:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ y + z + t = 9, \\ x + z + t = 8, \\ x + y + t = 7; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -t = 6 - 10, \\ -x = 9 - 10, \\ -y = 8 - 10, \\ x - z = 7 - 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4, \\ x = 1, \\ y = 2, \\ z = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 3, \\ t = 4. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x; y; z; t)\} = \{(1; 2; 3; 4)\}$.

3.3. Метод Гаусса

Цей метод є частинним випадком методу виключення невідомих. Якщо в першому рівнянні системи коефіцієнт при невідомій x дорівнює нулю, то це рівняння варто поміняти місцями з рівнянням системи, в якому коефіцієнт при невідомій x відмінний від нуля.

Зауважимо, що кожне рівняння системи обов'язково записуємо у такий спосіб, щоб коефіцієнти при невідомих стояли один під одним, тобто коефіцієнти при невідомій x були під коефіцієнтами при x , коефіцієнти при невідомій y – під коефіцієнтами при y і тощо

При цьому методі виключаємо невідому x у всіх рівняннях, крім вибраного першого рівняння. Аналогічно виключаємо невідому y , і в результаті одержимо трикутну систему рівнянь (або її називають діагональну), розв'язування трикутної системи лінійних рівнянь – обернений хід.

Метод Гаусса (Гаусс Фрідріх Карл 1777–1855 – німецький математик) – **метод послідовного виключення змінних** полягає в тому, що за допомогою елементарних перетворень система рівнянь зводиться до рівносильної системи ступінчастого або до трикутного вигляду, із якої послідовно, починаючи з останніх (за номером) змінних, знаходять всі інші змінні.

Варто пам'ятати, існує багато різних схем Гаусса, які мають ті чи інші переваги. Наведемо одну з таких схем на прикладах лінійних рівнянь з трьома невідомими.

Приклад 37. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 2x + 7y + 13z = 0, \\ 3x + 14y + 12z = 18, \\ 5x + 25y + 16z = 39. \end{cases}$$

Розв'язання

За перше рівняння виберемо перше рівняння даної системи і поділимо всі його коефіцієнти на коефіцієнт при x , який не дорівнює нулю.

$$\begin{cases} 2x + 7y + 13z = 0, \\ 3x + 14y + 12z = 18, \\ 5x + 25y + 16z = 39; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{7}{2}y + \frac{13}{2}z = 0, \\ 3x + 14y + 12z = 18, \\ 5x + 25y + 16z = 39. \end{cases}$$

До другого рівняння одержаної системи додамо перше рівняння, помножене на (-3) , і результат додавання запишемо замість другого рівняння системи, а до третього рівняння додамо перше рівняння, помножене на (-5) , і результат додавання запишемо замість третього рівняння:

$$\begin{cases} x + \frac{7}{2}y + \frac{13}{2}z = 0, \\ 3x + 14y + 12z = 18, \\ 5x + 25y + 16z = 39; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{7}{2}y + \frac{13}{2}z = 0, \\ 0 + \frac{7}{2}y - \frac{15}{2}z = 18, \\ 0 + \frac{15}{2}y - \frac{33}{2}z = 39; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{7}{2}y + \frac{13}{2}z = 0, \\ \frac{7}{2}y - \frac{15}{2}z = 18, \\ \frac{15}{2}y - \frac{33}{2}z = 39. \end{cases}$$

Далі у другому рівнянні всі члени поділимо на коефіцієнт при y , тобто на $\frac{7}{2}$:

$$\begin{cases} x + \frac{7}{2}y + \frac{13}{2}z = 0, \\ \frac{7}{2}y - \frac{15}{2}z = 18, \\ \frac{15}{2}y - \frac{33}{2}z = 39; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{7}{2}y + \frac{13}{2}z = 0, \\ y - \frac{15}{7}z = \frac{36}{7}, \\ \frac{15}{2}y - \frac{33}{2}z = 39; \end{cases}$$

Друге рівняння системи домножимо на $(-\frac{15}{2})$ і додамо до третього рівняння, а результат запишемо замість третього рівняння:

$$\begin{cases} x + \frac{7}{2}y + \frac{13}{2}z = 0, \\ y - \frac{15}{7}z = \frac{36}{7}, \\ \frac{15}{2}y - \frac{33}{2}z = 39; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{7}{2}y + \frac{13}{2}z = 0, \\ y - \frac{15}{7}z = \frac{36}{7}, \\ 0 - \frac{3}{7}z = \frac{3}{7}. \end{cases}$$

Тоді маємо трикутну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x + \frac{7}{2}y + \frac{13}{2}z = 0, \\ y - \frac{15}{7}z = \frac{36}{7}, \\ z = -1. \end{cases}$$

Тепер зробимо обернений хід, тобто за знайденим значенням z із другого рівняння знайдемо y , і за знайденими значеннями z і y із першого рівняння знайдемо x :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + \frac{7}{2}y + \frac{13}{2}z = 0, \\ y - \frac{15}{7}z = \frac{36}{7}, \\ z = -1; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{7}{2}y + \frac{13}{2}z = 0, \\ y = \frac{36}{7} + \frac{15}{7} \cdot (-1), \\ z = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{2}y - \frac{13}{2}z, \\ y = 3, \\ z = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{2}y - \frac{13}{2}z, \\ y = 3, \\ z = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{2} \cdot 3 - \frac{13}{2} \cdot (-1), \\ y = 3, \\ z = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ y = 3, \\ z = -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Відповідь: $\{(x; y; z)\} = \{(4; 3; -1)\}$.

Приклад 38. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x + 3y - 4z = -21, \\ 2x - 3y + 2z = 6, \\ 3x + 3y - 8z = -31. \end{cases}$$

Розв'язання

За перше рівняння виберемо перше рівняння даної системи. Друге рівняння системи додамо до першого рівняння, помноженого на (-2) , і результат додавання запишемо замість другого рівняння системи, а третє рівняння додамо до першого рівняння, помноженого на (-3) , і результат додавання запишемо замість третього рівняння:

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = -21, \\ 2x - 3y + 2z = 6, \\ 3x + 3y - 8z = -31; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 4z = -21, \\ 0 - 9y + 6z = 48, \\ 0 - 6y + 4z = 32; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 4z = -21, \\ 9y - 6z = -48, \\ 6y - 4z = -32; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 4z = -21, \\ 3y - 2z = -16, \\ 3y - 2z = -16. \end{cases}$$

Оскільки друге та третє рівняння одержаної системи є одним і тим же рівнянням, то система має безліч розв'язків. Дійсно, додавши друге рівняння до третього, помноженого на (-1) , одержимо:

$(3 - 3)y = (-2 + 2)z = -16 + 16 \Leftrightarrow 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot z = 0 \Leftrightarrow z \in R$. А з першого та другого рівнянь останньої системи знайдемо зв'язок невідомих x і y із невідомою z . Отже,

$$\begin{cases} x + 3y - 4z = -21, \\ 3y - 2z = -16, \\ 3y - 2z = -16; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 4z = -21, \\ 3y - 2z = -16, \\ 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 4z = -21, \\ 3y - 2z = -16, \\ 0 \cdot z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -21 - (3y - 2z) + 2z, \\ y = \frac{-16 + 2z}{3}, \\ z = t, \text{ де } t \in R; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t - 5, \\ y = \frac{2}{3}(t - 8), \\ z = t, \text{ де } t \in R. \end{cases}$$

Відповідь: система має безліч розв'язків виду $(2t - 5; \frac{2}{3}(t - 8); t)$, де $t \in R$.

Приклад 39. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$$

Розв'язання

За перше рівняння виберемо друге рівняння системи, тобто поміняємо місцями перше та друге рівняння:

$$\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = -1, \\ 2x - y + z = -2, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$$

До другого рівняння системи додамо перше рівняння, помножене на (-2) , і результат додавання запишемо замість другого рівняння, а до першого рівняння системи додамо третє рівняння, помножене на (-1) , і результат додавання запишемо замість третього рівняння:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1, \\ 2x - y + z = -2, \\ x - 3y - 2z = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = -1, \\ -5y - 5z = 0, \\ 5y + 5z = -4. \end{cases}$$

Оскільки друге та третє рівняння одержаної системи несумісні, то дана система також несумісна. Дійсно, додамо до третього рівняння останньої системи друге рівняння, і результат запишемо замість третього рівняння:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1, \\ -5y - 5z = 0, \\ 5y + 5z = -4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = -1, \\ -5y - 5z = 0, \\ 0 = -4. \end{cases}$$

Відповідь: система несумісна.

Продемонструємо метод Гаусса також і для систем трьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими.

Приклад 40. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x + y + z + t = 1, \\ x + y - z = 2, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

За перше рівняння виберемо перше рівняння даної системи. Друге рівняння системи додамо до першого рівняння, помноженого на (-1) , а результат додавання запишемо замість другого рівняння системи:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1, \\ x + y - z = 2, \\ y + z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 1, \\ -2z - t = 1, \\ y + z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 1, \\ z + \frac{1}{2}t = -\frac{1}{2}, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Помінявши місцями друге та третє рівняння системи, одержимо систему трьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими трикутного вигляду:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1, \\ z + \frac{1}{2}t = -\frac{1}{2}, \\ y + z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 1, \\ z + y = 0, \\ -2z - t = 1. \end{cases}$$

Дана система є сумісною, але невизначеною. Отже, надамо невідомій t довільних дійсних значень, тобто $t \in R$, а зв'язок невідомих x, y, z з невідомою t знайдемо з рівнянь останньої системи. Отже

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1, \\ z + y = 0, \\ -2z - t = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 1, \\ z + y = 0, \\ -2z - t = 1, \\ 0 \cdot t = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -z, \\ z = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, \\ t = c, \text{ де } c \in R; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - c, \\ y = \frac{1}{2}(1 + c), \\ z = -\frac{1}{2}(1 + c), \\ t = c, \text{ де } c \in R. \end{cases}$$

Відповідь: система має безліч розв'язків виду

$$\left(1 - c; \frac{1}{2}(1 + c); -\frac{1}{2}(1 + c); c\right), \text{ де } c \in R.$$

Приклад 41. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x + 2y + 3z - t = 2, \\ x + y - z - t = 1, \\ 3x + 5y + 5z - 3t = 6. \end{cases}$$

Розв'язання

За перше рівняння виберемо друге рівняння системи, тобто поміняємо місцями перше та друге рівняння:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - t = 2, \\ x + y - z - t = 1, \\ 3x + 5y + 5z - 3t = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z - t = 2, \\ x + 2y + 3z - t = 2, \\ 3x + 5y + 5z - 3t = 6. \end{cases}$$

До першого рівняння системи додамо друге рівняння, помножене на (-1) , і результат додавання запишемо замість другого рівняння, а до третього рівняння системи додамо перше рівняння, помножене на (-3) , і результат додавання запишемо замість третього рівняння:

$$\begin{cases} x + y - z - t = 2, \\ x + 2y + 3z - t = 2, \\ 3x + 5y + 5z - 3t = 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z - t = 2, \\ y + 4z = 1, \\ 2y + 8z = 3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z - t = 2, \\ y + 4z = 1, \\ y + 4z = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Оскільки друге та третє рівняння одержаної системи несумісні, то дана система також несумісна. Дійсно, додавши до третього рівняння друге рівняння, помножене на (-1) , одержимо рівність:

$$(1 - 1) \cdot y + (4 - 4) \cdot z = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \cdot y + 0 \cdot z = \frac{1}{2}, \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}, \text{ яка не має змісту при жодному значенні невідомих } x, y \text{ та } z.$$

Відповідь: система несумісна.

3.4. Метод Крамера

Визначником третього порядку називається число, що обчислюється за формулою:

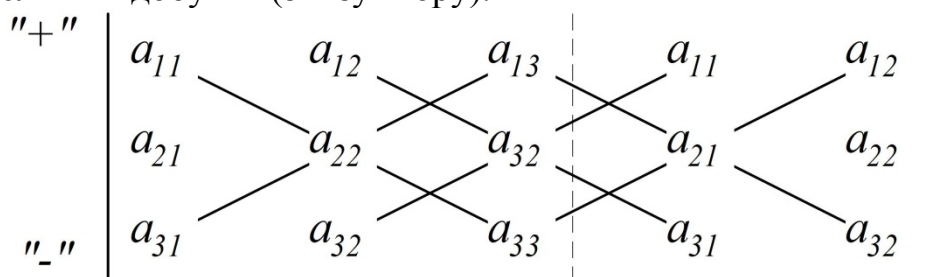
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - \\ - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}.$$

Цей визначник знаходимо за правилом: зі знаком плюс беруть всі добутки елементів визначника, які на Рис. 1 з'єднані прямими, а зі знаком мінус беруть всі добутки елементів визначника, які на Рис. 2 з'єднані прямими.



Або ще кажуть, що зі знаком плюс беруть добуток елементів визначника, що стоять на головній діагоналі ($a_{11}a_{22}a_{33}$), та трикутники відносно іншої діагоналі ($a_{31}a_{22}a_{13}$), а зі знаком мінус беруть добуток елементів визначника, що розміщені на другій діагоналі, та трикутники відносно головної діагоналі. Отже, це правило обчислення визначника називають **правилом «трикутників»** або ще **правилом «зірочки»**.

Визначник третього порядку також можна обчислити за правилом Саррюса: до визначника дописують два перші стовпці. З плюсом беруть добуток елементів головної діагоналі і два паралельні їй добутки (згори вниз). А з мінусом беруть добуток елементів допоміжної діагоналі і два паралельні їй добутки (знизу вгору).



Перейдемо тепер безпосередньо до методу Крамера.

Для системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y - a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases}$$

можливі два основні випадки: $\Delta \neq 0$ або $\Delta = 0$.

1. Якщо визначник цієї системи не дорівнює нулю, тобто

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ то система (3) має єдиний розв'язок, що}$$

визначається за формулами Крамера $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}, z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}$.

При цьому Δ_x – визначник, одержаний із визначника Δ заміною стовпця коефіцієнтів при x на стовпець вільних членів:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_y - \text{визначник, одержаний із визначника } \Delta \text{ заміною}$$

стовпця коефіцієнтів при y на стовпець вільних членів:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_z - \text{визначник, одержаний із визначника } \Delta \text{ заміною}$$

стовпця коефіцієнтів при z на стовпець вільних членів:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

2. Якщо $\Delta \neq 0$, то система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок, і тоді справедливі формули Крамера.

3. Якщо $\Delta = 0$, а $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$, $\Delta_z \neq 0$, то система лінійних алгебраїчних рівнянь не має розв'язків.
4. Якщо $\Delta = 0$, а $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$, то система лінійних алгебраїчних рівнянь має безліч розв'язків, або може бути несумісною.

Теорема Крамера

Якщо визначник основної матриці системи n рівнянь першого степеня з n невідомими відмінний від нуля, тоді система має єдиний розв'язок. При цьому значення кожного з невідомих дорівнює відношенню визначників двох матриць: в чисельнику – визначник матриці, одержаної з основної матриці системи заміною стовпця, що відповідає вибраному невідомому, стовпцем вільних членів, а в знаменнику – визначник основної матриці системи.

Деякі основні властивості визначників

- кожний добуток містить елементи кожного рядка і кожного стовпця;
- не може добуток містити два (чи більше) елементи з одного рядка (стовпця);
- якщо один з рядків або стовпців визначника містить тільки нулі, то визначник дорівнює нулю;
- якщо визначник, який має два однакові рядки або стовпці, то він дорівнює нулю;
- якщо два рядки або два стовпці пропорційні, то визначник дорівнює нулю;
- якщо всі елементи стовпця або рядка визначника мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника.

Приклад 42. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x + y - 2z = 6, \\ 2x + 3y - 7z = 16, \\ 5x + 2y + z = 16. \end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо визначники даної системи:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 \cdot (-7) - 5 \cdot 3 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot 1 - \\ &\quad - 1 \cdot 2 \cdot (-7) = 2; \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 16 & 3 & -7 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 \cdot 1 + 16 \cdot 2 \cdot (-2) + 16 \cdot 1 \cdot (-7) - 16 \cdot 3 \cdot (-2) - \\ &\quad - 6 \cdot 2 \cdot (-7) - 1 \cdot 1 \cdot 16 = 6; \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 16 & -7 \\ 5 & 16 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 16 \cdot 1 + 2 \cdot 16 \cdot (-2) + 5 \cdot 6 \cdot (-7) - 5 \cdot 16 \cdot (-2) - \\ &\quad - (-7) \cdot 16 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 6 = 2; \end{aligned}$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 16 \\ 5 & 2 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 16 + 2 \cdot 2 \cdot 6 + 5 \cdot 1 \cdot 16 - 5 \cdot 3 \cdot 6 - 2 \cdot 1 \cdot 16 - \\ - 1 \cdot 2 \cdot 16 = -2.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок (x_0, y_0, z_0) , де

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{6}{2} = 3, y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2}{2} = 1 \text{ та } z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Відповідь: $\{(x; y; z)\} = \{(3; 1; -1)\}$.

Приклад 43. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 2x - y + z = -2, \\ x + 2y + 3z = -1, \\ x - 3y - 2z = 3. \end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо визначники даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1) \cdot (-2) - \\ - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot (-3) = 0;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 \cdot (-3) - \\ - 1 \cdot 3 \cdot 2 - (-2) \cdot (-1) \cdot (-1) - (-2) \cdot (-3) \cdot 3 = -20.$$

Відповідь: система несумісна.

Приклад 44. Визначити скільки розв'язків має система рівнянь
$$\begin{cases} 5x - 3y + z = 3, \\ 4x + y - 5z = 4, \\ x - 4y + 6z = -1. \end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо визначники даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6 \cdot 1 + 1 \cdot (-5) \cdot (-3) + 4 \cdot 1 \cdot (-4) - 6 \cdot 4 \cdot (-3) - \\ - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 5 \cdot (-4) \cdot (-5) = 0;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -1 & -4 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 \cdot 1 + 1 \cdot (-5) \cdot (-3) + 4 \cdot 1 \cdot (-4) - 6 \cdot 4 \cdot (-3) - \\ - (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-4) \cdot (-5) = 0;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 \cdot 6 + 1 \cdot 3 \cdot (-5) + 1 \cdot 4 \cdot (-1) - 1 \cdot 4 \cdot 1 - \\ - 4 \cdot 6 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot (-5) = 0;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot (-1) + 1 \cdot (-3) \cdot 4 + 4 \cdot (-4) \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - \\ - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) - 5 \cdot 4 \cdot (-4) = -0.$$

Оскільки $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, то система невизначена, тобто має безліч розв'язків.

Відповідь: система має безліч розв'язків.

Приклад 45. Визначити, при яких значеннях параметра b система рівнянь

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x + y - z = 1, \\ 2x + by + z = 1. \end{cases} \quad \text{має хоча б один розв'язок.}$$

Розв'язання

Знайдемо основний визначник даної системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix} = 1 + b - 2 - 2 - 1 = b - 4$$

та допоміжний визначник

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 4 - 2 - 2 + 1 = -5.$$

Якщо $\Delta = 0 \Leftrightarrow b - 4 = 0 \Leftrightarrow b = 4$, то система несутимісна, оскільки $\Delta_y = -5 \neq 0$.

Якщо $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 4$, то система має єдиний розв'язок.

Відповідь: $b \in (-\infty; 4) \cup (4; \infty)$.

Приклад 46. Дослідити і розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x + 2y + z = 2, \\ x + y + 2z = 1, \\ ax + y + 3z = 5. \end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо визначники даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 + 3 + 4a - a - 6 - 2 = 3a - 4;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 20 + 1 - 5 - 4 - 6 = 12;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4a + 5 - a - 10 - 6 = 3a - 8;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 2a + 2 - 2a - 10 - 1 = -4.$$

Якщо $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow 3a - 4 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{4}{3}$, то система має єдиний розв'язок (x_0, y_0, z_0) де $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{12}{3a-4}$, $y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3a-8}{3a-4}$ та $z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta} = -\frac{4}{3a-4}$.

Якщо $\Delta = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$, то система несутимісна, оскільки $\Delta_x = 12 \neq 0$.

Відповідь: якщо $a \neq \frac{4}{3}$, то система має єдиний розв'язок $\left(\frac{12}{3a-4}; \frac{3a-8}{3a-4}; -\frac{4}{3a-4}\right)$; якщо $a = \frac{4}{3}$, то система несутимісна.

Приклад 47. Дослідити і розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ x + 2y + az = b. \end{cases}$$

Розв'язання

Обчислимо визначники даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 3a + 1 + 4 - 3 - 2a - 2 = a;$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ b & 2 & a \end{vmatrix} = 0 + b + 2 - 3b - a - 0 = -2b - a + 2 = 2 - a - 2b;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = a + 0 + 2b - 1 - 0 - b = b + a - 1 = a + b - 1;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & b \end{vmatrix} = 3b + 1 + 0 - 0 - 2b - 2 = b - 1.$$

Якщо $\Delta \neq 0$, тобто $a \neq 0$, то система має єдиний розв'язок (x_0, y_0, z_0) , де $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2-a-2b}{a}$, $y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{a+b-1}{a}$ та $z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{b-1}{a}$.

Якщо $\Delta = 0$, тобто $a = 0$, то допоміжні визначники набувають вигляду $\Delta_x = 2 - 2b = 1 \cdot (1 - b)$, $\Delta_y = b - 1$ та $\Delta_z = b - 1$.

Якщо $a = 0$ і $b \neq 1$ маємо $\Delta = 0$, а $\Delta_y = \Delta_z \neq 0$, тобто система несутимісна.

Якщо $a = 0$ і $b = 1$ маємо $\Delta = \Delta_y = \Delta_z = \Delta_x = 0$, тобто система має безліч розв'язків.

Дослідимо, якого вигляду набувають ці розв'язки. Якщо $a = 0$ і $b = 1$, то система набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ x + 2y + 0 = 1; \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 2y = 1, \\ x + 2y = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + 2y = 1, \\ 0 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -z, \\ x + 2y = 1, \\ 0 \cdot z = 0; \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -z, \\ -z + y = 1, \\ z = t, \text{ де } t \in R; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z - y, \\ y = 1 + z, \\ z = t, \text{ де } t \in R; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z - 1, \\ y = 1 + z, \\ z = t, \text{ де } t \in R; \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z - 1, \\ y = 1 + t, \\ z = t, \text{ де } t \in R. \end{cases} \end{aligned}$$

Тобто при $a = 0$ і $b = 1$ система має безліч розв'язків виду $(-2t - 1; t + 1; t)$, де $t \in R$.

Відповідь: якщо $a \neq 0$ і довільному b система має єдиний розв'язок $(\frac{2-a-2b}{a}; \frac{a+b-1}{a}; \frac{b-1}{a})$; якщо $a = 0$ і $b \neq 1$, то система несутимісна; якщо $a = 0$ і $b = 1$ система має безліч розв'язків виду $(-2t - 1; t + 1; t)$, де $t \in R$.

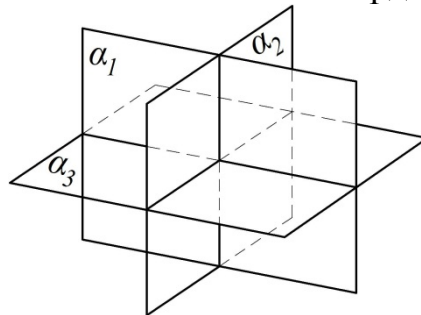
3.5. Геометрична інтерпретація розв'язку систем лінійних рівнянь з трьома змінними

Кожне лінійне рівняння з трьома невідомими x, y, z визначає площину у просторі і відповідно три рівняння системи

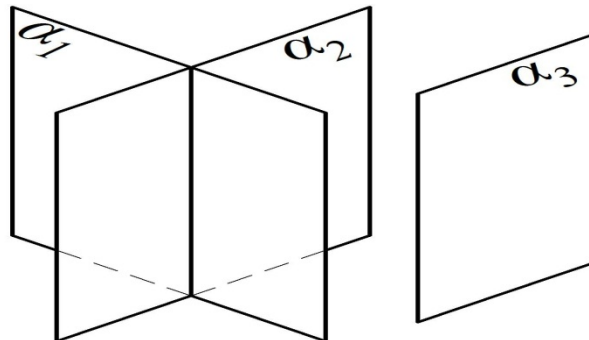
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3, \end{cases} \quad (3) \text{ — три площини.}$$

Продемонструємо випадки взаємного розташування цих трьох площин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, заданих відповідно першим, другим і третім рівняннями системи (3).

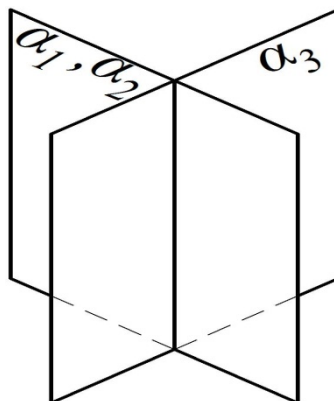
1. Площини $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ перетинаються в одній точці — система має єдиний розв'язок. Причому розв'язком системи є координати цієї точки.



2. Одна з площин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ паралельна хоч б одній з двох інших площин — система несумісна



3. Усі три площини $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ перетинаються по прямій, причому дві з трьох площин або навіть всі три площини можуть співпадати — тоді система невизначена.



3.6. Системи лінійних рівнянь, що містять знак модуля

У системах виду
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ |a_{31}x + n_1| + |a_{32}y + n_2| + |a_{33}z + n_3| = b_3 \end{cases} \quad \text{також}$$

доцільно застосовувати метод підстановки, тобто з першого рівняння виразити, наприклад, x через y і z (якщо $a_{11} \neq 0$) і підставити це значення у друге і третє рівняння системи. А потім у другому рівнянні виразити y через z (чи навпаки) і підставити дане значення у третє рівняння. Тоді третє рівняння останньої системи буде лінійним рівнянням з однією змінною і модулями, яке легко розв'язується за допомогою методів інтервалів при розкриванні модулів.

Приклад 48. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ 2x + y - z = 2, \\ |x - 1| + |y + 2| + |z - 3| = 5. \end{cases}$$

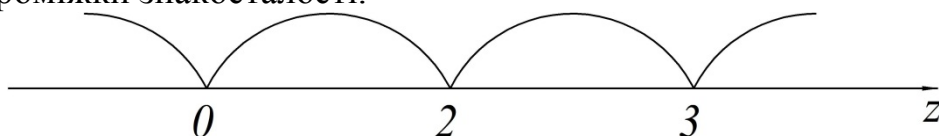
Розв'язання

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + 2y + z = 1, \\ 2x + y - z = 2, \\ |x - 1| + |y + 2| + |z - 3| = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y - z, \\ 2(1 - 2y - z) + y - z = 2, \\ |1 - 2y - z - 1| + |y + 2| + |z - 3| = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y - z, \\ 2 - 4y - 2z + y - z = 2, \\ |-2y - z| + |y + 2| + |z - 3| = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y - z, \\ -3y - 3z = 0, \\ |2y + z| + |y + 2| + |z - 3| = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y - z, \\ y = -z, \\ |2 \cdot (-z) + z| + |-z + 2| + |z - 3| = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y - z, \\ y = -z, \\ |-z| + |-z + 2| + |z - 3| = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y - z, \\ y = -z, \\ |z| + |2 - z| + |z - 3| = 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Розглянемо третє рівняння останньої системи:

$|-z| + |-z + 2| + |z - 3| = 5$ (*). Застосуємо метод інтервалів при розкриванні модулів. Знайдемо характерні значення змінної z для підмодулевих виразів:
$$\begin{cases} z = 0, \\ 2 - z = 0, \\ z - 3 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0, \\ z = 2, \\ z = 3. \end{cases}$$

Знайденими характерними значеннями змінної z розбиваємо числову вісь на проміжки знакосталості.



Розглянемо рівняння (*) на кожному з утворених проміжків:

1) $z < 0$: $|z| = -z$, $|2 - z| = 2 - z$ і рівняння (*) набуває вигляду

$-z + 2 - z + 3 - z = 5$, тобто отримаємо систему

$$\begin{cases} z < 0, \\ -z + 2 - z + 3 - z = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z < 0, \\ -3z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z < 0, \\ z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow z \in \emptyset;$$

2) $0 \leq z \leq 2$: $|z| = z$, $|2 - z| = 2 - z$, $|z - 3| = 3 - z$ і рівняння (*)

набуває вигляду $z + 2 - z + 3 - z = 5$, тобто отримаємо систему

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 2, \\ -z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq z \leq 2, \\ z = 0; \end{cases} \Leftrightarrow z = 0;$$

3) $2 < z < 3$: $|z| = z$, $|2 - z| = z - 2$, $|z - 3| = 3 - z$ і рівняння (*)

набуває вигляду $z + 2 - 2 + 3 - z = 5$, тобто отримаємо систему

$$\begin{cases} 2 < z < 3, \\ z = 4; \end{cases} \Leftrightarrow z \in \emptyset.$$

4) $z \geq 3$: $|z| = z$, $|2 - z| = z - 2$, $|z - 3| = z - 3$ і рівняння (*) набуває

вигляду $z + z - 2 + z - 3 = 5$, тобто отримаємо систему

$$\begin{cases} z \geq 3, \\ z + z - 2 + z - 3 = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \geq 3, \\ 3z = 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \geq 3, \\ z = \frac{10}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{10}{3}.$$

Оскільки $|x - 1| + |y + 2| + |z - 3| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0, \\ z = \frac{10}{3}, \end{cases}$ то система

$$\begin{cases} x = 1 - 2y - z, \\ y = -z, \\ |z| + |2 - z| + |z - 3| = 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y - z, \\ y = -z, \\ \begin{cases} z = 0, \\ z = \frac{10}{3}; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} z = 0, \\ y = 0, \\ x = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} z = \frac{10}{3}, \\ y = -\frac{10}{3}, \\ x = \frac{13}{3}; \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \\ z = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{13}{3}, \\ y = -\frac{10}{3}, \\ z = \frac{10}{3}. \end{cases} \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x; y; z)\} = \{(1; 0; 0), (\frac{13}{3}; -\frac{10}{3}; \frac{10}{3})\}$.

Приклад 49. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x - y + z = 3, \\ |3x + 1| + |y - 1| + |3z + 2| = 1. \end{cases}$$

Розв'язання

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x + y - z = 1, \\ 2x - y + z = 3, \\ |3x + 1| + |y - 1| + |3z + 2| = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y + z, \\ 2(1 - y + z) - y + z = 3, \\ |3(1 - y + z) + 1| + |y - 1| + |3z + 2| = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y + z, \\ 2 - 2y + 2z - y + z = 3, \\ |3 - 3y + 3z + 1| + |y - 1| + |3z + 2| = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y + z, \\ -3y + 3z = 1, \\ |4 - 3y + 3z| + |y - 1| + |3z + 2| = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y + z, \\ 3z = 1 + 3y, \\ |4 - 3y + 3y + 1| + |y - 1| + |1 + 3y + 2| = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y + z, \\ 3z = 1 + 3y, \\ 5 + |y - 1| + |3y + 3| = 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y + z, \\ 3z = 1 + 3y, \\ 5 + |y - 1| + 3|y + 1| = 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Розглянемо третє рівняння останньої системи:

$5 + |y - 1| + 3|y + 1| = 1 \Leftrightarrow |y - 1| + 3|y + 1| = -4 \Leftrightarrow y \in \emptyset$,
оскільки сума невід'ємних чисел не може бути від'ємною. Отже, остання система рівнянь є несумісною, адже містить рівняння, яке не має змісту при жодному дійсному значенні y . Тоді в силу рівносильних перетворень отримаємо, що початкова система буде несумісною.

Відповідь: система несумісна.

3.7. Вправи для практичного і самостійного розв'язування

1. Розв'язати системи рівнянь:

$$\begin{aligned}
 \text{а)} & \begin{cases} 2x - 4y + 4z = 10, \\ -3x + 8y - 10z = -25, \\ 4x - 3y + z = 1; \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} 3x - 2y + z = 2, \\ x - 5y + 2z = -2, \\ 2x + 3y - 3z = 2; \end{cases} \\
 \text{в)} & \begin{cases} 2x + y + 3z = 13, \\ x + y + z = 6, \\ 3x + y + z = 8; \end{cases} & \text{г)} & \begin{cases} 3x + y + z = 8, \\ 4x - y + 2z = 8, \\ 2x + 2y - z = 3; \end{cases} \\
 \text{д)} & \begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 3x + y + 2z = 2, \\ 2x + 3y + z = 3; \end{cases} & \text{е)} & \begin{cases} x + 2y + 3z = 4, \\ 3x + y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Відповідь: а) $\{(-1; -1; 2)\}$; б) $\{(1; 1; 1)\}$; в) $\{(1; 2; 3)\}$; г) $\{(1; 2; 3)\}$;
д) $\left\{\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)\right\}$; е) $\left\{\left(1\frac{9}{11}; -1\frac{4}{17}; 1\frac{11}{17}\right)\right\}$.

2. Розв'язати системи рівнянь:

$$а) \begin{cases} 3x - y - z = 0, \\ 2x + y + 2z = 0, \\ 4x - 2y + 3z = 0; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} 3x + 2y + z = 0, \\ x + y + 3z = 0, \\ 2x + y + 3z = 0; \end{cases}$$

$$д) \begin{cases} x + 2y - 4z = 0, \\ 2x + 3y + 4z = 0, \\ 3x + 4y + 12z = 0; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 3x - y - z = 0, \\ 2x + y + 2z = 0, \\ 4x - 2y + 3z = 0; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} 2x - y - 2z = 0, \\ x + 3y - 4z = 0, \\ x + 2y + z = 0; \end{cases}$$

$$е) \begin{cases} 2x - y + 3z = 0, \\ 3x - 2y + z = 0, \\ -6x + 5y + 5z = 0; \end{cases}$$

Відповідь: а) $\{(0; 0; 0)\}$; б) $\{(0; 0; 0)\}$; в) $\{(0; 0; 0)\}$; г) $\{(0; 0; 0)\}$; д) система має безліч розв'язків виду $(-20t; 12t; t)$, де $t \in R$; е) система має безліч розв'язків виду $(-5t; -7t; t)$ де $t \in R$.

$$3. \text{ Розв'язати систему рівнянь: } \begin{cases} 5x - 3y + z = 3, \\ 4x + y - 5z = 4, \\ x - 4y + 6z = -1. \end{cases}$$

Відповідь: система має безліч розв'язків виду $\left(\frac{15+14t}{17}; \frac{8+29t}{17}; t\right)$, де $t \in R$.

$$4. \text{ Розв'язати системи рівнянь: а) } \begin{cases} 2x + y - z = 3, \\ 3x + 2y + z = 4, \\ 4x + 3y + 3z = 6; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x + 2 + 3z = 1, \\ 3x + y + 2z = 1, \\ 10x + 15y + 23z = 1; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x + 2z = 3, \\ 4x - 3y + 2z = 4, \\ 6x - y + 6z = 1. \end{cases}$$

Відповідь: а); б); в) – системи несумісні.

5. Розв'язати системи рівнянь:

$$а) \begin{cases} 4x + y + z = 2, \\ x + 4y + z = 5, \\ x + y + 4z = 11; \end{cases}$$

$$в) \begin{cases} x + y = 2, \\ y + z = 3, \\ x + z = 5; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} 7x + 2y + 2z = 3, \\ 2x + 7y + 2z = 5, \\ 2x + 2y + 7z = 10; \end{cases}$$

$$г) \begin{cases} x + y + z = 1, \\ y + z + t = 3, \\ x + z + t = 8; \\ x + y + t = 9. \end{cases}$$

Відповідь: а) $\left\{\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)\right\}$; б) $\left\{\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; 1\frac{1}{5}\right)\right\}$; в) $\{(2; 0; 3)\}$; г) $\{(-4; -1; -2; 8)\}$.

$$6. \text{ Скільки розв'язків має система рівнянь } \begin{cases} x + y = m, \\ x + z = n, \\ y + z = k. \end{cases}$$

Відповідь: система має єдиний розв'язок.

7. Розв'язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} x + y = p, \\ x + z = r, \\ y + z = q. \end{cases}$$

Відповідь: $\left\{\left(\frac{p-q+r}{2}; \frac{p+q-r}{2}; \frac{-p+q+r}{2}\right)\right\}$.

8. При яких значеннях параметра b система рівнянь
$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x - y + z = 5, \\ x + 2y + bz = 1 \end{cases}$$
 має хоча б один розв'язок?

9. Дослідити і розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + y + z = 1, \\ x - y + z = 3, \\ x + y + 2az = 1. \end{cases}$$

Відповідь: якщо $a \neq 0$, то система має єдиний розв'язок $\left(\frac{2a-1}{2a}; \frac{1-4a}{2a}; \frac{1}{a^2}\right)$; якщо $a = 0$, то система несумісна.

10. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} y - 2|x| + 3 = 0, \\ |y| + x - 3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3|x| + 5|y| = 13, \\ 2|x| + 3|y| = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} |x + y| + y = 1, \\ |x - y| + x = 7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} |x + 1| + |y - 4| = 2, \\ |x + 1| + 4 - y = 0. \end{cases}$

Відповідь: а) $\{(0; -3), (2; 1), (-6; 9)\}$, б) $\{(1; 2), (1; -2), (-1; 2), (-1; -2)\}$, в) $\{(3; -1), (-1; -9)\}$, г) $\{(-2; 5), (0; 5)\}$.

11. Дослідити і розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} y + |x| = a, \\ |y + 1| + x = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5|y| + |x| = a - 1, \\ 2|y + 1| + |x - 1| = 1 - a; \end{cases}$

в) $\begin{cases} a|x| - y = a, \\ |x| + ay = 1. \end{cases}$

Відповідь: а) якщо $a < 0$, то система несумісна, якщо $a = 0$, то система має безліч розв'язків виду $(t; t)$, де $t \in (-\infty; -1]$ і якщо $a > 0$, то система має один розв'язок $\left(\frac{a+2}{-2}; \frac{a-2}{2}\right)$; б) система несумісна якщо $a \in R$; в) $\{(1; 0), (-1; 0)\}$ якщо $a \in R$.

12. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 3y + 2x = 1, \\ |2x + 1| + |3y - 1| = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x + y = 3, \\ |2x + 1| + |y - 3| = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x + y = 3, \\ |3x + 1| + |y - 1| = 21; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ |x - 1| + |2y + 1| = 1. \end{cases}$

Відповідь: а) $\left\{\left(\frac{1}{2}; 0\right), (-1; 1)\right\}$; б) $\left\{\left(-\frac{3}{5}; 4\frac{4}{5}\right), \left(\frac{1}{5}; 2\frac{2}{5}\right)\right\}$;

в) $\left\{\left(3\frac{2}{3}; -8\right), \left(-3\frac{1}{3}; 13\right)\right\}$; г) система несумісна.

13. Розв'язати системи рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} x - y = 2, \\ |x + 3| + |y - 3| = 8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - 2y = -5, \\ \left| \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \right| + |y - 3| = 2. \end{cases}$$

Відповідь: а) система має безліч розв'язків виду $(2 + t; t)$, де $t \in [-5; 3]$; б) система має безліч розв'язків виду $(2t - 5; t)$, де $t \in [1; 3]$.

14. Розв'язати системи рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} |x - 1| + y + 2z = 1, \\ x - y + z = 0, \\ |x| + |y| + |z| = 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} |2x + 1| + y - z = 1, \\ |x| - y + z = -3, \\ 2|x| + |y| - |z| = 2. \end{cases}$$

Відповідь: а) $\left\{ \left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; 0 \right), \left(\frac{3}{2}; \frac{7}{6}; -\frac{1}{3} \right) \right\}$; б) система несумісна.

15. Розв'язати системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} x + y - z = 1, \\ x + 2y - 2z = 1, \\ |x - 3| + |y - 3| + |2z - 8| = 9; \end{cases} & \text{б) } & \begin{cases} x - 2y + z = 0, \\ x - y + 2z = 0, \\ |x| + |9y + 2| + |6z + 1| = 5; \end{cases} \\ \text{в) } & \begin{cases} x + y + 2z = 1, \\ x - y - z = 2, \\ |x - 1| + |2y - 1| + |z - 1| = 1; \end{cases} & \text{г) } & \begin{cases} x - y + 2z = 3, \\ x + y - z = 2, \\ |3x - 1| + |y - 1| + |3z + 1| = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Відповідь: а) $\left\{ \left(1; \frac{4}{3}; \frac{4}{3} \right), (1; 6; 6) \right\}$; б) $\left\{ \left(-1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3} \right), \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{9}; -\frac{2}{9} \right) \right\}$; в) система несумісна; г) система несумісна.

ТЕМА 4. ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ЗА РІВНЯМИ СТАНДАРТУ

Завдання обов'язкового рівня

Розв'язати системи рівнянь:

1. а) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$

А) (2; 3), Б) (0; 5), В) (-2; -3),
Г) інша відповідь;

2. а) $\begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 5x + 4y = 1; \end{cases}$

А) (2; 3), Б) (1; -1), В) (5; -4),
Г) $\emptyset$;

3. а) $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x - 8y = -2; \end{cases}$

А) (2; 3), Б) (2; 1), В) (-2; 0),
Г) інша відповідь;

4. а) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 15; \end{cases}$

А) (2; 15), Б) (-5; -3), В) (3; 5),
Г) (5; 3), (-3; -5);

5. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = -x; \end{cases}$

А) (-1; 1), (1; -1), Б) (1; -1),
В) (-1; -1), Г) (1; 1);

6. а) $\begin{cases} xy = 8, \\ \frac{x}{y} = 2; \end{cases}$

А) (4; 2), (-4; -2),
Б) (4; -2), (-4; 2),
В) інша відповідь;

7. а) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1, \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = -1; \end{cases}$

А) (-6; 8), Б) (6; 8), В) (6; -8),

8. а) $\begin{cases} y + 1 = x^2, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$

А) (2; 3), (-2; -3),
Б) (2; 3), (-2; 3),
В) інша відповідь;

б) $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2; \end{cases}$

А) $\emptyset$, Б) (-1; 2), В) (0; 3),
Г) (1; 2).

б) $\begin{cases} x + 2y = 7, \\ 2x - 3y = 5; \end{cases}$

А) $\emptyset$, Б) (1; 2), В) (2; -3),
Г) (5; 1).

б) $\begin{cases} 3x - 4y = -5, \\ 4x + 3y = 10; \end{cases}$

А) (1; 2), Б) (3; -4), В) (4; 3),
Г) інша відповідь.

б) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 8; \end{cases}$

А) (2; 8), Б) (-4; -2), В) (4; 2),
Г) (1; 2), (-2; -4).

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x; \end{cases}$

А) (-1; -1), (1; 1), Б) (1; -1),
В) (-1; 1), Г) (1; 1).

б) $\begin{cases} xy = 18, \\ \frac{x}{y} = 2; \end{cases}$

А) (6; -3), (-6; 3),
Б) (6; 3), (-6; -3),
В) інша відповідь.

б) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 6, \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 5; \end{cases}$

А) (8; 6), Б) (-8; 6), В) (8; -6).

б) $\begin{cases} x^2 - 4y = 1, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$

А) (3; 2), (-3; 2),
Б) (3; 2), (-3; -2),
В) інша відповідь.

$$9. a) \begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ x + y = 5; \end{cases}$$

А) (2; 3), Б) (3; 2),

В) інша відповідь;

$$б) \begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ x - y = 1; \end{cases}$$

А) (3; 2), Б) (2; 3),

В) інша відповідь.

$$10. a) \begin{cases} x^2 y^3 = 16, \\ x^3 y^2 = 2; \end{cases}$$

А) (0,5; 4), Б) (4; 0,5),

В) інша відповідь;

$$б) \begin{cases} x^3 y^2 = 4, \\ x^2 y^3 = 8; \end{cases}$$

А) (2; 1), Б) (1; 2),

В) інша відповідь.

Завдання підвищеного рівня

Розв'язати системи рівнянь:

$$1. a) \begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6, \\ x^2 y + y^2 x = 20; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30, \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35. \end{cases}$$

$$2. a) \begin{cases} x^2 - y^2 = 40, \\ xy = 21; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = 8. \end{cases}$$

$$3. a) \begin{cases} y^2 - xy = -12, \\ x^2 - xy = 28; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10. \end{cases}$$

$$4. a) \begin{cases} x^2 + y^4 = 5, \\ xy^2 = 2; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x^4 + y^2 = 17, \\ x^2 y = 4. \end{cases}$$

$$5. a) \begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ x - y = 2; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x^2 - y^2 = 20, \\ x + y = 10. \end{cases}$$

$$6. a) \begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} x^3 - y^3 = 19, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

$$7. a) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ x + y = 5; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

$$8. a) \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

$$9. a) \begin{cases} \sqrt{\frac{x+1}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{x+1}} = 2, \\ x + y = 12; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} \sqrt{\frac{x+1}{y+2}} + \sqrt{\frac{y+2}{x+1}} = 1,5, \\ x - y = 10. \end{cases}$$

Завдання поглибленого рівня

Розв'язати системи рівнянь:

$$1. \text{ а) } \begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11, \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2. \end{cases}$$

$$2. \text{ а) } \begin{cases} 2x^2 - 15xy + 4y^2 - 12x + 45y - 24 = 0, \\ x^2 + xy - 2y^2 - 3x + 3y = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 + 2xy - 8y^2 - 6x + 18y - 7 = 0, \\ 2x^2 - 5xy - 10y^2 - 3x + 9y + 7 = 0. \end{cases}$$

$$3. \text{ а) } \begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - y + z = 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ x^3 - y^3 + z^3 = 36. \end{cases}$$

$$4. \text{ а) } \begin{cases} x + y - \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{12}{x-y}, \\ xy = 15; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{12}{x+y}, \\ x^2 + y^2 = 41. \end{cases}$$

$$5. \text{ а) } \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = (x + y - z)^2 + 2, \\ x^3 + y^3 - z^3 = (x + y - z)^3 + 9, \\ x^4 + y^4 - z^4 = (x + y - z)^3 + 29; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^3 + 2x^2 + 2x = y, \\ y^3 + 2y^2 + 2y = z, \\ z^3 + 2z^2 + 2z = x. \end{cases}$$

6. Розв'язати системи рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} (m+5)x + (2m+3)y = 3m+2, \\ (3m+10)x + (5m+6)y = 4m+4 \end{cases} \text{ для всіх } m.$$

$$\text{б) } \begin{cases} (m-1)x + 2my = -2, \\ 2mx + (m-1)y = m-1 \end{cases} \text{ для всіх } m.$$

7. При яких значеннях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 - (2a+1)x + a^2 - 3 = y, \\ y^2 - (2a+1)x + a^2 - 3 = x \end{cases} \text{ має єдиний розв'язок?}$$

8. Знайти всі значення a , при кожному з яких система

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8, \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105} \end{cases} \text{ має хоча б один розв'язок.}$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бурда М. І., Мальований Ю. І., Дубинчук О. С. Математика. 10–11: підручник для шк., ліцеїв та гімназій гуман. профілю. Київ: Освіта, 2006. 287 с.
2. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія. 8 клас. Київ: Зодіак-Еко, 2008. 243 с.
3. Захарійченко Ю. О., Школьний О. В., Захарійченко Л. І. та ін. Повний курс математики в тестах. Харків: Видавництво «Ранок», 2011. 496 с.
4. Кушнір Л. Д. Математика. Рівень стандарту. 10 клас. Зошит для оцінювання результатів навчання. У 2-х ч. Харків: Видавництво «Ранок», 2018. 48 с.
5. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б. та ін. Математика: алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту: підручник для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2018. 256 с.
6. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗЫ (с решениями): в 2 кн. / В. К. Егеров [и др.]; ред. М. И. Сканава. М.: Высшая школа, 1994. 516 с.
7. Навчальні програми для 10–11 класів. URL: <https://mon.gov.ua>
8. Рівень стандарту / навчальна програма з математики для учнів 10–11 класів. URL: <https://mon.gov.ua>
9. Матеріали для підготовки до ЗНО та ДПА з математики. URL: <https://naurok.com.ua>
10. Тести ЗНО онлайн з математики 2007–2019 рр. URL: <https://zno.osvita.ua/mathematics>
11. Програма ЗНО з математики. URL: <https://znoclub.com>