МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВАСИЛЯ СТУСА
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ І ПРИКЛАДНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА КІБЕРБЕЗПЕКИ

О. М. Данильчук

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації для самостійної роботи
для здобувачів вищої освіти СО «Бакалавр»
спеціальностей E7 Математика, F5 Кібербезпека та захист інформації

Вінниця
2025

УДК 519.1(075.4)
Д 482

Затверджено на засіданні вченої ради факультету інформаційних і прикладних технологій ДонНУ імені Василя Стуса (протокол № 1(5) від 20 листопада 2024 р.)

Укладачі:

Оксана ДАНИЛЬЧУК, канд. пед. наук, доцент кафедри прикладної математики та кібербезпеки ДонНУ імені Василя Стуса.

Рецензенти:

Тарас ФУРМАН, канд. пед. наук, доцент кафедри маркетингу та бізнес-аналітики ДонНУ імені Василя Стуса;

Леся ВОТЯКОВА, канд. фіз-мат. наук, доцент кафедри алгебри і методики навчання математики ВДПУ імені Михайла Коцюбинського.

Д 482 Дискретна математика: методичні рекомендації для самостійної роботи для здобувачів вищої освіти ОС «Бакалавр» спеціальності E7 Математика, F5 Кібербезпека та захист інформації / уклад. О. М. Данильчук. Вінниця: ДонНУ імені Василя Стуса, 2025. 80 с.

Методичні рекомендації для курсу «Дискретна математика» призначені для самостійної роботи здобувачів спеціальністю E7 Математика, F5 Кібербезпека та захист інформації Методичні рекомендації розроблені відповідно навчального плану. Матеріали складаються з навчальної програми курсу, методичних рекомендацій з проведення практичних занять і завдань для самостійної роботи здобувачів, списку рекомендованої літератури. Методичні рекомендації містять теоретичну частину, велику кількість задач з розв’язанням та задач і для самостійної роботи.

УДК 519.1(075.4)

ЗМІСТ

ВСТУП

Методичні рекомендації створено для здобувачів, які вивчають базовий нормативний курс «Дискретна математика».

Останнім часом графи й пов’язані з ними методи досліджень використовують практично в усіх розділах сучасної математики, зокрема в дискретній математиці.

Граф – це математична модель найрізноманітніших об’єктів, явищ і процесів, досліджуваних і використовуваних у науці, техніці та на практиці. Коротко опишемо найвідоміші застосування теорії графів. Наприклад, у вигляді графу можна зображувати такі об’єкти:

- електричні та транспортні мережі;
- інформаційні й комп’ютерні мережі;
- карти автомобільних, залізничних і повітряних шляхів, газо- й нафтопроводів;
- моделі кристалів;
- структури молекул хімічних речовин;
- моделі ігор;
- різні математичні об’єкти (відношення, частково впорядковані множини, ґратки, автомати, ланцюги Маркова, алгоритми та програми);
- плани діяльності чи плани виконання певних робіт (розклади);
- генеалогічні дерева тощо.

Термін «граф» вперше з’явився в науковій літературі в 1936 р. в роботах угорського математика Д. Кьоніга, хоча елементи теорії графів були відомі та широко використовувались ще у XVIII ст., зокрема в роботах Л. Ейлера.

Незалежно від уподобань, з графами, мабуть, зустрічався кожен. Граф, як певну множину точок, деякі з яких з’єднані лініями, – це незвичний математичний об’єкт, який можна, без перебільшення, застосовувати в будь-якій науковій чи практичній галузі.

Незвичним у цій «геометрії» є майже все: в ній немає кутів, немає відстаней між точками у звичному розумінні цього слова, рівноправними є будь-які розташування точок на рисунку, не розрізняються лінії (прямі чи криві), що з’єднують точки, специфічними є операції, не схожі на арифметичні, алгебраїчні чи геометричні. Переваги – простота й наочність. Складність – вміння побачити можливість переформулювання умови задачі мовою графів – створення так званої графової моделі задачі. Розв’язавши задачу в межах теорії графів, результат необхідно інтерпретувати у вихідних термінах.

Методичні рекомендації створено для здобувачів вищої освіти, які вивчають базовий нормативний курс «Дискретна математика». У них викладено основи теорії графів, а також усі необхідні означення, формулювання та доведення теорем і багато задач. Методичні рекомендації призначено для самостійної роботи; їх можна використовувати і під час вивчення теоретичного курсу, і під час практичних занять з дискретної математики.

Під час підбору матеріалу ми обмежились лише найпростішими питаннями теорії графів. Вибираючи їх, ми ставили за мету:

- ознайомити читача з базовими поняттями теорії графів, формуючи запас необхідної для подальшого самостійного вивчення спеціальної математичної літератури;
- розглянути деякі конкретні задачі, які можуть бути розв'язані графовими методами;
- дати деяке уявлення про застосування графів, звертаючи увагу як на побудову математичної графової моделі, так і на характер досліджень, які можуть проводитися за допомогою графів.

Рекомендована література допоможе читачеві поглибити та розширити власну поінформованість із питань, що його зацікавили.

У методичних рекомендаціях наведено основні означення та факти, що сприяють полегшенню під час вивчення курсу «Дискретна математика». Цей матеріал може використовуватися і здобувачами інших спеціальностей під час вивчення логістики, прогнозування хімічних процесів, формування електричних мереж тощо.

ТЕМА 1
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ. РІЗНОВИДИ ГРАФІВ

1.1. Граф як модель.

1.1.1. Виникнення теорії графів – задача про кенігсберзькі мости. Історичні факти.

1.1.2. Неформальне поняття графу. Приклади графових моделей.

1.1.3. Формальне означення графу. Графи та бінарні відношення.

1.2. Вершини та ребра графів.

1.2.1. Суміжність вершин, інцидентність вершин та ребер, степінь вершини.

1.2.2. Деякі спеціальні види графів.

1.2.3. «Лема про рукостискання».

1.1. Граф як модель

1.1.1. Виникнення теорії графів – задача про кенігсберзькі мости. Історичні факти

Теорія графів відкривалася незалежно багато разів. Найперша згадка про неї зустрічається в роботах Ейлера, який у 1736 р. розв'язав задачу про кенігсберзькі мости.

У Кенігсберзі було два острови, з'єднані сімома мостами з берегами річки Прегель та один із одним (рис. 1.1а). Задача полягала в пошуку маршруту проходження всіх чотирьох частин суші, який мав починатися на довільній з них, закінчуватися на ній же і по одному разу проходити кожен міст. Проте всі спроби знайти маршрут були невдалими.

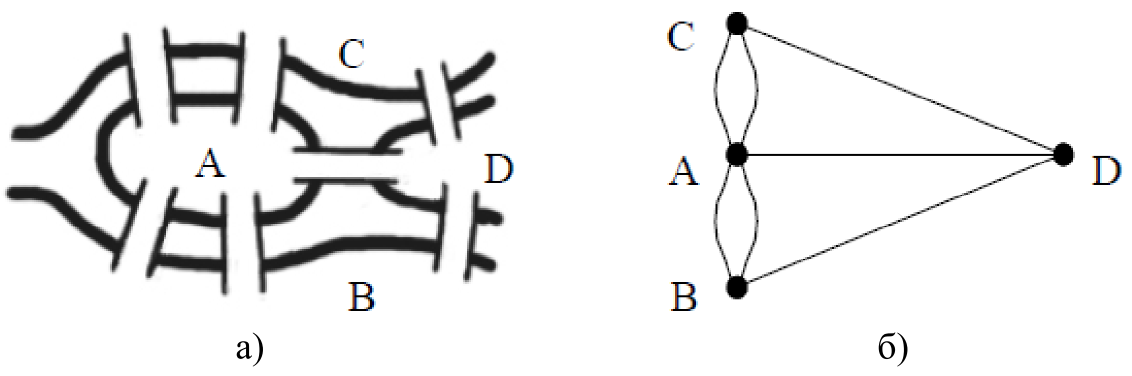


Рис. 1.1. Кенігсберзькі мости та граф

Щоб довести неможливість існування такого маршруту, Ейлер позначив кожну частину суші точкою *(вершиною,* або *вузлом)*, а кожен міст – лінією *(ребром),* що з'єднує відповідні точки, і одержав «граф» (рис. 1.1б). Твердження про неіснування маршруту рівносильно неможливості спеціальним способом обійти граф. З огляду на цей конкретний випадок Ейлер узагальнив постановку задачі та знайшов критерій існування обходу.

У сучасній українській навчально-методичній літературі можна виділити наступні елементи практичного застосування теорії графів:

- огляд класичних алгоритмів: пошук в ширину і пошук в глибину, пошук найкоротших шляхів та максимальних потоків тощо;
- розв'язування типових задач практичного характеру (про телекомунікаційні вежі, розфарбування мап, деякі логічні задачі, пов'язані із графічним зображенням відношень);
- визначення основних шляхів застосування графів (пошук зв'язних компонентів у комунікаційних мережах; пошук найкоротших та найдешевших шляхів у комунікаційних мережах; побудова кістякового дерева (зв'язність з найменшою можливою кількістю ребер);
- пошук максимального потоку для транспортної мережі, в якій визначено джерела, стоки та пропускні спроможності ребер; ізоморфізм графів (ідентичність структур молекул);
- знаходження циклів графів: гамільтонів цикл (задача комівояжера); ейлерів цикл (контроль дієздатності мережі); розфарбування графів (розфарбування географічних мап, укладання розкладів навчання, розміщення ресурсів тощо);
- планарність графів (проєктування друкованих електронних та електричних схем, транспортних розв'язок тощо); знаходження центрів графу (вершин, максимальна відстань від яких до всіх інших вершин графу є мінімальною).

Теорію графів широко застосовують у логістиці. Інтелектуальні транспортні системи можуть працювати, збираючи дані про місцезнаходження від навігаторів автомобілів, і передавати інформацію водіям, де і як швидко їздити, щоб зменшити загальне перевантаження. Теорія графів вже використовується авіакомпаніями, які хочуть з'єднати велику кількість міст найефективнішим способом, створити систему переміщення великої кількості пасажирів з найменшою кількістю можливих поїздок. Ця проблема схожа за своєю суттю на задачу про комівояжера. Водночас авіадиспетчери повинні переконатися, що сотні літаків знаходяться в потрібному місці в потрібний час, і запобігти можливим аваріям. Вирішення цього завдання було б неможливим без комп'ютерів і теорії графів. Одна з галузей, де швидкість і кращі сполучення мають вирішальне значення, – це розробка комп'ютерних чипів. Інтегральні схеми складаються з мільйонів транзисторів. Для поліпшення продуктивності чипа необхідно оптимізувати значну кількість зв'язків.

Спільні властивості мають моделі, пов'язані з визначенням головної вершини, які використовуються у воєнній справі, під час визначення структур кримінальних мереж, для знаходження осередку зараження. Ілюстративним прикладом застосування теорії графів у реальному житті є статистична робота Н. Левенкової.

Авторка застосувала теорію графів до двох проблем, пов'язаних із реальними мережами. Перша проблема полягала в моделюванні мережі сексуальних контактів, а друга включала в себе кримінальні мережі. Структура базової мережі сексуальних контактів важлива для дослідження інфекцій, що передаються статевим шляхом. У роботі була створена просторова динамічна модель мережі на основі емпіричних даних, та математично доведена рівноцінність заходів, які стосуються окремих параметрів моделі. Дослідження ринків наркотиків і злочинних синдикатів груп, які працюють всередині них, важливе, щоб боротися з ними найбільш ефективними способами. Було досліджено ефективність чотирьох різних стратегій втручання, метою яких була ліквідація злочинних мереж: заходи щодо особистості, що ґрунтуються на високому рівні діяльності; заходи щодо особистості, засновані на ролях; втручання, що поєднує перші дві стратегії; і випадкове втручання. Результати дослідження показали, що найбільш ефективна – стратегія щодо осіб з урахуванням високого рівня і ролі в мережах.

Останніми роками спостерігається ще одне важливе застосування теорії графів – інтернет. Графи використовують для ефективної реклами. Аналізуючи контакти людей, їх вподобання, друзів, вподобання друзів, сторінки, які вони «репостять» у комп'ютерних соціальних мережах (Facebook, Instagram, Twitter тощо), можна орієнтувати свою рекламу доволі ефективно. Цікавим є факт, що дві навмання обрані сторінки у соціальній мережі Facebook можна з'єднати ланцюгом довжиною 12 ребер. Подібна теорія існувала і у соціологічних дослідженнях XX ст., в якій стверджувалось, що між будь-якими двома людьми планети можна створити ланцюг зі знайомих, що містить тільки 6 осіб. Різниця в числових значеннях може бути пов'язана з тим, що соціальні мережі не охоплюють все людство без винятків, не встановлюють всі можливі родинні, соціальні, професійні зв'язки.

Пізніше елементи теорії графів з'явилися у природничих науках, як-от географія, фізика, хімія, електротехніка. Загалом графи застосовні в усіх галузях, де є елементи й зв'язки між ними, тому теорія графів є актуальним прикладним розділом математики.

1.1.2. Неформальне поняття графу. Приклади графових моделей

Неформально граф має вигляд *діаграми,* тобто множини точок площини (*вершин,* або *вузлів*), з'єднаних між собою лініями *(ребрами).* Діаграма дає уявлення про зв'язки між елементами (вершинами), але нічого не вказує про метричні властивості (довжина ліній, їх форма тощо).

Залежно від типу ребер розрізняють кілька типів графів. *Петля –* це ребро, що з'єднує вершину саму з собою. У *мультиграфі* петлі не допускаються, але пари вершин можуть з'єднуватися кількома ребрами, які називаються *кратними,* або *паралельними.* У *псевдографі* допускаються петлі й кратні ребра. У *звичайному* *графі* немає ні петель, ні кратних ребер (рис. 1.2). У задачі про кенігсберзькі мости з'явився мультиграф.

За допомогою графів подаються структурні залежності між елементами, наприклад, в електричній схемі, в молекулі, складеній з атомів, або у схемі міського транспорту. Для побудови графу, відповідного транспортній схемі, вершинами можна подати зупинки, а ребрами – ділянки маршрутів між зупинками. Схему доріг міста можна представити у вигляді мультиграфу, вершини якого відповідають перехрестям, а ребра – вулицям. Існують вулиці з одностороннім рухом, тому задається напрям руху по них (стрілки на рис. 1.2). Відповідний граф називається *орієнтованим,* або *орграфом,* а його орієнтовані ребра – *дугами.* Граф, що має орієнтовані та неорієнтовані ребра одночасно, називається *змішаним.*

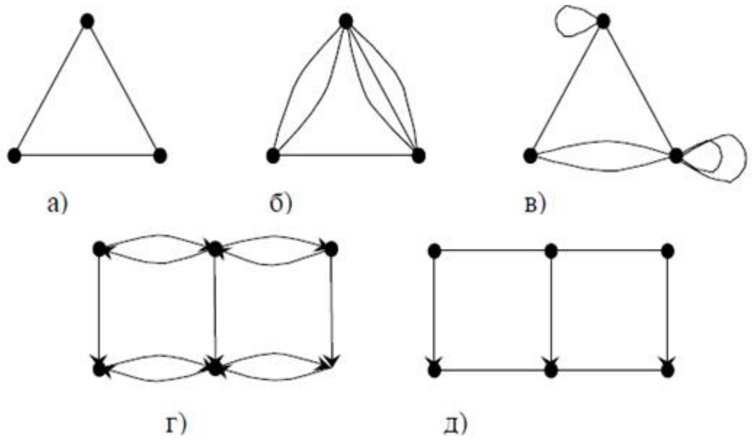


Рис. 1.2. Приклади графів різних типів:
а) граф, б) мультиграф, в) псевдограф, г) орграф, д) змішаний граф

Розглянемо турнір між чотирма футбольними командами, в якому кожні дві зіграли між собою не більше одного матчу. Представимо турнір графом, вершинами якого є команди. Якщо дві команди зіграли між собою матч, з'єднаємо відповідні вершини ребром. Ситуації, у якій кожні дві команди зіграли між собою, відповідає граф на рис. 1.3*а*.

Представимо графом знайомства між здобувачами. Кожного здобувача представимо вершиною графу, а ребрами з'єднаємо пари вершин, відповідних парам знайомих між собою (рис. 1.3*б*).

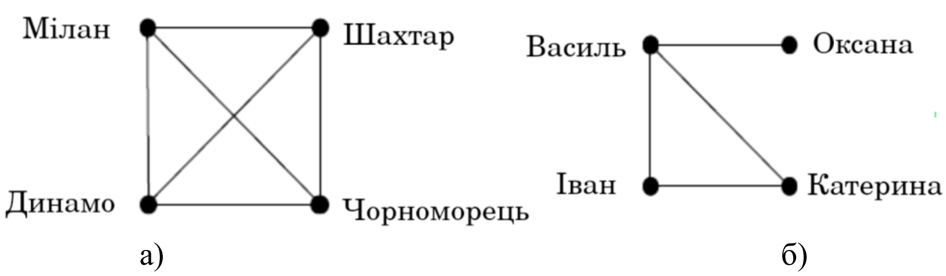


Рис. 1.3. Графи для турніру та знайомств

1.1.3. Формальне означення графу. Графи та бінарні відношення

Нехай V – непорожня скінченна множина, а $V_{(2)}$ – множина всіх двоелементних підмножин множини V. Нехай E – довільна підмножина $V_{(2)}$. Пара $(V,\ E)$ називається *графом (неорієнтованим графом),* елементи множини V – *вершинами,* або *вузлами,* а елементи множини E – *ребрами.* Незважаючи на те, що кожне ребро $e \in E$ являє собою двоелементну множину $e = \{v, w\}$, в теорії графів його позначають (v, w) і називають *неупорядкованою парою* вершин.

Розглянемо переходи між діаграмами (без кратних ребер і петель) та графами в їх формальному поданні. Кожній вершині діаграми відповідає вершина графу, а кожній парі вершин, з'єднаних ребром – ребро графу (неупорядкована пара). Отже, діаграмі на рис 1.3*б* відповідає формальний об'єкт (V, E), де $V = \{\text{Василь}, \text{Іван}, \text{Оксана}, \text{Катерина}\}, E = \{(\text{Василь}, \text{Іван}),\ (\text{Василь}, \text{Оксана}),$ $(\text{Василь}, \text{Катерина}), (\text{Іван}, \text{Катерина})\}$. Аналогічно для переходу від формального подання графу до діаграми треба точками зобразити вершини та з'єднати лініями всі пари точок, відповідних ребрам графу.

Якщо E є підмножиною $V \times V$, причому в E немає пар вигляду (v, v), тобто петель, то (V, E) називається *орієнтованим графом,* або *орграфом.* Елементи множини V називають *вершинами (вузлами),* а елементи E – *орієнтованими ребрами,* або *дугами.* Дуги (v, w) і (w, v) орграфу називають *симетричними.* Орграф без пар симетричних дуг називають *направленим.* Кожну пару симетричних дуг між різними вершинами v та w можна розглядати як одне неорієнтоване ребро $\{v, w\}$.

Ребра та дуги мультиграфу не можна вважати двоелементними підмножинами множини вершин або їх парами. Один спосіб формального подання мультиграфу ґрунтується на тому, що його ребра – це абстрактні елементи, і мультиграф є трійкою вигляду $(V,\ E,\ f)$, де f відображає E у $V_{(2)}$ (або у $V \times V$), тобто задає інцидентність вершин та ребер (дуг). За іншим способом мультиграф є парою $(V,\ E)$, але ребра графу є трійками вигляду $(\{u, v\}, k)$, де k – номер, причому різні паралельні ребра мають різні номери. Аналогічно означаються й дуги в орієнтованих мультиграфах.

Довільне бінарне відношення R на множині V можна подати у вигляді орієнтованого графу $(V,\ E)$, де дуга $(v,\ w)$ належить множині ребер E тоді й тільки тоді, коли vRw, тобто $E = R$. І навпаки, кожен орієнтований граф визначає бінарне відношення на множині вершин.

Умова симетричності відношення означає, що для кожної дуги є симетрична. Умова антисиметричності – що граф не має симетричних дуг, тобто є направленим. Рефлексивність відношення гарантує, що з кожної вершини графу виходить петля. Отже, якщо відношення є симетричним та антирефлексивним, то для його подання достатньо неорієнтованого графу. І навпаки, неорієнтований граф визначає симетричне й антирефлексивне відношення.

1.2. Вершини та ребра графів

1.2.1. Суміжність вершин, інцидентність вершин та ребер, степінь вершини

Нехай $G = (V,\ E)$ – граф, $e \in E$ – ребро. Кажуть, що ребро $e = (v,\ w)$ *з'єднує* вершини v і w, які є його кінцями. Вершини v і w називаються *суміжними;* кожна з них є *інцидентною* ребру e. Два різні ребра, інцидентні одній і тій самій вершині, називаються *суміжними.*

Степенем вершини v у графі G називається кількість ребер, інцидентних v, і позначається $\delta(v)$. Множину вершин, суміжних з вершиною v, позначають $O(v)$. Очевидно, що $|O(v)| = \delta(v)$.

У графі з n вершинами степінь вершини може мати значення від 0 до $n-1$. Вершина степеня 0 називається *ізольованою* (вона не має інцидентних ребер та суміжних вершин), а степеня 1 – *кінцевою,* або *висячою* (має тільки одне інцидентне ребро). Якщо вершина має степінь $n-1$, то вона суміжна з усіма іншими вершинами, й у графі немає ізольованих вершин. Аналогічно, якщо в графі є ізольована вершина, то немає вершини степеня $n-1$ (суміжної з усіма іншими). Отже, справджується вказане нижче твердження.

Теорема 1.1. У будь-якому графі з n вершинами одночасно не можуть існувати вершини степенів 0 і $n-1$.

Теорема 1.2. У будь-якому графі з n вершинами $(n \geq 2)$ є принаймні дві вершини з однаковими степенями.

Доведення: Степені вершин можуть бути цілими значеннями від 0 до $n-1$. Але за теоремою 1.1 вершини степенів 0 і $n-1$ у графі одночасно існувати не можуть, тобто степенями вершин графу можуть бути лише $n-1$ різних чисел. Але вершин n, тому за принципом Діріхле обов'язково є принаймні дві вершини з однаковими степенями. ■

Задача Рамсея. Довести, що серед довільних шести осіб знайдуться або троє попарно знайомих або троє попарно незнайомих.

Доведення: Переклавши задачу на мову теорії графів, одержимо твердження: у довільному графі $G = (V,\ E)$ з шістьма вершинами існує три вершини, які є або попарно суміжними або попарно несуміжними.

Візьмемо довільну вершину $v \in V$ та відносно неї розділимо решту вершин на дві множини, що не перетинаються: $V_1 = \{w | w \epsilon V \wedge (v, w) \in E\}$ – множина вершин, суміжних із v, і $V_2 = \{w | w \epsilon V \wedge (v, w) \notin E\}$ – несуміжних. $V = V_1 \cup V_2 \cup \{v\}, V_1 \cap V_2 = \emptyset, |V| = 6$, тому $|V_1| + |V_2| = 5$, і хоча б одна з цих множин містить принаймні три вершини.

Перший випадок: $|V_1| \geq 3$. Якщо у множині V_1 є дві суміжні вершини, то разом з v вони утворюють три попарно суміжні вершини. Якщо жодні дві вершини не суміжні, то множина V_1 містить три попарно несуміжні вершини (рис. 1.4).

Другий випадок: $|V_2| \geq 3$. Якщо у множині V_2 є дві несуміжні вершини, то разом з v вони утворюють три попарно несуміжні вершини. Якщо кожні дві вершини суміжні, то множина V_2 містить три попарно суміжні вершини (рис. 1.4).

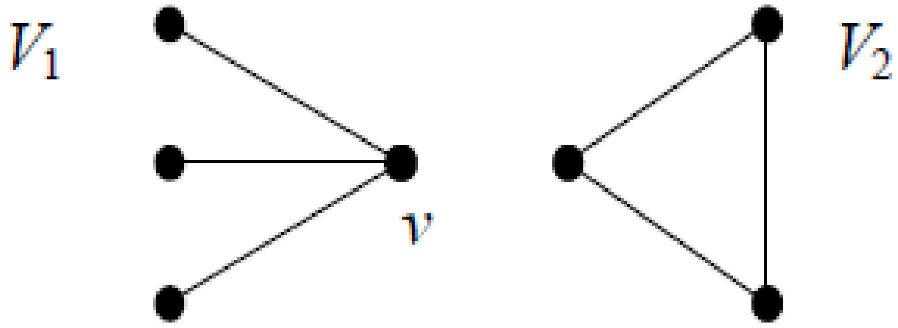


Рис. 1.4. Попарно несуміжні й попарно суміжні вершини

В обох випадках існує три вершини, що задовольняють умову задачі.

Задачі

1.1. Кілька осіб (більше двох) проводять шаховий турнір в одне коло. У деякий момент виявилося, що тільки двоє шахістів зіграли однакову кількість партій. Довести, що тоді є або тільки один учасник, який не зіграв жодної партії, або тільки один, який зіграв усі партії.

1.2. Довести, що для довільного $n \geq 3$ існує граф із n вершинами, в якому $n-1$ – вершина мають попарно різні степені, причому ізольованих вершин немає.

1.2.2. Деякі спеціальні види графів

Розглянемо графи з деякими структурними особливостями. *Порожнім* називається граф з порожньою множиною ребер, *тривіальним* – з однією вершиною й без ребер. Протилежними до таких графів є повні. Граф, у якому кожна вершина суміжна з усіма іншими, називається *повним.* Повний граф з n вершинами позначається K_n; кожна його вершина має степінь $n-1$ (рис. 1.5). Якщо граф $G = (V, E)$ є повним, то за означенням $E = V_2$.

Граф, усі вершини якого мають степінь r, називається *регулярним (однорідним)* степеня r. Регулярні графи степеня 0, 1 та 2 за своїми структурними властивостями є досить простими. Перші цікаві регулярні графи мають степінь 3; вони називаються *кубічними.*

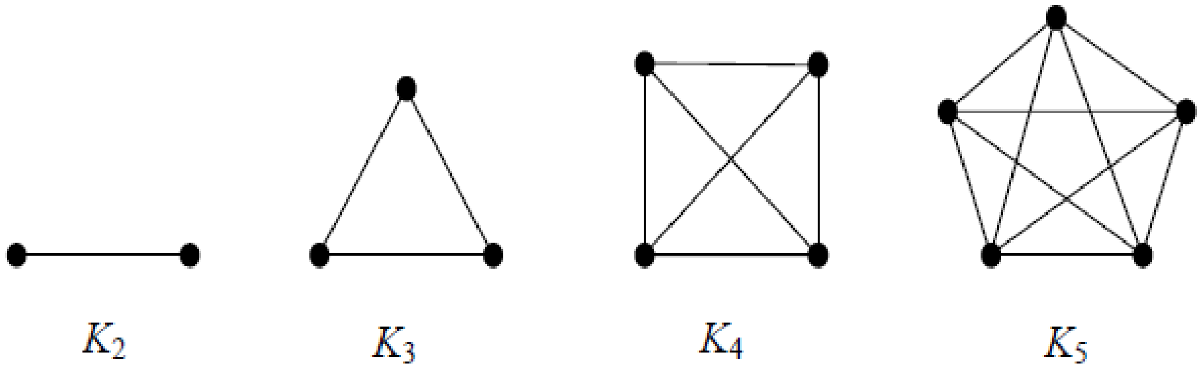


Рис. 1.5. Приклади повних графів

Окремий клас графів утворюють двочасткові графи. Граф $G = (V,\ E)$ називається *двочастковим,* якщо множину його вершин V можна так розбити на дві підмножини V_1 і V_2 *(частки),* що кожне ребро графу з'єднує вершини з різних часток, тобто $E =\subseteq V_{(2)}(V_{1(2)} \cup V_{2(2)}$. Двочастковий граф називається повним двочастковим, якщо будь-які дві вершини з різних часток суміжні. Якщо частки повного двочасткового графу мають n і m вершин відповідно, він позначається $K_{n,m}$. Повний двочастковий граф $K_{1,n}$ називається *зірковим* графом, або зіркою (рис. 1.6).

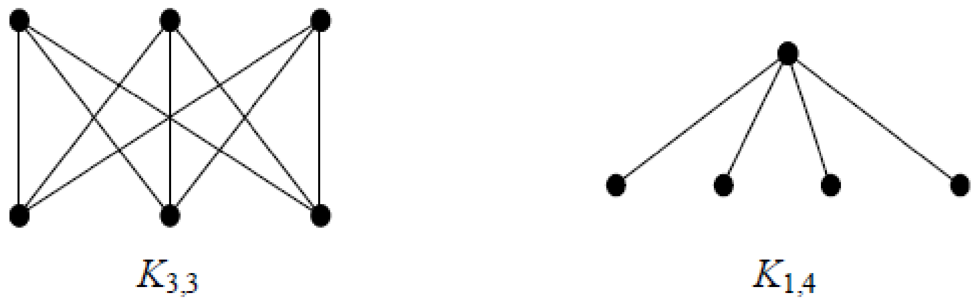


Рис. 1.6. Приклади повного двочасткового та зіркового графів

Повний двочастковий граф $K_{3,3}$ є моделлю задачі про «три будинки та три колодязі». Три сусіди, які посварилися, спільно користуються трьома колодязями. Чи можна провести доріжки від кожного будинку до кожного колодязя так, щоб доріжки не перетиналися, тобто сусіди не зустрічалися на шляхах до колодязів? Відповідь на це питання буде дано пізніше.

Двочасткові графи виникають у багатьох відомих задачах. Наприклад, у задачі про одруження є множина юнаків, і кожен з них знайомий з кількома дівчатами. Питання в тому, чи може кожен юнак одружитися зі знайомою йому дівчиною. Ця задача (звичайно, в іншій формі) відіграє важливу роль у вивченні потоків у мережах.

Графи можна задавати за допомогою матриць.

Занумеруємо всі вершини графу G натуральними числами від 1 до n. *Матрицею суміжності* A графу G називається квадратна $n \times n$ – матриця, в якій елемент a_{ij} i-го рядка та j-го стовпчика дорівнює 1, якщо вершини x_i та x_j з номерами i та j суміжні, і дорівнюють 0 – якщо ні. Занумеруємо всі вершини графу G натуральними числами від 1 до n і всі його ребра числами від 1 до m. Матрицею інцидентності B графу G називається $n \times m-$ матриця, в якій елемент b_{ij} i-го рядка і j-го стовпчика дорівнює 1, якщо вершина x_i з номером i інцидентна ребру w_j з номером j, і дорівнює 0 в протилежному випадку. Отже,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, (x_i, x_j) \in W, \\ 0, (x_i, x_j) \notin W, \end{cases} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1, x_i \in W_j, \\ 0, x_i \notin W_j. \end{cases}$$

1.2.3. «Лема про рукостискання»

У довільному графі кожне ребро інцидентне рівно двом вершинам, тому до суми степенів вершин графу кожне ребро додає двійку. Отже, справджується твердження, яке було встановлене Ейлером і є історично першою теоремою теорії графів.

Теорема 1.3. Сума степенів вершин графу $G = (V,\ E)$ дорівнює подвоєній кількості його ребер: $\sum_{v \epsilon V} \delta(v) = 2|E|$.

Цю теорему інколи називають «лемою про рукостискання». Вершини графу подають людей, а ребра – рукостискання, якими люди обмінялися під час зустрічі. Оскільки кожне рукостискання має дві дійові особи, число потиснутих рук удвічі більше від кількості рукостискань. Але число потиснутих рук – це сума степенів вершин графу, а кількість рукостискань – це кількість ребер.

Висновок 1.1. Повний граф з n вершинами має $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер.

■ Дійсно, степінь кожної з n вершин дорівнює $n-1$, тому за теоремою 1.3 маємо $2|E| = \sum_{v \epsilon V} \delta(v) = n(n-1)$, звідси кількість ребер дорівнює $\frac{n(n-1)}{2}$.

Висновок 1.2. У довільному графі сума степенів вершин парна.

Висновок 1.3. У будь-якому графі кількість вершин, степінь яких непарний, парна.

Нехай дано граф $G = (V,\ E)$. Множину вершин графу V можна розбити на дві підмножини, що не перетинаються: множина вершин парного степеня V_n та множина вершин непарного степеня $V_н$; $V_n \cup V_н = V, V_n \cup V_н = \emptyset$. Тоді:

$$2|E| = \sum_{v \epsilon V} \delta(v) = \sum_{v \epsilon V_н} \delta(v) + \sum_{v \epsilon V_n} \delta(v),$$

звідси $\sum_{v \epsilon V_н} \delta(v) = 2|E| - \sum_{v \epsilon V_n} \delta(v)$. Сума степенів вершин з множини V_n завжди парна, оскільки її складають вершини парного степеня. Тоді сума степенів вершин з непарними степенями парна як різниця двох парних чисел. Але якщо сума непарних чисел є парною, то вона має парну кількість доданків, тобто кількість вершин непарного степеня парна. ■

Задачі

1.3. За яких натуральних n і m існує кубічний граф з n вершинами і m ребрами?

Для існування вершин степеня 3 граф повинен мати принаймні 4 вершини, тому $n \geq 4$. У кубічному графі кожна вершина має степінь 3 – непарне число. Число вершин непарного степеня повинно бути парним, тому n парне, $n = 2k$ при деякому натуральному k. Обчислимо кількість ребер. За теоремою 1.3 маємо $2m = 3n$, звідси $m = 3k$. Отже, необхідними умовами існування кубічного графу з n вершинами та m ребрами є $n = 2k$ та $m = 3k$ при деякому натуральному $k \geq 2$.

Увага! Щоб стверджувати, що при $n = 2k$ та $m = 3k$ $(k \in N, k \geq 2)$ існує кубічний граф з n вершинами і m ребрами, необхідно довести його існування. Зробимо це.

Розташуємо вершини по колу в кутах правильного $2k$-кутника й проведемо всі ребра між сусідніми вершинами та діаметри, що виходять з вершин. Очевидно, що це можна зробити при $k \geq 2$. Під час цього одержимо кубічний граф з $2k$ вершинами та $3k$ ребрами. Цій діаграмі відповідає формальний граф (V, E) з множиною вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{2k}\}$ та множиною ребер $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{2k-1}, v_{2k}), (v_{2k}, v_1)\} \cup \{(v_1, v_{k+1}), \dots, (v_k, v_{k2})\}$.

Відповідь. Кубічний граф з n вершинами та m ребрами існує тоді й тільки тоді, коли $n = 2k$ і $m = 3k$ при деякому натуральному $k \geq 2$.

Задачі

1.4. Чи існує повний граф, кількість ребер якого дорівнює:

а) 15; б) 18;

в) 199...900...0 (n дев'яток і n нулів); г) $8k_2 + 2k, k \in N$?

1.5. Нехай у графі G з n вершинами і m ребрами є p вершин степеня t, а решта вершин мають степінь $t + 1$. Довести, що $p = (t + 1)n - 2m$.

1.6. 29 команд проводять футбольний турнір в одне коло. Довести, що в будь-який момент знайдеться команда, яка зіграла парну кількість матчів.

1.7. Чи існує граф із n вершинами, усі вершини якого є кінцевими, якщо:

а) $n = 2k - 1$ $(k \in N)$; б) $n = 2k$ $(k \in N)$?

1.8. Чи можна з повного графу K_{17} вилучити деякі ребра так, щоб степінь кожної вершини дорівнював:

а) 15; б) 2; в) 1?

1.9. У товаристві з n осіб кожен знайомий з k і тільки k іншими особами. Чи можливе таке товариство при:

а) $n = 5, k = 2$; в) $n = 2m, k = 1$;

б) $n = 5, k = 3$; г) $n = 2m, k = 3$?

1.10. Чи існує кубічний граф із n вершинами, якщо:

а) $n = 100$; в) $n = 102$;

б) $n = 101$; г) $n = 2k - 1$;

д) $n = 2k$?

1.11. Побудуйте граф із п’ятьма вершинами, в якому тільки дві вершини мають однакові степені.

1.12. У графі з п’ятьма вершинами тільки дві вершини мають однакові степені. Чи можуть обидві ці вершини мати степінь 0 або степінь 4?

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

1. Охарактеризувати відношення, відповідні орієнтованим графам без петель.
2. Які різновиди графів ви знаєте?
3. Скільки ребер містить повний граф з n вершинами?
4. Скільки вершин може мати граф, усі вершини якого є кінцевими? Скільки ребер у такому графі?
5. Чому дорівнює степінь кожної вершини у повному графі з n вершинами?
6. Сформулювати означення неорієнтовного графу.
7. Неформально охарактеризувати графи, відповідні транзитивним відношенням.
8. Що можна сказати про рефлексивно-транзитивне замикання відношення, відповідного ациклічному направленому графу? Чи можна стверджувати, що направлені графи відповідають відношенням часткового порядку?
9. Сформулювати лему про «рукостискання».

ТЕМА 2
ОПЕРАЦІЇ НАД ГРАФАМИ

2.1. Основні поняття

Якщо для двох графів $G = (V,\ E)$ і $G' = (V',\ E')$ виконуються включення $V' \subseteq V$ і $E' \subseteq E$, то граф G' називається *підграфом* графу G; це позначається $G' \subseteq G$. Граф G у цьому випадку називається *надграфом* графу G'. Якщо $G' \subseteq G$ і $V' = V$, то G' називається *суграфом* графу G. Якщо $V_0 \subseteq V$, то граф $G(V_0) = (V_0, E \cap V_{0(2)})$ називається *підграфом* графу G, *визначеним множиною вершин* V_0.

Означення 2.1. Послідовність ребер (x_{i_1}, x_{i_2}), $(x_{i_2}, x_{i_3}), \dots, \left(x_{i_{i-2}}, x_{i_{j-1}}\right)$, $\left(x_{i_{j-1}}, x_{i_j}\right)$, в якій сусідні ребра інцидентні одній і тій же вершині, називають *ланцюгом.* Ланцюг називається *простим,* якщо всі вершини, що належать йому (крім, можливо, першої і останньої), різні; число ребер у цьому випадку називають *довжиною* ланцюга.

Якщо $x_{i_1} = x_{i_j}$, то ланцюг називається *циклом.* Цикл, у якому всі вершини різні, називається *простим.*

2.2. Визначення основних операцій над графами

2.2.1. Операція вилучення ребра. Операція вилучення вершини.

Для графів означаються дві специфічні операції – *вилучення ребра* та *вилучення вершини.*

Означення 2.6. *Операція вилучення вершини* v із графу $G(V,\ E)$ полягає у вилученні з множини V елементу v, а з множини E – усіх ребер, інцидентних v.

Операція вилучення ребра e з графу $G(V,\ E)$ полягає у вилученні елементу e з множини E. Під час цього всі вершини зберігаються.

Нехай дано граф $G(V,\ E), v \in V, e \in E$. Результатом застосування операції вилучення ребра e до графу G є граф $G - e = (V, E\backslash\{e\})$. Результатом застосування операції вилучення вершини v до графу G є граф $G - v = (V\backslash\{v\}, E \cap (V\{v\})_{(2)})$, тобто з G вилучається вершина v та всі інцидентні їй ребра.

Теорема 2.1. Кожен граф є прямою сумою зв'язних графів.

Ці графи називаються *компонентами зв'язності.*

Теорема 2.2. Нехай $G(V, E)$ – граф, який складається з n вершин, m ребер і k компонент зв'язності. Тоді виконуються нерівність:

$$n - k \leq m \leq C_{n-k+1}^2.$$

Наслідок 1.1. Будь-який граф з n вершинами і більше ніж $C_{n-1}^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ребрами є зв'язним.

2.2.2. Операція введення ребра. Операція введення вершини в ребро (самостійно опрацювати).

2.2.3. Операція об'єднання та різниці графів.

Означення 2.2. *Об'єднанням* (*сумою*) $G_1 \cup G_2$ графів $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ називається граф із множиною вершин $V_1 \cup V_2$ і множиною ребер $E_1 \cup E_2$, $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$. Об'єднання $G_1 \cup G_2$ називається *прямою сумою* графів G_1 і G_2, якщо множини вершин V_1 і V_2 не перетинаються.

Означення 2.3. Для графів $G_1 = (V, E_1)$ і $G_2 = (V, E_2)$ аналогічно означається їх *перетин* $G_1 \cap G_2 = (V, E_1 \cap E_2)$ та *різниця* $G_1 \backslash G_2 = (V, E_1 \backslash E_2)$.

2.2.4. Операція доповнення графа

Означення 2.4. *Доповненням* графу $G(V,\ E)$ називається граф $\bar{G} = (V,\ E_2 \backslash)$; отже, граф $\bar{G}$ має ту саму множину вершин V, що й граф G, а будь-які дві вершини графу $\bar{G}$ суміжні тоді і тільки тоді, коли вони несуміжні в G.

Означення 2.5. Граф $G(V,\ E)$ називається *двочастковим,* якщо існує таке розбиття множини його вершин V на дві підмножини (частки) V_1 і V_2, що кінці будь-якого ребра графу G належать різним часткам.

Двочастковий граф називається *повним двочастковим* графом, якщо будь-які дві його вершини, що належать різним часткам, є суміжними. Повний двочастковий граф, частки якого V_1 і V_2 складаються з n і m вершин відповідно, позначається $K_{n,m}$.

Задачі

2.1. Якщо $G = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3)\})$, то $G - (v_1, v_2) = (\{v_1, v_2, v_3\}, \{(v_1, v_3), (v_2, v_3)\})$, а $G - v_1 = (\{v_2, v_3\}, \{(v_2, v_3)\})$.

Доповненням графу $G(V, E)$ називається граф $G\big(V, V_{(2)} \backslash E\big)$.

Теорема 2.3. Доповненням графу G є граф G.

Доведення. Нехай $G(V,E)$, тоді $G\big(V,V_{(2)}\backslash E\big)$ і $G\big(V,V_{(2)}(V_{(2)}\backslash E)\big) =$ $= (V,E) = G$. ∎

Теорема 2.4. При довільному графі G об’єднання $G \cup G$ є повним графом.

Доведення. Нехай $G(V,E)$, тоді $G\big(V,V_{(2)}\backslash E\big)$ і $G \cup G = \big(V, E \cup (V_{(2)}\backslash E)\big) =$ $= \big(V, V_{(2)}\big)$. ∎

Теорема 2.5. Якщо в графі G з n вершинами степінь вершини дорівнює k, то в доповненні G його степінь $n-k-1$.

Доведення. Якщо в графі $G(V,E)$ вершина v має степінь k, то у неї є рівно k суміжних вершин $v_1, v_2, \dots, v_k, (v, v_i) \in E, 1 \le i \le k$. Інші $n-k-1$ вершин $w_1, w_2, \dots, w_{n-k-1}$ несуміжні з нею в G, тобто $(v, w_i) \notin E, 1 \le i \le n-k-1$. Тоді $(v, v_i) \notin V_{(2)}\backslash E, 1 \le i \le k$, і $(v, w_i) \in V_{(2)}\backslash E$, $1 \le i \le n-k-1$. А це означає, що степінь вершини v у доповненні дорівнює $n-k-1$. ∎

Задачі

2.2. Довести, шо доповнення кубічного графу не є кубічним графом.

2.3. Чому дорівнює степінь вершини v у графі $\bar{G}$, якщо в графі G з n вершинами:

а) $\delta(v) = 1$; б) $\delta(v) = n-1$; в) $\delta(v) = 0$; г) $\delta(v) = k$?

2.4. Довести, що в будь-якому графі з n вершинами $(n \ge 2)$ завжди знайдуться принаймні дві вершини з однаковими степенями.

2.5. Побудувати кубічний граф із:

а) чотирма вершинами; б) шістьма вершинами;

в) вісьмома вершинами.

2.6. Чи існує кубічний граф із n вершинами, якщо:

а) $n = 100$; б) $n = 101$; в) $n = 102$; г) $n = 2k-1$; д) $n = 2k$?

2.7. Чи існує граф з n вершинами, усі вершини якого є кінцевими, якщо:

а) $n = 10$; б) $n = 11$; в) $n = 2k-1$; г) $n = 2k$?

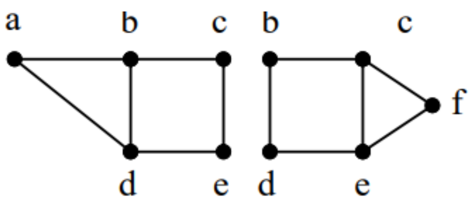
2.8. Довести, що у будь-якому графі кількість вершин, степінь яких непарний, є парною.

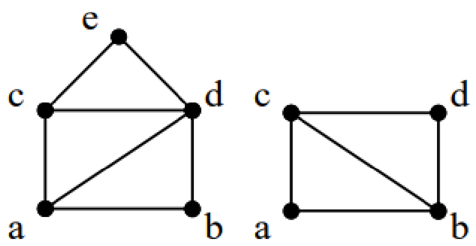
2.9. Довести, що для довільного графу G об’єднання $G \cup \bar{G}$ є повним графом.

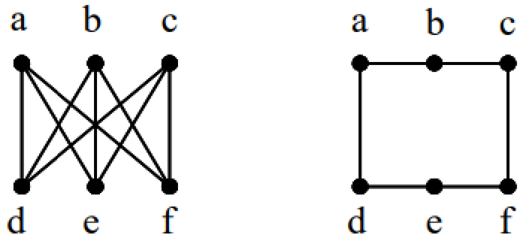
2.10. Довести, що в довільному графі G із шістьма вершинами завжди знайдуться три вершини, які є або попарно суміжними, або попарно несуміжними (це математичне формулювання відомої задачі: довести, що серед будь-яких шести осіб знайдуться три особи, що попарно знайомі між собою, або три особи, попарно незнайомі).

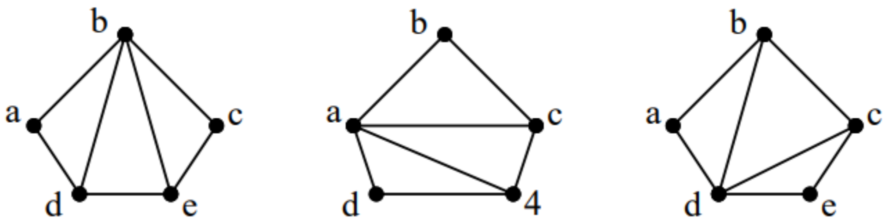
2.11. Довести, що коли в графі G з n вершинами кількість ребер більша ніж $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, тоді граф G зв’язний.

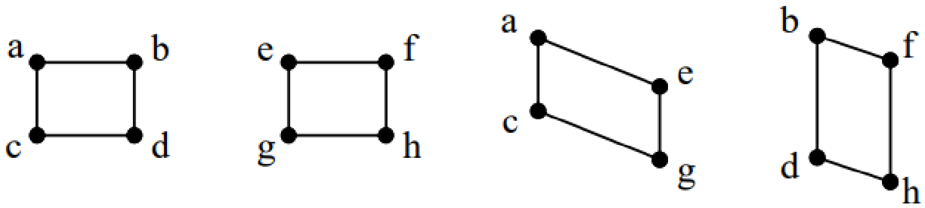
2.12. Знайти об’єднання та перетин графів (рис. 2.1):

а)


б)


в)


г)


д)


е)

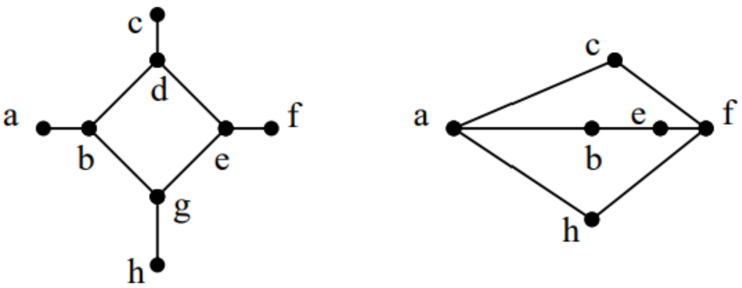


Рис. 2.1. Приклади графів

2.13. Знайти доповнення графів (рис. 2.2).

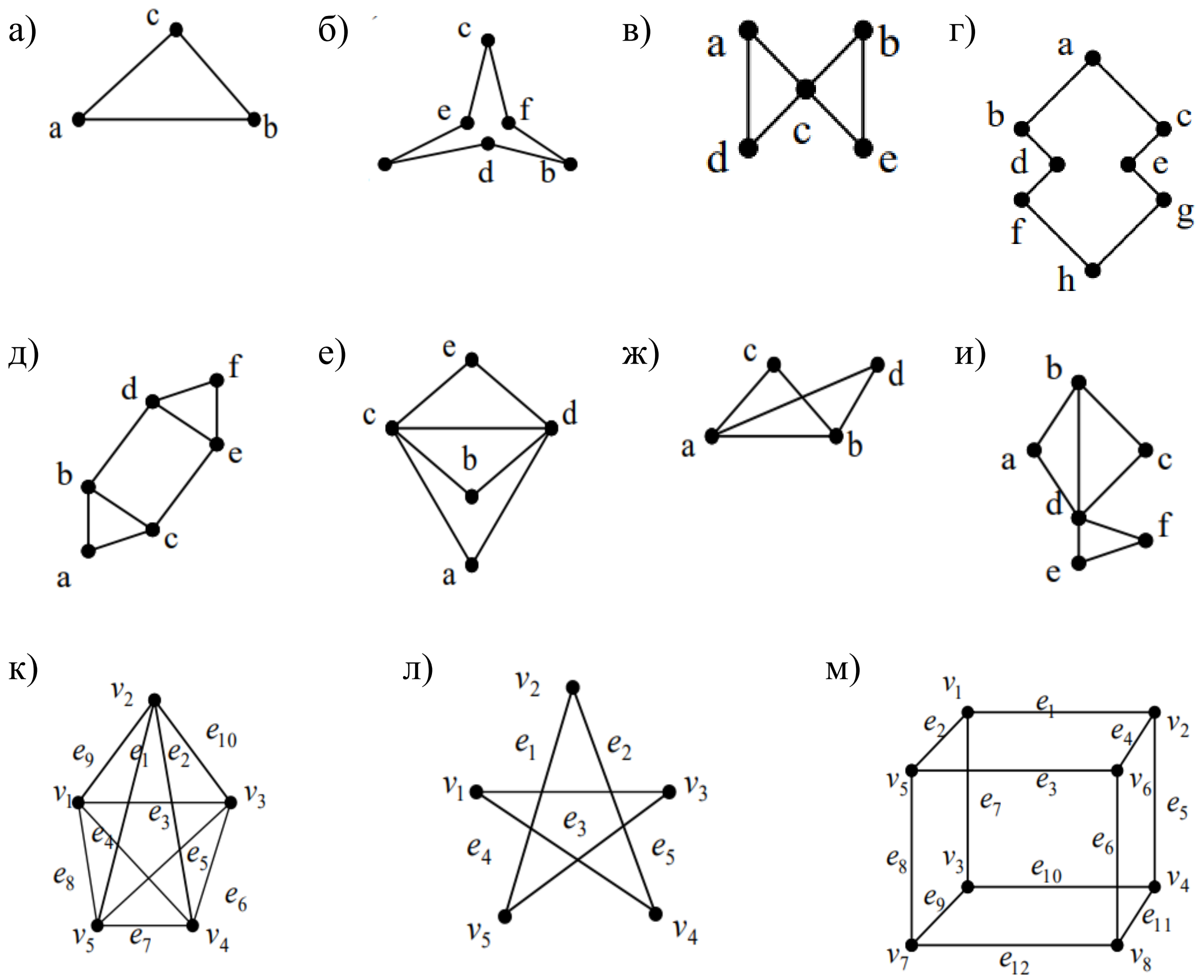


Рис. 2.2. Приклади графів

2.14. Задані графи G_1 і G_2. Які з наведених нижче графів є їх основними графами (рис. 2.3)?

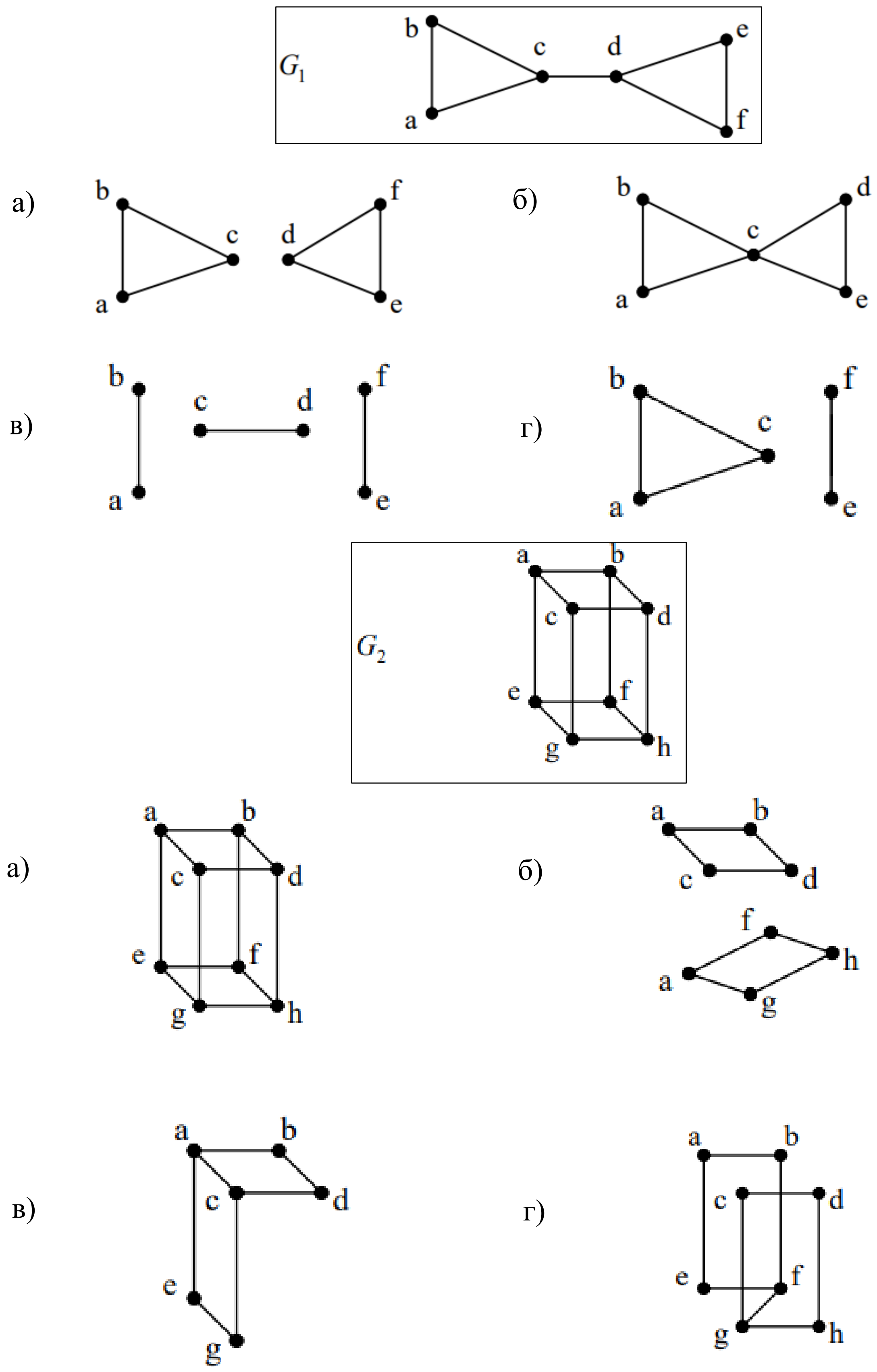


Рис. 2.3. Приклади графів

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

1. Чому дорівнює кількість ребер у графі $\bar{G}$, якщо G має n вершин і k ребер?

2. Який вигляд має доповнення графу $K_{n,m}$?

3. Скільки ребер містить повний двочастковий граф $K_{n,m}$?

4. Скільки вершин із однаковими степенями має граф $\bar{G}$, якщо в G таких тільки 2?

5. Чи для кожного натурального k існує повний двочастковий граф з k ребрами?

6. Скільки вершин повинен мати кубічний граф? Скільки ребер у такому графі?

ТЕМА 3
МАРШРУТИ В ГРАФАХ

3.1. Маршрути, зв'язані вершини, компоненти зв'язності

3.1.1. Маршрути, ланцюги, цикли

Маршрутом у графі $G(V,\ E)$ називається послідовність вершин і ребер $(v_0, e_1, v_1, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n)$, де $v_0, \dots, v_n$ – вершини, $e_i = (v_{i-1}, v_i), 1 \le i \le n,$ – ребра. Ребра e_i та e_{i+1} $(1 \le i \le n-1)$ є *сусідніми* ребрами маршруту й мають принаймні одну спільну вершину. Вказаний маршрут *з'єднує* вершини v_0 і v_n або *веде* з v_0 у v_n. Цей маршрут можна позначити $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$, не вказуючи ребер. Число n називається *довжиною маршруту*. Для систематичності міркувань вводиться *тривіальний,* або *нуль-маршрут* – маршрут, що складається з єдиної вершини й має довжину 0. Інші маршрути вважаються нетривіальними.

Маршрут називається *ланцюгом,* якщо всі його ребра попарно різні, і *простим ланцюгом,* якщо всі його вершини попарно різні.

Якщо $v_0 = v_n$, то маршрут називається *замкненим,* або *циклічним.* Його останнє та перше ребро вважаються сусідніми. Нетривіальний замкнений ланцюг називається *циклом.* Цикл $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ називається *простим,* якщо його вершини $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$ попарно різні. Зазначимо, що кожен простий цикл є циклом, а довжина будь-якого нетривіального замкненого маршруту $(v_0, v_1, \dots,$ $v_{n-1}, v_n)$, де $v_0 = v_n$, з попарно різними ребрами, не менше 3, оскільки треба вийти з вершини та повернутися в неї, але по різних ребрах. Отже, цикл і простий цикл повинні проходити принаймні через три вершини.

Зауважимо, що за принципом Діріхле довжина довільного простого циклу в графі завжди не більша від числа вершин n, а простого ланцюга – менша від n.

Якщо $Z_1 = (v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_i)$ і $Z_2 = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$ – маршрути, то під $Z_1 \cdot Z_2$ будемо розуміти маршрут $(v_0, v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$, а під Z_1^{-1} – маршрут $= (v_i, v_{i-1}, \dots, v_1, v_0)$.

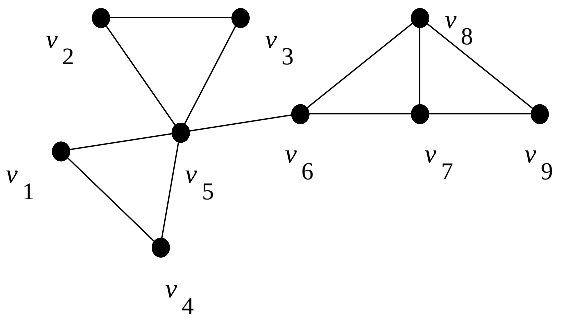


Рис. 3.1. Приклади маршрутів

На рис. 3.1 маршрути $(v_1, v_5, v_4, v_1), (v_2, v_3, v_5, v_2)$ та $(v_6, v_8, v_9, v_7, v_6)$ є простими циклами, $(v_5, v_2, v_3, v_5, v_4, v_1, v_5)$ – циклом, але не простим, $(v_1, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9)$ – простим ланцюгом, $(v_7, v_6, v_8, v_7, v_9)$ – ланцюгом, але не простим, а $(v_8, v_6, v_7, v_8, v_7, v_9)$ не є ланцюгом.

Через C_n позначається граф, утворений одним простим циклом з n вершин, P_n – простим ланцюгом з n вершин. Граф C_3 часто називається *трикутником.* Це цикл і простий цикл з найменшою кількістю вершин.

Граф, що не має циклів, називається *ациклічним.*

Граф, довільні дві вершини якого можуть бути з'єднані деяким маршрутом (є *зв'язаними*), називається *зв'язним.* Інакше граф називається *незв'язним.*

Максимальний за відношенням ⊆ зв'язний підграф графу називається *компонентою зв'язності* (чи *зв'язною компонентою*). На рис. 3.2 наведено приклад графу з двома компонентами зв'язності K_3 і K_2.

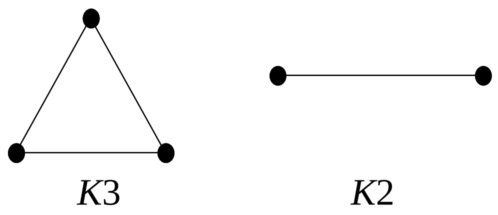


Рис. 3.2. Приклади компонент зв'язності

Відношення зв'язності на множині вершин графу $G = (V,\ E)$ є еквівалентністю; позначимо її R. vRw виконується тоді й тільки тоді, коли вершини v і w є зв'язаними в графі. За еквалентністю R побудуємо фактор-множину $V/R = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$, яка є розбиттям множини вершин. Неважко переконатися, що підграфи $G(V_i), 1 \le i \le n$ є компонентами зв'язності графу G (максимальними зв'язними підграфами), а сам n граф можна подати як пряму суму його зв'язних компонент $G = \bigcup_{i=1}^{n} C(V_i)$. Отже, одержуємо вказану нижче теорему.

Теорема 3.1. Кожен граф можна однозначно подати як пряму суму зв'язних компонент.

Ця теорема дає змогу зводити більшість задач, пов'язаних із графами, до випадку зв'язних графів.

Питання зв'язності графу виникає у багатьох практичних задачах, наприклад, коли граф подає схему руху транспорту, і треба визначити, чи можна проїхати з одного пункту в інший.

Розглянемо деякі властивості маршрутів.

Теорема 3.2. Будь-який маршрут, що веде з вершини v у вершину $w(v \neq w)$, містить простий ланцюг, що веде з v в w.

Доведення. Нехай є маршрут $Z = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$, де $v_0 = v, v_n = w$. Побудуємо за ним простий ланцюг, що веде з v у w. Якщо всі вершини маршруту Z різні, то він є простим ланцюгом. Інакше, нехай $v_i = v_j$ при деяких i та j, $0 \leq i < j \leq n$. Вилучивши частину маршруту Z між v_i та v_j, одержимо маршрут $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_i, v_i, e_{j+1}, v_{j+1}, \dots, e_n, v_n)$, довжина якого менша від довжини Z. Умова $v \neq w$ гарантує, що $i \neq 0$ або $j \neq n$, тому новий маршрут з'єднує v і w. Якщо він не є простим ланцюгом, то застосуємо до нього таке саме скорочення. Кількість вершин графу та початковий маршрут Z скінченні, і на кожному кроці зменшується довжина маршруту, тому на деякому скінченному кроці буде одержано маршрут, що з'єднує вершини v та w і має попарно різні вершини, тобто є простим ланцюгом. ■

Висновок 3.1. Будь-який найкоротший маршрут, що веде з вершини v у вершину $w(v \neq w)$, є простим ланцюгом.

Доведення. З доведення теореми 3.2 випливає, що як тільки маршрут веде з вершини v у вершину w і не є простим, його можна скоротити. Отже, він не є найкоротшим. ■

У графі може існувати кілька найкоротших простих ланцюгів, що ведуть з вершини v у вершину $(v \neq w)$. Так, у графі, наведеному на рис. 3.1, є два прості ланцюги найменшої довжини 2, що ведуть з v_6 у v_9 – (v_6, v_7, v_9) та (v_6, v_8, v_9). Але не кожен простий ланцюг з однієї вершини в іншу є найкоротшим маршрутом, що з'єднує ці дві вершини (наприклад, простий ланцюг (v_6, v_7, v_8, v_9) довжиною 3).

Висновок 3.2. Довільний цикл містить простий цикл.

Доведення. Нехай дано цикл $Z = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$, де $n \geq 3$. Нехай $v_0 = v_n = v$. Тоді маршрут $(v_1, e_1, \dots, e_n, v_n)$ не містить ребра (v_1, v_n) і $v_1 \neq v_n$, оскільки $v_0 \neq v_1$. За теоремою 3.2, він містить простий ланцюг, що веде з v_1 у

v_n. Нехай це простий ланцюг $L = (v_1, v_{i2}, \dots, v_{ik}, v_n)$, за побудовою він не містить ребра $(v_1, v_n) = (v_0, v_1)$. Тоді маршрут $(v_0, v_1, v_{i2}, \dots, v_{ik}, v_n)$ за означенням є простим циклом і за побудовою міститься в Z. ∎

Теорема 3.3. Якщо в графі для деяких трьох різних вершин v, u і w є ланцюги, один з яких веде з v в u, а другий – з u в w, то існує простий ланцюг, що веде з v в w.

Доведення. Нехай існують маршрути $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$ та $(v_n, e_{n+1}, v_{n+1}, \dots, e_{n+m}, v_{n+m})$, де $v_0 = v, v_n = u, v_{n+m} = w$. Маршрут $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n, e_{n+1}, v_{n+1}, \dots, e_{n+m}, v_{n+m})$ є маршрутом, що веде з v в w, причому за умовою $v \neq w$. За теоремою 3.2, він містить простий ланцюг, що веде з v до w. ∎

Взагалі якщо в графі існує ланцюг, що веде з вершини v у вершину w і проходить через u, то простого ланцюга між v і w, який проходить через u, може не існувати. Також, якщо в графі є прості ланцюги, що ведуть з v в u та з u в w, то простого ланцюга, що веде з v у w й проходить через u, може не існувати (див. приклад на рис. 3.3).

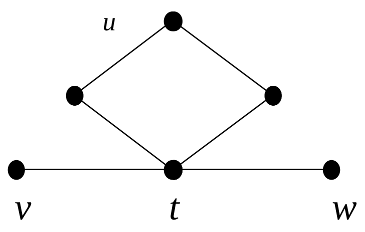


Рис. 3.3. Ланцюг з v у w через u не є простим

Теорема 3.4. Якщо в нетривіальному замкненому маршруті всі сусідні ребра різні, то він містить цикл.

Доведення. Нехай дано замкнений маршрут $Z = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n)$, де $v_0 = v_n = v$, з різними сусідніми ребрами. Це означає, що для довільних двох сусідніх ребер e_i та $e_{i+1}, 1 \leq i \leq n, e_i \neq e_{i+1}$, а також $e_1 \neq e_n$. Якщо всі його ребра попарно різні, то за означенням він є циклом. Інакше в ньому є принаймні два однакові ребра. Серед усіх пар однакових ребер маршруту є пара ребер $e_i = e_j, 1 \leq i < j \leq n$, таких, що всі ребра $e_{i+1}, \dots, e_j$ попарно різні. Але сусідні ребра попарно різні, тому $e_{i+1} \neq e_j$, і маршрут $(v_1, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, v_{j-1})$ містить принаймні одне ребро.

Нехай $e_i = (v_{i-1}, v_i), e_j = (v_{j-1}, v_j)$. Якщо $v_{i-1} = v_{j-1}$, то $v_i = v_j$. Тоді маршрут $(v_i, e_{i+1}, \dots, e_j, v_j)$ є нетривіальним замкненим маршрутом з попарно різними ребрами, тобто циклом. Якщо $v_{i-1} = v_j$, то $v_i = v_{j-1}$, і циклом є маршрут $(v_i, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, v_{j-1})$. ∎

Зауваження 3.1. У доведенні теореми 3.4 ми фактично побудували розклад маршруту $Z = Z_1 \cdot Z_0 \cdot Z_2$, такий, що Z_0 є циклом, а $Z_1 \cdot Z_2$ – замкненим маршрутом.

Теорема 3.5. Довільний цикл Z, що не є простим, можна подати у вигляді $Z = Z_1 \cdot Z_0 \cdot Z_2$ так, що Z_0 є простим циклом, а $Z_1 \cdot Z_2$ – циклом.

Доведення. Нехай дано цикл $Z = (v_0,\ v_1, \dots, v_n)$, де $v_0 = v_n = v$. Серед ланцюгів $L_i = (v_0,\ v_1, \dots, v_i), 1 \le i \le n-1$, виберемо ланцюг з найбільшим індексом, скажімо, j, що є простим. Очевидно, що L_1 і L_2 є простими ланцюгами, а L_{n-1} – ні, оскільки Z не є простим. Звідси: $3 \le j \le n-2$. L_{j+1} вже не є простим ланцюгом, тому вершина v_{j+1} входить до складу L_j, тобто $v_i = v_j$ при деякому i, $0 \le i < j-1$. Оскільки ланцюг L_j простий, то цикл $Z_0 = (v_i,\ v_{i+1}, \dots, v_j)$ також є простим. Вилучивши його з Z, одержимо замкнений нетривіальний маршрут (цикл) $\left(v_0,\ v_1, \dots, v_i, v_{j+1}, \dots, v_n\right)$, у якому покладемо $Z_1 = (v_0,\ v_1, \dots, v_i)$ та $Z_2 = (v_i,\ v_{j+1}, \dots, v_n)$. ∎

Задачі

3.1. Довести: якщо два різні цикли графу містять ребро e, то в графі є цикл, серед ребер якого немає e.

3.2. Довести, що будь-який замкнений маршрут непарної довжини містить простий цикл. Чи справджується аналогічне твердження для замкнених маршрутів парної довжини?

3.3. Довести, що в графі, степені всіх вершин якого більші від 1, є цикл.

3.4. Довести, що в графі, усі прості цикли якого мають парну довжину, немає жодного циклу непарної довжини.

3.5. Довести, що в графі, усі прості цикли якого мають парну довжину, немає жодного замкненого маршруту непарної довжини.

3.6. Довести, що у зв'язному графі будь-які два прості ланцюги максимальної довжини мають принаймні одну спільну вершину. Чи завжди вони мають спільне ребро?

3.7. Довести, що граф є двочастковим тоді й тільки тоді, коли всі його цикли мають парну довжину.

1.3.3. Точки зчленування, мости

У розв'язанні практичних задач з графами доволі часто застосовуються методи типу «розділяй та володарюй», коли задача розв'язується для окремих частин графу, а потім результати об'єднуються. Розклад графу на окремі структурні частини дає змогу зменшувати розмірність розв'язуваних підзадач і досягати ефективнішого розв'язання всієї задачі.

Найпростіший спосіб розкладу графу – у пряму суму його компонент зв'язності. Проте існують класи зв'язних графів, які можна піддавати структурній декомпозиції, тобто розкладати на компоненти зв'язності внаслідок вилучення однієї вершини чи ребра. Виявлення таких вершин та ребер допомагає вивчати структуру зв'язного графу.

Точкою зчленування графу, або *розділовою вершиною,* називається вершина, вилучення якої збільшує кількість компонент зв'язності; ребро з такою ж властивістю називається *мостом.* Отже, якщо v – точка зчленування зв'язного графу G, то граф $G - v$ незв'язний.

Нероздільним називається нетривіальний зв'язний граф, що не має точок зчленування. *Блок* графу – це його максимальний (за відношенням включення) нероздільний підграф. Нероздільний граф сам є блоком. Так, на рис. 3.1 вершини v_5, v_6 є точками зчленування, а ребро (v_5, v_6) є мостом.

Теорема 3.6. Нехай v – вершина зв'язного графу $G = (V,\ E)$. Вказані твердження еквівалентні:

1) v – точка зчленування графу G;

2) існують вершини u і w, не рівні v, для яких v належить кожному простому ланцюгу, що з'єднує u і w;

3) існує розбиття множини вершин $V - \{v\}$ на такі дві підмножини U і W, що для довільних двох вершин $u \in U$ і $v \in W$ вершина v належить кожному простому ланцюгу, який з'єднує вершини u і w.

Теорема 3.7. Нехай e – ребро графу $G = (V, E)$. Вказані твердження еквівалентні:

1) e – міст графу G;

2) e не належить жодному простому циклу графу G;

3) в G існують такі вершини v і u, що ребро e належить кожному простому ланцюгу, що веде з v в u;

4) існує розбиття множини вершин $V - \{v\}$ на дві підмножини U і W, що для довільних двох вершин $u \in U$ і $v \in W$ ребро e належить кожному простому ланцюгу, який з'єднує вершини u і w.

Теорема 3.7. Нехай G – зв'язний граф, що має не менше ніж три вершини. Вказані твердження еквівалентні:

1) G – блок;

2) довільні дві вершини графу G належать деякому спільному простому циклу;

3) довільна вершина і довільне ребро графу G належать деякому спільному простому циклу;

4) довільні два ребра графу G належать деякому спільному простому циклу;

5) для довільних двох вершин і довільного ребра графу G існує простий ланцюг, що з'єднує ці вершини і містить це ребро;

6) для довільних трьох різних вершин графу G існує простий ланцюг, що з'єднує дві з них і проходить через третю;

7) для довільних трьох різних вершин графу G існує простий ланцюг, що з'єднує дві з них і не проходить через третю.

Задачі

3.1. Нехай у графі з n вершинами степінь кожної вершини не менше $\frac{n-1}{2}$. Довести, що граф зв'язний. Чи можна в цьому твердженні замінити $\frac{n-1}{2}$ на $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$?

3.2. Довести, що при будь-якому $n \geq 2$ існує незв'язний граф, який має n вершин і $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ребер.

3.3. Довести, що зв'язний граф із n вершинами містить не менше ніж $n-1$ ребро.

3.4. Визначити для зв'язного двочасткового графу з n вершинами найменшу та найбільшу можливу кількість ребер.

3.5. Довести, що граф G з n вершинами не є двочастковим, якщо кількість його ребер більша від $\frac{n^2}{4}$.

3.6. Довести, що будь-який замкнений маршрут непарної довжини містить простий цикл. Чи справедливим є аналогічне твердження для замкнених маршрутів парної довжини?

3.2. Екстремальні маршрути – найкоротші ланцюги

3.2.1. Відстань між вершинами

Довжина найкоротшого простого ланцюга, що з'єднує вершини v і w зв'язного графу, називається *відстанню* між вершинами v і w та позначається $d(v, w)$.

Задача пошуку найкоротшого маршруту або відстані між двома вершинами графу виникає дуже часто, коли граф виступає моделлю, наприклад, якоїсь транспортної системи.

Теорема 3.8. У довільному зв'язному графі $G = (V,\ E)$ функція відстані $d(v,\ w)$ задовольняє три аксіоми метрики, тобто за будь-яких вершин v, w, $u \in V$ виконується:

1) $d(v,\ w)\ \geq\ 0$; $d(v,\ w)\ =\ 0$ тоді і тільки тоді, коли $v\ =\ w$;
2) $d(v,\ w)\ =\ d(w,\ v)$;
3) $d(v,\ w)\ \leq\ d(v,\ u) + d(u,\ w)$.

Доведення.

1) Відстань між вершинами невід'ємна за означенням та дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли між ними існує нуль-маршрут, тобто вони збігаються.

2) Якщо відстань досягається на простому ланцюзі L, що веде з v в w, то L^{-1} буде простим ланцюгом тієї ж самої довжини, що веде з w в v.

3) Якщо $v = w,$ то $d(v, u) + d(u, w) \geq 0 = d(v, w)$. Якщо $v \neq w$, і простий ланцюг L_1 довжини $d(v, u)$ веде з v в u, а простий ланцюг L_2 довжини $d(u, w)$ – з u в w, то маршрут $L_1 \cdot L_2$ довжини $d(v, u) + d(u, w)$ веде з v в w. За теоремою 3.2 він містить простий ланцюг, що з'єднує v та w і має довжину, не більшу ніж довжина $L_1 \cdot L_2$. Звідси за означенням відстані $d(v, u) + d(u, w)\ \geq\ d(v, w)$. ∎

3.2.2. Ексцентриситет, радіус, діаметр, центр

Ексцентриситетом вершини $v \in V$ зв'язного графу $G = (V,\ E)$ називається величина $e(v) = max\{d(v, w)|w \in V\}$, тобто найбільша з відстаней між v та іншими вершинами графу.

Діаметром зв'язного графу G називається найбільший з усіх ексцентриситетів його вершин і позначається $D(G)$. Жодна відстань у графі не перевищує його діаметр.

Радіусом зв'язного графу G називається найменший з усіх ексцентриситетів його вершин і позначається $R(G)$.

Якщо $e(v) = R(G)$, то вершина v називається *центральною*. *Центром* графу називається множина всіх його центральних вершин.

За означенням $D(G) = max\{e(v)|v \in V\} = max\{d(v, w)|v, w \in V\}$ і $R(G) =$
$= min\{e(v)|v \in V\}$.

У графі, наведеному на рис. 3.1, $e(v_1) = e(v_2) = e(v_3) = e(v_4) = e(v_9) = 4, e(v_5) = e(v_7) = e(v_8) = 3, e(v_6) = 2$, відповідно діаметр дорівнює 4, радіус – 2, а центр складається з єдиної вершини v_6.

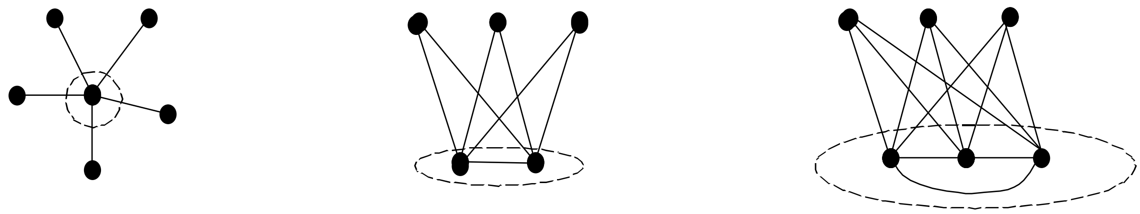
На рис. 3.4 наведено приклади графів, центр яких складається:

а) з однієї вершини;

б) з двох вершин;

в) з трьох вершин і не збігається з множиною всіх вершин.

Центри обведено пунктирною лінією.



а) б) в)

Рис. 3.4. Приклади центрів

Теорема 3.9. Діаметр графу дорівнює 1 тоді й тільки тоді, коли граф повний.

Доведення. (⇒) Якщо діаметр графу дорівнює 1, то відстань між довільними двома різними вершинами не перевищує 1, тобто вони суміжні, і граф повний.

Доведення. (⇐) Якщо граф повний, то ексцентриситети всіх вершин дорівнюють 1. Тоді й діаметр дорівнює 1. ■

У повному графі ексцентриситети всіх вершин рівні, тому його центр збігається з множиною всіх вершин. До того ж $D(K_n) = R(K_n)$ у довільному повному графі K_n. У зірковому графі $K_{1,n}$ при $n \geq 2$ маємо $D(K_{1,n}) = 2, R(K_{1,n}) = 1$, тобто $D(K_{1,n}) = 2R(K_{1,n})$.

Теорема 3.10. Для довільного зв'язного графу G виконується $R(G) \leq D(G) \leq 2R(G)$.

Доведення. Перша нерівність випливає з означень радіуса та діаметра: $R(G) = min\{e(v)|v \in V\} \leq max\{e(v)|v \in V\} = D(G)$.

Доведемо другу нерівність. Нехай z – центральна вершина. Візьмемо дві довільні вершини v і w. За теоремою 3.8 $d(v, w) \leq d(v, z) + d(z, w) = 2R(G)$. Тоді $D(G) = max\{d(v, w)|v, w \in V\} \leq 2R(G)$. ■

Задачі

3.7. Довести, що якщо граф G незв'язний, то граф G зв'язний і $D(G) \leq 2$.

3.8. Довести, що для будь-якого графу або він сам, або його доповнення є зв'язним графом.

3.9. Нехай для діаметра зв'язного графу G виконується $D(G) \geq 3$. Довести, що граф G зв'язний, і $D(G) \leq 3$.

3.3. Ейлерові графи

Цикл, що містить усі ребра графу, називається *ейлеровим.* Граф називається *ейлеровим,* якщо в ньому є ейлерів цикл. *Ейлеровим ланцюгом* називається ланцюг, що проходить через усі ребра графу.

Наприклад, у графі K_5 з множиною вершин $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ існує ейлерів цикл $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1, v_3, v_5, v_2, v_4, v_1$.

Ейлерові цикли виникають у практичних задачах, пов'язаних з обходом усіх ребер графу по одному разу. Наприклад, є система шляхів, які потрібно ремонтувати. Ремонтна бригада має проїхати через усі ці шляхи, починаючи від своєї бази. Бригада має спеціальну техніку, яка рухається дуже повільно, тому бажано двічі тим самим шляхом не проїжджати. Виходить, що найкращим маршрутом бригади буде саме ейлерів цикл, який починається й закінчується в її базі.

Теорема 3.11. Для зв'язного нетривіального графу G вказані твердження еквівалентні:

(1) G – ейлерів граф (існує цикл, що містить усі ребра графу по одному разу);

(2) кожна вершина графу має парний степінь;

(3) множину ребер графу можна розбити на прості цикли, які не перетинаються по ребрах.

Доведення

$(1) \Rightarrow (2)$ Нехай у графі G існує ейлерів цикл. Спочатку вилучимо всі ребра, а далі додаватимемо їх по одному у порядку проходження циклу. Якщо в цьому циклі ми приходимо до вершини, то ми повинні вийти з неї (з початкової вершини циклу ми виходимо, а в кінці приходимо до неї). Тому кожне проходження вершини додає 2 до її степеня. Коли додано всі ребра, одержано граф G, кожна вершина якого має парний степінь.

$(2) \Rightarrow (3)$ Кожна вершина графу має парний степінь, і граф зв'язний (ізольованих вершин немає), тому степінь кожної вершини не менше 2. Тоді методом задачі 3 у графі можна знайти простий цикл. Вилучимо ребра цього циклу. Степінь кожної вершини або зменшується на 2 або не зменшується і в обох випадках залишається парним. Якщо в графі залишаються ребра, продовжуємо процедуру вилучення простих циклів доти, поки існує хоча б одна нетривіальна зв'язна компонента. З описаної процедури очевидно, що граф є сумою вилучених простих циклів, причому ці прості цикли не мають спільних ребер.

(3) $\Rightarrow$ (1) Нехай M_1 – один з простих циклів розбиття. З нього почнемо будувати ейлерів цикл. Нехай на деякому кроці побудовано цикл M_k і залишаються прості цикли розбиття, що не увійшли до складу M_k. За зв'язністю графу існує простий цикл Z, який має спільну вершину v з M_k. Зауважимо, що цю спільну вершину можна без обмеження загальності вважати початковою вершиною обох маршрутів, тобто $M_k = (v) \cdot M_k' \cdot (v)$ і $Z = (v) \cdot Z' \cdot (v)$. Побудуємо маршрут $M_{k+1} = (v) \cdot M_k' \cdot (v) \cdot\ Z' \cdot (v)$. Він є циклом, який об'єднує M_k з обраним простим циклом Z. Оскільки граф скінченний, продовження цього процесу на деякому кроці вичерпує всі прості цикли, і побудований цикл міститиме всі ребра графу, тобто граф є ейлеровим. ■

Зауважимо, що ця теорема справджується і для мультиграфів.

Висновок 3.3. Нетривіальний зв'язний граф має ейлерів ланцюг тоді й тільки тоді, коли він має тільки дві вершини з непарними степенями.

Доведення

($\Rightarrow$) Нехай вершини $v, w, v \neq w$, є кінцями ейлерового ланцюга. Додамо до графу нову вершину u та ребра $(v, u), (w, u)$; під час цього зміняться степені лише вершин v та w (збільшаться на 1). У новому графі ці два ребра разом з ейлеровим ланцюгом утворюють ейлерів цикл, і за теоремою 3.11, усі вершини мають парний степінь. Кінці ейлерового ланцюга у початковому графі мали степені на 1 менші, ніж у новому, тому ці степені були непарними.

($\Leftarrow$) Якщо граф має рівно дві вершини непарного степеня $v,\ w,\ v \neq w,$ то додамо до графу нову вершину u та ребра $(v, u), (w, u)$. В отриманому графі всі вершини первинного графу будуть мати парний степінь, додана вершина буде мати степінь 2 – також парний, звідси: граф буде ейлеровим, тоді в ньому існує ейлерів цикл. Цей цикл проходить через вершину u рівно один раз – без обмеження загальності можна вважати, що вона є початком і кінцем ейлерового циклу. Тепер вилучимо з графу цю вершину та суміжні з нею ребра. Так з ейлерового циклу ми отримаємо ейлерів ланцюг. ■

Представимо спосіб побудови ейлерового циклу в ейлеревім графі.

Алгоритм Фльорі

Доведення. Починаючи з довільної вершини u, присвоїмо довільному ребру (u, v) номер 1. Потім викреслимо ребро (u, v) та перейдемо до вершини v. Нехай на попередньому кроці ми перейшли до вершини w і присвоїли ребру номер k. На черговому кроці вибираємо довільне ребро, інцидентне w, причому ребро, що не входить до складу жодного циклу в графі, який залишився, обираємо тільки тоді, коли інших немає; присвоюємо обраному ребру номер $k + 1$ та викреслюємо його. ■

Теорема 3.12. Алгоритм Фльорі є коректним.

Доведення. Коректність алгоритму Фльорі полягає в тому, що для ейлерового графу алгоритм приводить до побудови ейлерового циклу.

Нехай граф $G = (V,\ E)$ є ейлеровим. За теоремою 3.11, степені всіх його вершин парні, тому алгоритм може закінчити роботу тільки в тій вершині, з якої починав працювати. Тоді він будує деякий цикл C з множиною ребер E_C, і треба лише довести, що $E_C = E$. Припустимо, що це не так: нехай G' – нетривіальна зв'язна компонента графу $C - E_C$. Аналогічно доведенню теореми 3.11, можна показати, що степені всіх вершин у графі $C - E_C$ парні, оскільки з G вилучено ребра циклу, а тоді множину ребер кожної зв'язної компоненти графу $C - E_C$ можна розбити на прості цикли. Розглянемо множину A ребер циклу C, які були викреслені алгоритмом, коли поточна вершина належала графу G'. Очевидно, що $A \neq \emptyset$ (інакше початковий граф незв'язний). Нехай $a \in A$ – ребро, що одержало найбільший номер у процесі роботи алгоритму (викреслене останнім). Тоді ребро a у момент викреслювання не входило до складу жодного циклу в графі, але кожна вершина графу G' входить до складу деякого простого циклу. А це суперечить правилу вибору наступного ребра. Отже, припущення про існування нетривіальної зв'язної компоненти G' є хибним, тому $E_C = E$. ■

Задачі

3.10. Довести, що кожна неізольована вершина ейлерового графу належить деякому простому циклу цього графу.

3.11. Довести, що множину ребер зв'язного графу, який має $2k$ вершин $(k \geq 1)$ із непарними степенями, можна розбити на k ланцюгів.

3.12. Довести, що у довільному зв'язному графі існує замкнений маршрут, що починається з будь-якої вершини і містить усі ребра графу, причому кожне з них двічі.

3.13. Довести, що якщо в графі існує замкнений маршрут, який містить кожне ребро графу непарну кількість разів, то степені вершин графу парні.

3.14. Дано підмножину кісток доміно, серед яких відсутні дублі. Вказати умови, за яких із цих кісток можна скласти єдиний неперервний ланцюжок за правилами гри в доміно. Чи відрізняється відповідь, якщо кістки можуть повторюватися?

3.4. Екстремальні маршрути – максимально прості ланцюги

3.4.1. Гамільтонові графи

Ейлерові цикли характеризуються властивістю проходити по одному разу через кожне ребро графу, а гамільтонові цикли – через кожну вершину. *Гамільтоновим* називається простий цикл, який проходить через кожну вершину графу. Граф, у якому є гамільтонів цикл, називається *гамільтоновим*. Простий ланцюг, що проходить через кожну вершину графу, називається *гамільтоновим*.

Уперше задача пошуку простого циклу, що містить усі вершини графу, з'явилася у вигляді головоломки, яку в 1859 р. запропонував сер Вільям Гамільтон. Суть її полягала в побудові маршруту, який проходив би по одному разу через кожне з 20 міст, і повертався у початкову вершину маршруту.

Задачу про гамільтонові цикли можна інтерпретувати так. Серед лицарів деякі є друзями. Як їх можна розсадити за круглим столом, щоб по обидва боки кожного з присутніх сиділи його друзі?

До задач про гамільтонові цикли відносять і задачу про комівояжера. Він має відвідати кілька міст, відстані між якими відомі. Необхідно знайти найкоротший маршрут, що проходить через усі міста й повертається в початкове. Ця задача має низку застосувань у дослідженні операцій, наприклад, у зв'язку з ефективним використанням обладнання. Приклади гамільтонових графів наведено на рис. 3.5.

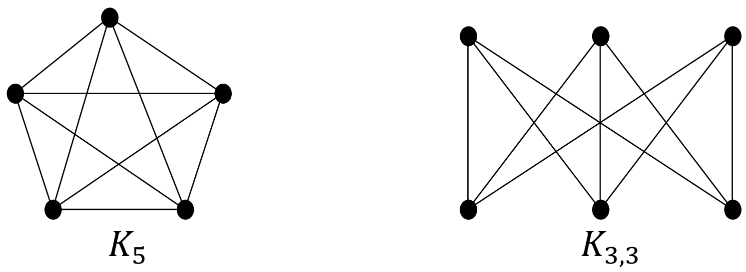


Рис. 3.5. Приклади гамільтонових графів

Очевидно, що в довільному повному графі $K_n = \left(V, V^{(2)}\right), V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $n \geq 3$, існує гамільтонів цикл $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$. Для двочасткового графу $K_{n,n}$ з частками $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, V_2 = \{v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_{2n}\}, n \geq 2$, також існує гамільтонів цикл $(v_1, v_{n+1}, v_2, v_{n+2} \dots, v_{n-1}, v_{2n-1}, v_n, v_{2n}, v_1)$.

Незважаючи на схожість означень ейлерових і гамільтонових циклів, вони мають цілком різні властивості. Зокрема, існують гамільтонові графи, що не є ейлеровим, і навпаки (відповідні приклади наведено на рис. 3.6). Їх відмінність виявляється також у тому, що задача побудови ейлерового циклу розв'язується дуже просто (див. алгоритм Фльорі), а задача побудови гамільтонового циклу (як і задача комівояжера) належить до так званих *важко розв'язуваних задач*.

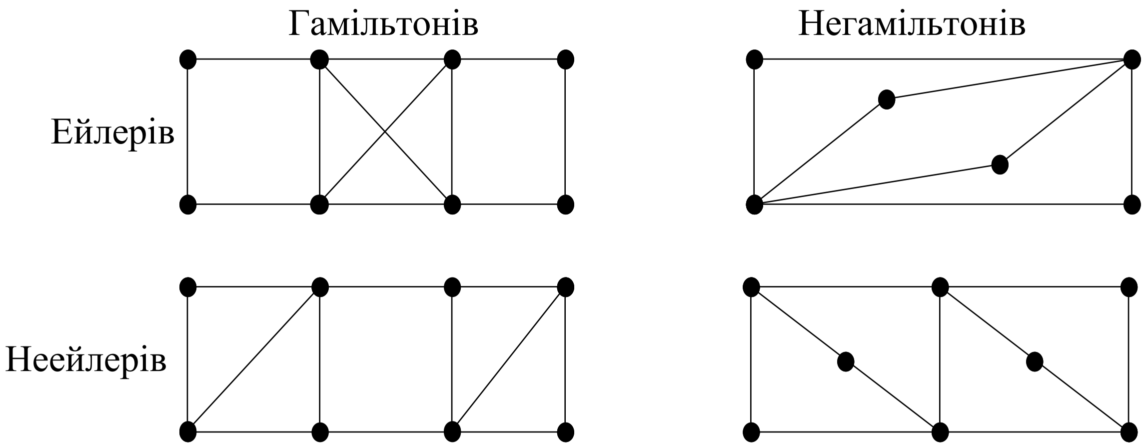


Рис. 3.6. Ейлерові та гамільтонові графи

Зазначимо, що в гамільтоновому графі всі вершини зв'язані між собою гамільтоновим циклом. До того ж цей цикл проходить через кожну вершину, тому степені всіх вершин гамільтонового графу не менші від 2.

Задачі

3.15. Довести, що граф $K_{n,m}$ не є гамільтоновим, якщо $n \neq m$.

3.16. Довести, що граф, який має дві несуміжні вершини степеня 3, а всі інші вершини степеня не більше 2, не має гамільтонового циклу.

3.4.2. Властивості максимальних простих ланцюгів

Простий ланцюг називається *повним,* якщо його не можна продовжити, додаючи ребра до якого-небудь з його кінців і отримуючи під час цього простий ланцюг.

Безпосередньо з означення випливає вказане нижче твердження.

Теорема 3.13. Кінці повного простого ланцюга не мають суміжних вершин серед вершин, що не входять до складу цього ланцюга.

Висновок 3.4. Степені кінців повного простого ланцюга довжини k не більше k.

Простий ланцюг $L = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ у графі $G = (V,\ E)$ *має тип циклу,* якщо підграф $G_0 = G(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ має гамільтонів цикл. У цьому випадку L є гамільтоновим ланцюгом у графі G_0.

Теорема 3.14. Повний простий ланцюг $L = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ довжини $k (k \geq 2)$ має тип циклу в графі $G = (V,\ E)$, якщо $\delta(v_0) + \delta(v_k) \geq k + 1$.

Доведення. Якщо v_0 і v_k суміжні, то в графі $G_0 = G(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ існує гамільтонів цикл $(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k, v_0)$. Нехай вершини v_0 і v_k несуміжні. Доведемо, що в G_0 є інший гамільтонів цикл, довівши спочатку, що існує вершина v_i, для якої $(v_0, v_i) \in E$ і $(v_k, v_{i-1}) \in E$.

Доведемо від супротивного: для кожної вершини v_i (крім v_1), суміжної з v_0, вершина v_{i-1} несуміжна з v_k. Кількість таких вершин v_i є $\delta(v_0)-1$, а всіх проміжних вершин у ланцюгу L – $k-1$. Тоді $\delta(v_k) \leq (k-1)-(\delta(v_0)-1) =$ $= k-\delta(v_0)$, тобто $\delta(v_k)+\delta(v_0) \leq k$, що суперечить висновку теореми. Отже, існує вершина v_i, для якої $(v_0,\ v_i) \in E$ і $(v_k, v_{i-1}) \in E$ (рис. 3.7 *а*). Тоді в графі G_0 є гамільтонів цикл $(v_0, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{k-1}, v_k, v_{i-1}, v_{i-2}, \dots, v_1, v_0)$.

Максимальним простим ланцюгом називається простий ланцюг максимальної довжини. Очевидно, що кожен максимальний простий ланцюг є повним, але не навпаки. Наприклад, у графі на рис. 3.7 *б* не всі повні прості ланцюги є максимальними.

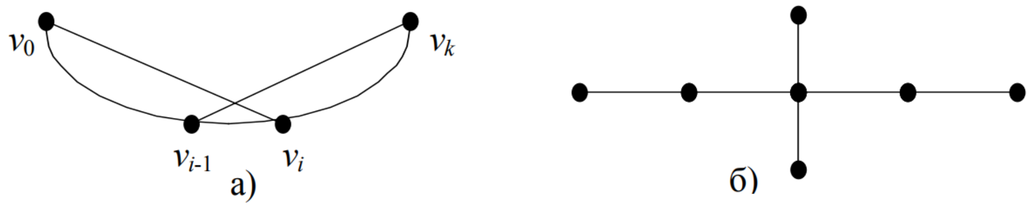


Рис. 3.7. Гамільтонів цикл та повні прості ланцюги

Теорема 3.15. Максимальний простий ланцюг має тип циклу у зв'язному графі тоді й тільки тоді, коли граф має гамільтонів цикл.

Доведення.

(⇒) Нехай максимальний простий ланцюг $L = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ у графі G має тип циклу. За означенням, $G_0 = G(v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ є гамільтоновим. Припустимо, що в G є вершини, яких немає в G_0. Оскільки G зв'язний, у ньому є ребро (v_i, w), для якого w не належить G_0. Але тоді в G є простий ланцюг $(w, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i)$, довжина якого більша від довжини L. А це неможливо, оскільки L є максимальним.

(⇐) Очевидно, що за гамільтоновим циклом можна побудувати гамільтонів ланцюг, який буде максимальним простим ланцюгом та матиме тип циклу. ■

Висновок 3.5. У зв'язному негамільтоновому графі довжина максимального простого ланцюга $L = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ не менша від $\delta(v_0) + \delta(v_k)$.

Задачі

3.17. Спростувати твердження: якщо деякий ланцюг, що веде із вершини v у вершину w, проходить через вершину u ($u \neq v$ і $u \neq w$), то він містить простий ланцюг, що веде з v у w і проходить через u.

3.18. Довести, що будь-який найкоротший ланцюг, який веде із вершини v у вершину w ($v \neq w$), є простим ланцюгом.

3.19. Довести, що в графі, степені всіх вершин якого більші 1, є цикл.

3.20. Побудувати граф, центр якого:

а) складається тільки з однієї вершини;

б) складається тільки із двох вершин;

в) складається із трьох вершин і не збігається із множиною всіх вершин;

г) збігається із множиною всіх вершин.

3.21. Довести, що для довільного графу G виконуються нерівності $R(G) \leq D(G) \leq 2R(G)$.

3.22. Довести, що діаметр довільного самодоповнювального графу дорівнює або 2, або 3.

3.23. Довести, що в ізоморфних графів кількість простих циклів довжиною l однакова для всіх l.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИВЧЕННЯ

1. Якісні ознаки зв'язності.
2. Кількісні ознаки зв'язності.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

1. Скільки центральних вершин має повний двочастковий граф $K_{n,m}$?
2. Чому дорівнюють діаметр і радіус повного двочасткового графу $K_{n,m}$?
3. Які з повних графів K_n є ейлеровим?
4. Для яких значень n і m повний двочастковий граф $K_{n,m}$ є ейлеровим?
5. Чи існує в графі K_n цикл довжини 9?

ТЕМА 4
ІЗОМОРФІЗМ ГРАФІВ

4.1. Поняття ізоморфізму графів.
4.2. Інваріанти ізоморфних графів.
4.3. Самодоповнювальні графи.

4.1. Поняття ізоморфізму графів

Буквальний переклад слова «ізоморфізм» означає «однаковість форми». Форма графу – це його структура. Отже, ізоморфізм графів означає однаковість їх структури. Зробимо необхідні уточнення.

Два графи $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ називаються *ізоморфними* (це позначається $G_1 \cong G_2$), якщо між множинами їх вершин існує взаємно однозначне відображення $\varphi: V_1 \to V_2$, яке зберігає суміжність, тобто для довільних вершин v і w $(v, w) \in E_1$ тоді й тільки тоді, коли $(\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2$. Водночас φ називається *ізоморфним відображенням,* або *ізоморфізмом,* графу G_1 на граф G_2. На рис. 4.1 *а,* 4.1 *б* наведено дві пари ізоморфних графів.

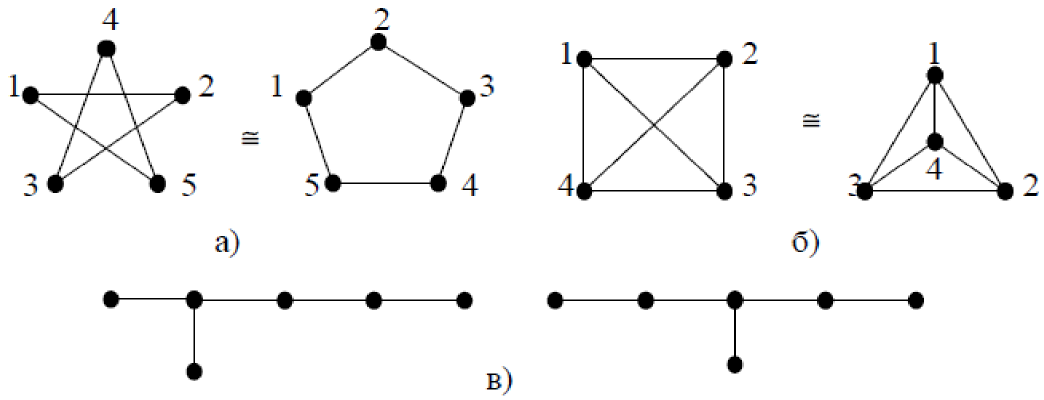


Рис. 4.1. Дві пари ізоморфних графів та пара неізоморфних

Про ізоморфні графи кажуть, що вони рівні з точністю до ізоморфізму.

Ізоморфізм графу на себе називається *автоморфізмом.* Очевидно, що тотожне відображення множини вершин графу є автоморфізмом (цей автоморфізм називається *тривіальним*). Неважко також переконатися, що якщо φ є ізоморфізмом графу G_1 на граф G_2, то відображення φ^{-1} є ізоморфізмом G_2 на G_1. До того ж, якщо є ізоморфізм φ графу G_1 на граф G_2 і ізоморфізм γ графу G_{22} на G_3, то їх композиція $\varphi^\circ\gamma$ буде ізоморфізмом G_1 на G_3.

Теорема 4.1. Графи ізоморфні тоді й тільки тоді, коли ізоморфні їх доповнення.

Доведення. Нехай $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2), G_1 \cong G_2$ і$\varphi: V_1 \to V_2$ – ізоморфізм G_1 на G_2. Розглянемо графи $\overline{G_1} = (V_1, \overline{E_1}), \overline{G_2} = (V_2, \overline{E_2})$. Нехай v та w –

довільні вершини графу G_1. За означеннями доповнення та ізоморфізму $(v, w) \in \overline{E_1} \Leftrightarrow (v, w) \notin E_1 \Leftrightarrow (\varphi(v), \varphi(w)) \notin E_2 \Leftrightarrow (\varphi(v), \varphi(w)) \in E$, тобто доповнення ізоморфні, причому з тим самим відображенням φ. $\blacksquare$

Теорема 4.2. Якщо φ – ізоморфізм графу G_{11} на G_2, то вершини v у графі G_1 і $\varphi(v)$ у G_2 мають однакові степені.

Доведення. Нехай $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$ і $v \in V_1$. Якщо v не має суміжних вершин, то і $\varphi(v)$ не може мати таких, тобто $\delta(v) = \delta(\phi(v) = 0$. Якщо v має суміжні вершини, то, за означенням ізоморфізму, для будь-якої вершини w отримаємо: $w \in O(v)$тоді й тільки тоді, коли $\varphi(w) \in O\big(\varphi(v)\big)$. Отже, $|O(v)| =$ $= |O(\phi(v))|$, тобто $\delta(v) = \delta(\phi(v))$. $\blacksquare$

Задачі

4.1. Зобразити всі попарно неізоморфні дерева, кількість вершин у яких:

а) 5; б) 6; в) 7.

4.2. Інваріанти ізоморфних графів

Під *інваріантом* графу G розуміють числовий параметр, пов’язаний з G, значення якого однакові для всіх графів, ізоморфних G. Деякі найпростіші інваріанти представлено в наступних теоремах.

Теорема 4.3. Ізоморфні графи мають однакову кількість вершин.

Доведення. Це випливає з існування взаємно однозначної відповідності між множинами вершин. $\blacksquare$

Ізоморфізм φ можна продовжити на множину ребер так: покладемо $\varphi'((v, w)) = (\varphi(v), \varphi(w))$. З властивостей φ випливає, що відображення $\varphi' \colon E_1 \to E_2$ є взаємно однозначним. Звідси отримаємо наступну теорему.

Теорема 4.4. Ізоморфні графи мають однакову кількість ребер.

Теорема 4.5. Ізоморфні графи для довільного k $(k \geq 0)$ мають однакову кількість вершин степеня k.

Доведення. Нехай $G_1 = (V_1,\ E_1), G_2 = (V_2,\ E_2), \varphi \colon V_1 \to V_2$ – ізоморфізм графу G_1 на граф $G_2, v \in V_1$і$\delta(v) = k$. За теоремою 4.2, $\delta(\varphi(v)) = k$, тому ізоморфізм взаємно однозначно відображає множину вершин степеня k графу G_1 на множину вершин степеня k графу G_2. Тоді ізоморфні графи G_1 і G_2 мають однакову кількість вершин степеня k. $\blacksquare$

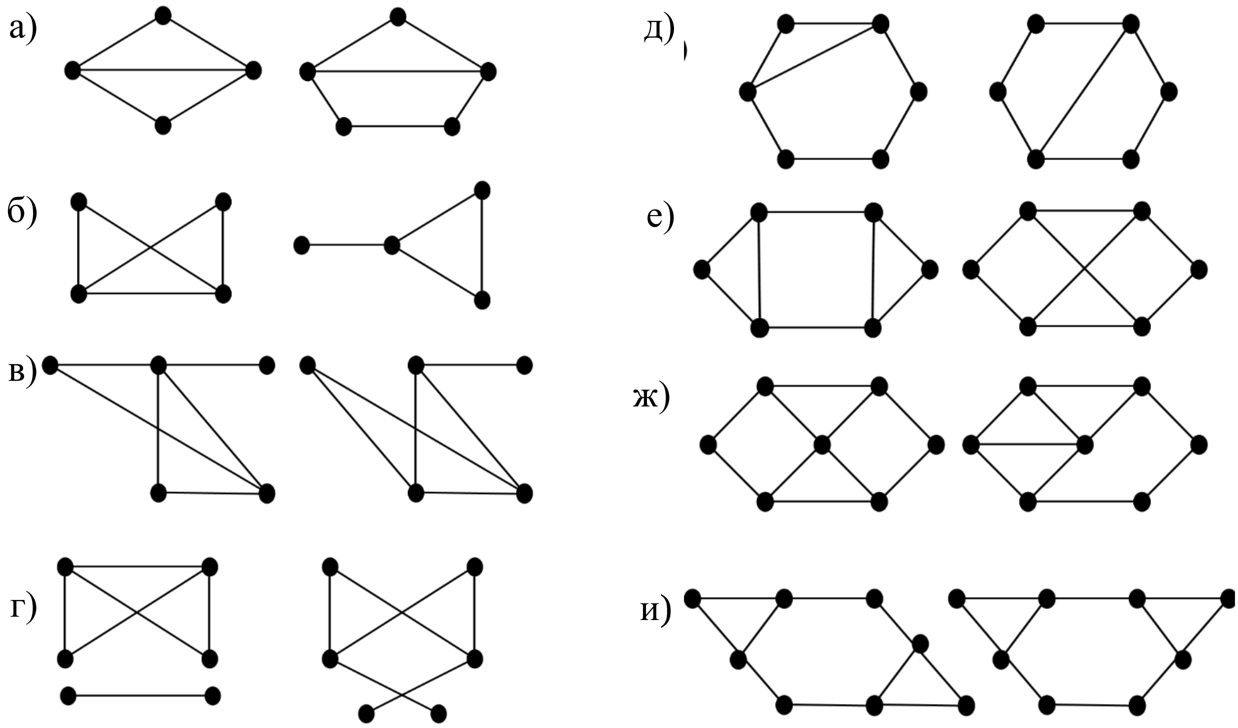


Рис. 4.2. Пари неізоморфних графів

Ізоморфізм можна продовжити на множину маршрутів графу аналогічно тому, як його було продовжено на множину ребер. Маршруту $S = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ у графі G_1 поставимо у відповідність маршрут $\varphi''(S) = (\varphi(v_0), \varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_k))$ у графі G_2. Оскільки φ – ізоморфізм, вказане відображення φ'' буде взаємно однозначним відображенням множини маршрутів G_1 на множину маршрутів G_2. Воно зберігає довжину маршруту, а також властивості маршруту бути простим ланцюгом, повним простим ланцюгом, максимальним простим ланцюгом, циклом, простим циклом. З цих міркувань випливає наступна теорема.

Теорема 4.6. В ізоморфних графах для довільного k ($k \geq 0$) існує взаємно однозначна відповідність:

1) між множинами простих ланцюгів довжини k;

2) між множинами простих циклів довжини k.

Висновок 4.1. Ізоморфізм зберігає відстань між вершинами графу.

Висновок 4.2. Для зв'язного графу ексцентриситет вершин, діаметр та радіус є інваріантами.

Рівність інваріантів є необхідною умовою ізоморфності графів, проте не є достатньою, тобто графи з однаковими значеннями деяких інваріантів не обов'язково ізоморфні. Наприклад, графи на рис. 4.1 *в* для довільного $k \geq 0$ мають однакові кількості вершин степеня k та однакові кількості простих циклів довжини k, але не є ізоморфними. Проте вершини степеня 3 в них мають різні ексцентриситети.

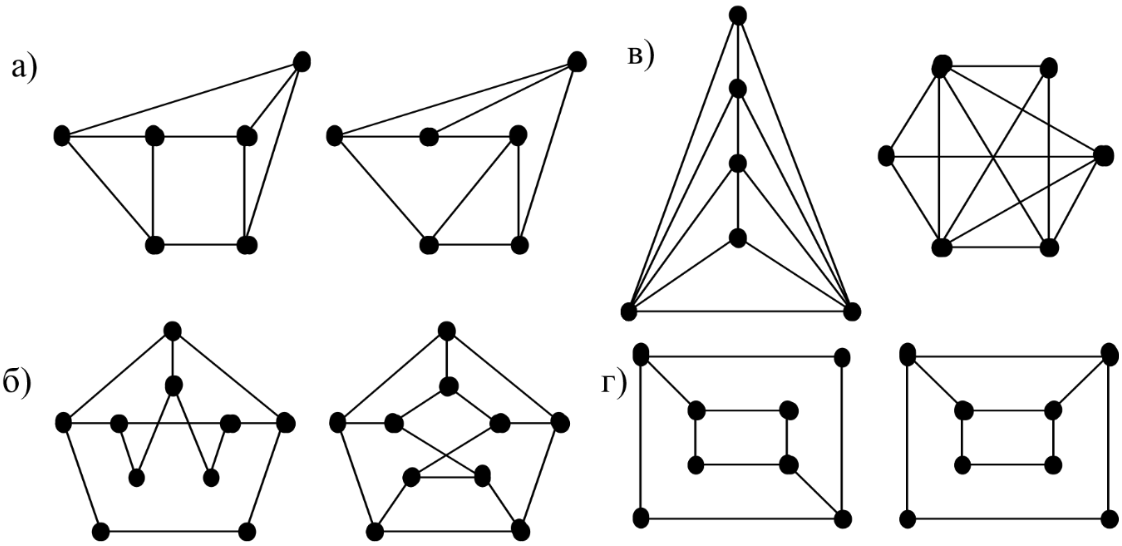


Рис. 4.3. Пари графів

Задачі

4.2. Довести, що графи неізоморфні, якщо при деякому $k (k \geq 0)$ кількості вершин степеня k в графах різні.

4.3. Довести, що в ізоморфних графів кількості простих циклів довжини k однакові за будь-якого k.

4.4. Довести, що ізоморфні графи мають однакові кількості компонент зв'язності.

4.5. Пояснити, чому пари графів, зображені на рис. 4.2, не є ізоморфними.

4.6. Серед пар графів, зображених на рис. 4.3, визначити пари ізоморфних і пари неізоморфних графів. Відповіді обґрунтувати.

4.7. Довести, що для довільного $n \geq 2$ з точністю до ізоморфізму існують лише два графи з n вершинами, в яких $n - 1$ вершина має попарно різні степені, причому з цих двох графів рівно один є зв'язним.

4.8. Побудувати нетривіальний граф з найменшою кількістю вершин, який не має нетривіальних автоморфізмів.

4.9. Побудувати нетривіальний ациклічний граф з найменшою кількістю вершин, який не має нетривіальних автоморфізмів.

4.10. Побудувати всі попарно неізоморфні графи із шістьма вершинами, степені яких дорівнюють 2, 2, 3, 3, 3, 5.

4.11. Скільки існує попарно неізоморфних графів, які мають:

а) 7 вершин і 18 ребер;

б) 8 вершин, сума степенів яких не менше 53;

в) 10 вершин і 43 ребра;

г) n вершин і $\frac{n(n-1)}{2} - 2$ ребер?

4.3. Самодоповнювальні графи

Самодоповнювальним називається граф, ізоморфний своєму доповненню.

Наприклад, самодоповнювальними є графи, зображені на рис. 4.4. Самодоповнювальним також є тривіальний граф.

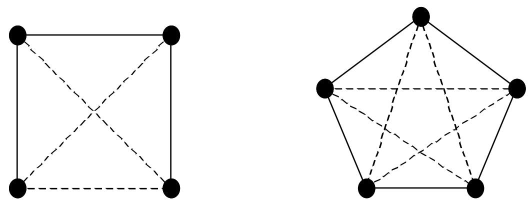


Рис. 4.4. Самодоповнювальні графи

Теорема 4.7. Кількість вершин будь-якого нетривіального самодоповнювального графу дорівнює або $4k$, або $4k+1$, $k \in N$.

Доведення. Нехай самодоповнювальний граф $G = (V, E)$ має n вершин. $G \cong \bar{G}$, тому граф і його доповнення мають однакові кількості ребер. Тоді з того, що $G \cup \bar{G} = K_n$, випливає, що $|E| = \frac{n(n-1)}{4}$. Це число буде цілим, якщо n чи $n-1$ ділиться на 4 без остачі, тобто $n = 4k$ чи $n - 1 = 4k$, або $n = 4k + 1$, при деякому натуральному k. При $n = 4k + 3$ або $n = 4k + 2$ число $\frac{n(n-1)}{4}$ не є цілим і не може виражати кількість ребер. $\blacksquare$

Висновок 4.3. Довільний самодоповнювальний граф містить або $4k^2 - k$, або $4k^2 + k$ ребер, $k \in N$.

Доведення. Для тривіального графу твердження очевидне. Якщо $n = 4k$, то $|E| = \frac{n(n-1)}{4} = k(4k-1) = 4k^2 - k$. Якщо $n = 4k+1$, то $|E| = \frac{n(n-1)}{4} = (4k+1)k = 4k^2 + k$. $\blacksquare$

Задачі

4.12. Чи існує самодоповнювальний граф, у якого кількість вершин дорівнює:

а) 6; б) 7; в) $4k-1$, $k \in N$?

4.13. Описати всі дерева, які є самодоповнювальними графами.

4.14. Чи існує самодоповнювальний граф, у якого кількість ребер дорівнює:
а) 5;　　б) 7;　　в) $4k^2 - 2,\ k \in N$?

4.15. Довести, що самодоповнювальний граф завжди зв'язний.

4.16. Довести, що в нетривіальному самодоповнювальному графі немає ізольованих вершин та вершин, суміжних з усіма іншими.

4.17. Довести, що в самодоповнювальному графі з n вершинами кількості вершин степеня k та степеня $n - k - 1$ однакові ($0 \leq k \leq n - 1$).

4.18. Довести, що існує тільки один самодоповнювальний граф із чотирма вершинами.

4.19. Довести, що існує тільки два самодоповнювальні графи з п'ятьма вершинами.

4.20. Довести, що діаметр нетривіального самодоповнювального графу дорівнює або 2, або 3.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

1. Що ми називаємо ізоморфізмом?
2. Які графи ми називаємо самодоповнювальними?

ТЕМА 5
СПЕЦІАЛЬНІ ВИДИ ГРАФІВ. ДЕРЕВО, ЛІС

5.1. Означення дерева, лісу. Властивості дерев

Ациклічний зв'язний граф називається *деревом. Кістяковим деревом* графу називається такий його суграф (підграф, що містить усі вершини графу), що є деревом. Граф без циклів називають ациклічним, ациклічний зв'язний граф – *деревом,* довільний ациклічний граф – *лісом.* Відповідно кістяковим лісом графу називається пряма сума кістякових дерев усіх компонент зв'язності графу. Кістяковий ліс зв'язного графу складається з єдиного дерева.

Означення 5.1. ***Лісом*** називається граф, який не містить циклів. Зв'язний ліс називається ***деревом.***

Кістякові дерева з'явилися в роботах Кірхгофа, який у 1847 р. розробив теорію дерев для визначення сили струму в кожному провіднику та кожному контурі електричної схеми. Пізніше, в 1857 р., Келі розглядав дерева як модель насичених вуглеводнів та розв'язав задачі перерахування дерев.

Очевидно, що зв'язними компонентами лісу є дерева, тому кожен ліс можна зобразити у вигляді прямої суми дерев.

Дерева – це особливий і дуже важливий клас графів. Особлива роль дерев визначається як широким їх застосуванням у різних галузях науки і практики, так і тим особливим положенням, яке дерева займають у самій теорії графів. Останнє випливає з граничної простоти будови дерев. Часто під час розв'язування різних задач теорії графів їх дослідження починають із дерев.

Дерева (в основному кореневі орієнтовані з навантаженими вузлами та дугами) широко використовуються в обробці інформації – наприклад, пошук та сортування, трансляція, стискання даних та штучний інтелект.

Основні властивості дерев

Теорема 5.1. Для довільного графу $T = (V,\ E)$ з n вершинами і m ребрами вказані твердження рівносильні:

1) T – дерево (ациклічний зв'язний граф);

2) T – зв'язний граф і $m = n - 1$;

3) T – ациклічний граф і $m = n - 1$.

Доведення

(1)⇒(2) За означенням дерева достатньо довести, що $m = n - 1$. Зробимо це індукцією за кількістю вершин n. При $n = 1$ та $n = 2$ деревами є K_1 і K_2, в яких $m = n - 1$. Нехай твердження виконується для всіх дерев з кількістю вершин не більше t $(t \geq 2)$. Розглянемо довільне дерево з $t + 1$ вершиною й вилучимо з нього довільне ребро. Граф ациклічний, тому за теоремою 5.2:

Теорема 5.2. Нехай G' – це граф, який одержано після вилучення зі зв'язного графу $G = (V, E)$ деякого ребра $e \in E$. Тоді:

а) граф G' зв'язний, якщо ребро е належить циклу в графі G;

б) граф G′ незв'язний, і має тільки дві компоненти зв'язності, якщо ребро е не входить у жодний цикл у графі G одержимо граф з двома компонентами зв'язності. Кількості вершин t_1 і t_2 у цих компонентах не більше t, тому для них виконується припущення індуції, тобто загальна кількість ребер в одержаному графі дорівнює $(t_1 - 1) + (t_2 - 1)$, причому $t_1 + t_2 = t + 1$. З урахуванням вилученого ребра загальна їх кількість у дереві з $t + 1$ вершиною дорівнює $(t_1 - 1) + + (t_1 - 1) + 1 = t$. Отже, за індукцією твердження доведено.

(2)⇒(3) Достатньо довести ациклічність. Припустимо супротивне: зв'язний граф з $n - 1$ ребрами має цикл. Тоді будь-яке ребро, що входить до складу цього циклу, можна вилучити, і за теоремою 5.2 одержати зв'язний граф. У цьому графі залишиться $n - 2$ ребра, а це неможливо за теоремою 5.3:

Теорема 5.3. В довільному графі з n вершинами, k компонентами зв'язності і кількістю ребер m задовольняються нерівності $n - k \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$), причому ці оцінки є досяжними

Тому зв'язний n-вершинний граф повинен мати принаймні $n - 1$ ребро. Суперечність.

(3)⇒(1) Достатньо довести зв'язність графу. Припустимо супротивне: нехай він має k компонент зв'язності з кількостями вершин $n_1, n_2, \dots, n_k$; $n_1 + n_2 + \cdots + + n_k = n$. Граф ациклічний, тому кожна його компонента зв'язності є деревом, і за переходом (1)⇒(2) i-ша компонента має $n_i - 1$ ребро. Тоді граф має $(n_1 - 1) + + (n_2 - 1) + \cdots + (n_i - 1) = n - k$ ребер. За умовою кількість ребер дорівнює $n - 1$, тому $k = 1$, тобто граф зв'язний. □

4) Будь-які дві вершини графу $T = (V, E)$ сполучаються єдиним простим ланцюгом;

5) $T = (V, E)$ – ациклічний граф, який має властивість: сполучивши ребром будь-яку пару його несуміжних вершин, отриманий граф міститиме рівно один цикл.

Означення 5.2. Вершина $v \in W$ називається кінцевою вершиною, якщо $d(v) = 1$.

Теорема 5.4. У будь-якому дереві з n вершинами, $(n \geq 2)$, є принаймні дві кінцеві вершини.

Теорема 5.5. Число різних дерев, які можна побудувати на n даних вершинах, дорівнює $t_n = n^{n-2}$.

Задачі

5.1. Довести, що граф з $n \geq 2$ вершинами є деревом тоді й тільки тоді, коли для будь-яких різних вершин v і w в ньому існує тільки один простий ланцюг, що веде з v в w.

5.2. Побудувати всі попарно неізоморфні дерева, які мають:
а) 6 ребер та 3 кінцеві вершини;
б) 6 ребер та 4 кінцеві вершини;
в) 7 ребер та 3 кінцеві вершини;
г) 8 ребер та 3 вершини степеня.

5.3. Довести, що граф з $n \geq 2$ вершинами є деревом тоді й тільки тоді, коли граф зв'язний, і після вилучення будь-якого ребра стає незв'язним.

5.4. Довести, що граф з $n \geq 2$ вершинами є деревом тоді й тільки тоді, коли граф ациклічний, але після проведення ребра між будь-якими двома несуміжними вершинами в графі з'являється рівно один простий цикл.

5.5. Побудувати три попарно неізоморфні дерева, в яких для будь-якого $k > 0$ кількість вершин степеня k однакова.

5.6. Довести, що коли граф з n вершинами має більше ніж $n - 1$ ребро, тоді він має принаймні один цикл.

5.7. Довести, що будь-яке дерево є двочастковим графом.

5.8. Описати всі дерева, доповнення яких також є деревами.

5.9. Довести, що ліс, який має n вершин і складається з k дерев, містить $n - k$ ребер.

5.1.1. Кінцеві вершини в деревах

Задачі даного підпункту демонструють, що можлива кількість кінцевих вершин у деревах має обмеження, пов'язані з максимальним степенем внутрішніх вершин.

Задачі

5.10. Довести, що будь-яке дерево з n вершинами $(n \geq 2)$, має не менше двох кінцевих вершин.

5.11. Довести, що будь-яке дерево з n вершинами $(n \geq 2)$, у якому є хоча б одна вершина степеня s, має не менше s кінцевих вершин.

5.12. Довести, що в дереві з n вершинами $(n \geq 3)$, в якому найбільший степінь вершини дорівнює s, кількість кінцевих вершин не більше $\left(\frac{n(s-2)+2}{s-1}\right)$.

5.13. Довести, що кількість кінцевих вершин у дереві з $n(n \geq 2)$ вершинами, серед яких немає вершин степеня 2, не менше $\frac{n}{2} + 1$.

5.14. Довести, що зв'язний граф з n вершинами $(n \geq 3)$, кількість кінцевих вершин якого збігається з кількістю ребер, є деревом.

5.1.2. Центральні вершини в деревах

Центральні вершини графів за означенням мають найменший ексцентриситет, тобто максимальну з відстаней від інших вершин. Кажучи неформально, до окраїни від центра завжди ближче, ніж від протилежної окраїни. Отже, виникає задача визначення центру графу і, зокрема, центру дерева. Розглянемо на неформальному рівні один доволі ефективний алгоритм визначення центру дерева.

З дерева одночасно вилучаються всі його кінцеві вершини. Оскільки під час цього не порушується зв'язність і не з'являються цикли, граф залишається деревом. При цьому відстань між найбільш віддаленими вершинами зменшується на 2, тобто парність діаметра не змінюється. Далі ця операція повторюється доти, поки не залишиться одна вершина (якщо діаметр початкового дерева парний) або дві суміжні (якщо непарний). Це і є центр.

У даному підпункті доводяться твердження, які обґрунтовують наведений алгоритм і уточнюють властивості дерев. Спочатку доведемо два допоміжні твердження.

Лема 5.1. Ексцентриситет вершини дерева досягається на кінцевій вершині.

Доведення. Нехай вершина u має ексцентриситет $e(u)$. Якщо вершина v, для якої $d(u, v) = e(u)$, не кінцева, то простий ланцюг з u в v можна продовжити принаймні на 1. ∎

Лема 5.2. Нехай $D(T_1) \geq 2$, з T_1 вилучено всі кінцеві вершини й одержано дерево T_2. Тоді:

а) ексцентриситет довільної вершини в T_2 на 1 менший, ніж у T_1;

б) центри дерев збігаються;

в) $R(T_2) = R(T_1) - 1$;

г) якщо $L = (v_1, v, \dots, w, w_1)$ є максимальним ланцюгом у T_1, то $L_2 = (v, \dots, w)$ – максимальний ланцюг у T_2;

д) $D(T_2) = D(T_1) - 2$.

Доведення

а) Нехай u – довільна вершина. Якщо $L = (u, \dots, v_2, v)$ – простий ланцюг у T_1, на якому досягається відстань $e_{T_1}(u)$, то ексцентриситет вершини u в T_2 не менший $d_{T_2}(u, v_2) = e_{T_1}(u) - 1$.

Нехай $L = (u, \dots, v)$ – простий ланцюг у T_2, на якому досягається відстань $e_{T_2}(u)$. За лемою 5.1, вершина v є кінцевою в T_2. Тоді вона не кінцева в T_1, і в T_1 існує ребро (v, w), де w – кінцева вершина в T_1, яка не належить L. Отже, ексцентриситет вершини в T_1 більший, ніж у T_2. Поєднуючи оцінки, маємо $e_{T_2}(u) = e_{T_1}(u) - 1$.

б) Ексцентриситет кожної вершини в T_2 рівно на 1 менший, ніж у T_1, тому кожна вершина з найменшим ексцентриситетом у T_2, тобто центральна, є центральною й у T_1. З іншого боку, за лемою 5.1 та з урахуванням того, що $D(T_1) \geq 2$, усі центральні вершини T_1 не є кінцевими, тому є центральними й у T_2.

в) З ***а*** за означенням радіуса маємо $R(T_2) = R(T_1) - 1$.

г) Кожен повний ланцюг у дереві T_1 починається й закінчується в кінцевих вершинах. У разі їх вилучення довжина ланцюга зменшується на 2, тому найбільша довжина буде в ланцюгів дерева T_2, що є «залишками» максимальних у T_1. Звідси ланцюг $L_2 = (v, \dots, w)$ є максимальним у T_2, оскільки на 2 коротший за L.

д) Оскільки в дереві діаметр дорівнює довжині максимального ланцюга, з **г** маємо $D(T_2) = D(T_1) - 2$. ∎

Наступне твердження обґрунтовує правильність наведеного вище алгоритму визначення центру дерева.

Теорема 5.6. У довільному дереві T центр складається з однієї вершини, якщо $D(T)$ – парне число, і з двох суміжних вершин, якщо непарне.

Доведення. Послідовність застосувань операції вилучення кінцевих вершин породжує послідовність дерев, які згідно з лемою 5.2, мають однакові центри та діаметри тієї самої парності. Кожне застосування зменшує діаметр на 2, тому послідовність скінченна. Якщо діаметр дерева T парний, залишиться дерево, діаметр якого 0, інакше – 1. У першому випадку це дерево складається з єдиної вершини, і вона є центром T. У другому – з двох вершин, які є центром T. ∎

Задачі

5.15. Радіус $R(T)$ і діаметр $D(T)$ довільного дерева T пов'язані рівністю $R(T) = [\frac{D(T)+1}{2}]$. Знайти радіус і діаметр.

5.16. Довести, що в дереві з непарним діаметром будь-які два прості ланцюги максимальної довжини мають принаймні одне спільне ребро.

5.2. Кістякові дерева й ліси

Кістяковим (*каркасним*) деревом зв'язного графу $G = (V,\ E)$ називають дерево $T = (V, ET)$, таке, що $ET \subseteq E$.

Кістяковим (*каркасним*) лісом незв'язного графу $G = (V,\ E)$ називають сукупність кістякових (каркасних) дерев зв'язних компонент графу G.

Щоб отримати кістякове дерево зв'язного графу $G = (V,\ E)$, можна послідовно вилучати з нього ребра, що входять до складу хоча б одного циклу. За теоремою 5.4 кожного разу одержується зв'язний граф. Граф скінченний, тому на деякому кроці залишиться ациклічний зв'язний граф, який буде кістяковим деревом графу. Водночас ми вилучимо $|E| - |V| + 1$ ребер. Зауважимо, що ребро зв'язного графу, інцидентне кінцевій вершині, входить в усі зв'язні суграфи графу, оскільки вилучення такого ребра робить відповідну вершину ізольованою.

Для побудови кістякового лісу для незв'язного графу треба побудувати кістякове дерево для кожної його компоненти зв'язності. Ця операція потребує вилучення $|E| - |V| + k$ ребер, де k – кількість компонент зв'язності графу.

З наведеного алгоритму випливає наступне твердження.

Теорема 5.7. Зв'язний граф має кістякове дерево.

Задачі

5.17.1. Для отримання кістякового дерева зв'язного графу $G = (V, E)$ треба вилучити $|E| - |V\ | + 1$ ребро.

Розв'язання

Кількість ребер, що залишаться в кістяковому дереві графу G, дорівнюватиме $|V| - 1$, отже, має бути вилучено $|E| - (|V| - 1) = |E| - |V| + 1$ ребро.

5.17.2. Нехай граф $G = (V,\ E)$ має k компонент зв'язності. Для отримання його кістякового лісу з графу G потрібно вилучити $|E| - |V| + k$ ребер. Для доведення цього твердження потрібно застосувати результат попередньої задачі до кожної компоненти зв'язності графу G, відтак підсумувати результати.

5.18. Довести, що діаметр дерева T з $n+1$ вершиною $(n \geq 2)$ дорівнює 2 тоді й тільки тоді, коли $T = K_{1,n}$.

5.2.1. Цикломатичне число графу

Число $|E| - |V| + k$ називають *цикломатичним числом* графу G і позначають $\nu(G)$.

Граф $G = (V, E)$ називають *двочастковим,* якщо існує таке розбиття $\{V_1, V_2\}$ множини його вершин V на дві підмножини (частки), що для довільного ребра $(v, w) \in E$ або $v \in V_1$ і $w \in V_2$, або $v \in V_2$ і $w \in V_1$.

Двочастковий граф $G = (V, E)$ називають *повним двочастковим,* якщо для будь-якої пари вершин його часток $v \in V_1$ і $w \in V_2$ маємо $(v, w) \in E$. Якщо $|V_1| = m$ і $|V_2| = n$, то повний двочастковий граф G позначають $K_{m,n}$.

Відоме таке твердження (теорема Кеніга): граф є двочастковим тоді й тільки тоді, коли всі його цикли мають парну довжину.

Нехай граф $G = (V\ E)$ має k компонент зв'язності. Кількість $\nu(G) = |E| - - |V| + k$ ребер, які необхідно вилучити з графу для одержання його кістякового лісу, називається *цикломатичним числом* графу G. У довільному графі G воно дорівнює сумі цикломатичних чисел його зв'язних компонент, які за теоремою 5.5 невід'ємні.

Отже, справджується наступна теорема.

Теорема 5.8. Граф G є лісом тоді й тільки тоді, коли $\nu(G) = 0$.

Задачі

5.19. Довести, що граф G зв'язний тоді й тільки тоді, коли він має кістякове дерево.

5.20. Довести, що граф (простий цикл парної довжини C_{2k}) є двочастковим графом.

5.21. Довести, що будь-яке дерево є двочастковим графом.

5.2.2. Побудова кістяків

Теорема 5.9. Будь-який ациклічний підграф довільного графу G є підграфом деякого кістякового лісу графу G.

Доведення. Позначимо всі ребра, що складають ациклічний підграф. Якщо в графі є цикли, то будь-який простий цикл складається не лише з позначених ребер. Будемо послідовно вилучати непозначені ребра, що входять у прості цикли.

Це не збільшує кількості зв'язних компонент. Зрештою буде одержано кістяковий ліс, що містить даний ациклічний підграф. ■

Теорема 5.8. Нехай $T_1 = (V,\ E_1)$ і $T_2 = (V,\ E_2)$ – кістякові дерева зв'язного графу $G = (V,\ E)$. Для будь-якого ребра $e \in E_1$ дерева T_1 існує ребро $g \in E_2$ дерева T_2, таке, що граф $T = (V, (E_1 \backslash \{e\}) \cup \{g\})$ також є кістяковим деревом графу G.

Доведення. Якщо ребро e належить обом деревам, покладемо $g = e$, тоді $T = (V, (E_1 \backslash \{e\}) \cup \{g\}) = (V, E_2) = T_1$.

Нехай $e \notin E_2$. Множина ребер $E_1 \backslash \{e\}$ є кістяковим лісом; позначимо ребра цієї множини й додамо до неї множину ребер E_2. Одержаний граф G_1 зв'язний, оскільки містить кістякове дерево T_2 графу G. Він є підграфом графу G, тому кожне його кістякове дерево є кістяковим деревом графу G. Множина позначених ребер утворює ациклічний підграф у графі G_1, тому аналогічно теоремі 5.7, для G_1 існує кістякове дерево, що містить позначений ациклічний підграф. Це кістякове дерево складається з $|V| - 2$ позначених ребер множини $E_1 \backslash \{e$ і ще одного ребра, яке повинно належати множині E_2, що й треба було довести. ■

Теорема 5.9. Для довільного зв'язного графу G існує кістякове дерево T, у якому $R(T) = R(G), D(T) \leq 2R(G) \leq 2D(G)$.

Доведення. Очевидно, що радіус кістяка не менше радіуса графу. Побудуємо кістяк, на якому досягається рівність. Для цього нам знадобиться низка означень.

Простий ланцюг, що веде з вершини v в w, називається *мінімальним,* якщо його довжина дорівнює $d(v, w)$. Якщо для деяких двох різних ланцюгів Z та Y множина їх спільних вершин збігається з множиною вершин ланцюга Z, то кажуть, що ланцюг Z *включається в* Y.

Нехай граф має радіус R. Розглянемо два мінімальні ланцюги, що ведуть з вершин v й w у центральну вершину u $(v \neq w, v \neq u, w \neq u)$. Нехай це ланцюги $(v = v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1} = u)$, де $n = d(v, u) \leq R$, та $(w = w_1, w_2, \dots, w_m, w_{m+1} = = u)$, де $m = d(v, u) \leq R$. *Точками збігу* цих простих ланцюгів зі спільним кінцем u називаються вершини v_i та w_j $(v_i \neq u, w_j \neq u)$, що належать обом ланцюгам, причому частини ланцюгів після цих вершин уже не відрізняються, тобто $v_i = w_j$, $n - i = m - j$, $v_{i+d} = w_{j+d}$ при $d \in \{0,1, \dots, n - i + 1\}$. *Точками перетину* цих простих ланцюгів зі спільним кінцем u називаються вершини, відмінні від u, що належать обом ланцюгам і не є точками збігу.

Ми розглядаємо мінімальні ланцюги, тому їх частини від точок перетину до вершини u також є мінімальними ланцюгами.

Нехай є множина L мінімальних ланцюгів, що ведуть в вершину u, причому жодні два з них не мають точок перетину (але можуть мати точки збігу). Для довільного мінімального ланцюга, що веде в u й не належить L, визначимо *множину точок збігу з* L як найбільшу з множин точок збігу з ланцюгами з L, а також *множину точок перетину з ланцюгами з* L як об'єднання точок перетину даного ланцюга з кожним ланцюгом з L.

Означимо *операцію додавання ланцюга* Z_0 *до* L.

- Якщо Z_0 не має точок перетину з L, додамо його до L.
- Якщо $Z_0 = (w = w_1, w_2, \dots, w_m, w_{m+1} = u)$, де $m = d(w, u) \leq R$, перетинається з L у k точках, то розглянемо точку перетину, що має найменший індекс у Z_0, тобто першу точку перетину; нехай це точка $v_i = w_j$, що належить деякому ланцюгу Z з L, $Z = (v = v_1,\ v_2, \dots, v_n,\ v_{n+1} = u), n = d(v, u) \leq R$. Додамо до L ланцюг $Z_1 = (w = w_1, w_2, \dots, w_j = v_i, v_{i+1}, \dots, v_n, v_{n+1} = u)$, якщо він не включається в жоден ланцюг з L. За побудовою він не перетинається з жодним ланцюгом з множини L і є мінімальним ланцюгом. Ланцюг $Z_2 = (w_j + 1, \dots, w_m, w_{m+1} = u)$ – частина Z_0 від точки першої перетину до вершини u – також є мінімальним. Кількість точок перетину Z_2 з отриманою множиною L дорівнює $k - 1$, що строго менше, ніж було в Z_0. Застосуємо операцію додавання до Z_2 рекурсивним способом. Отже, за скінченну кількість кроків до L можна додати такі прості ланцюги, що всі вершини ланцюга Z_0 будуть наявні серед вершин ланцюгів з множини L.

Нарешті, розглянемо *алгоритм побудови кістякового дерева з найменшим радіусом.* Для кожної вершини графу, окрім центральної вершини u, побудуємо один мінімальний ланцюг, що веде з неї в u, і сформуємо з цих ланцюгів множину LL. Довжини всіх цих ланцюгів не більше радіуса графу. Вилучимо з LL усі ланцюги, що включаються в інші ланцюги з LL. Множина L на початку роботи алгоритму порожня. Виберемо з LL один із ланцюгів найбільшої довжини та перемістимо його в множину L.

Далі на кожному кроці обираємо довільний ланцюг з LL та описаним вище алгоритмом додаємо до L так, щоб кожна вершина обраного ланцюга була наявна в деякому ланцюзі з L. Вилучаємо оброблений ланцюг з LL. Щоразу в ланцюгів множини L немає точок перетину, а їх довжини не більша радіуса графу (оскільки вони є мінімальними ланцюгами до центральної вершини u). Коли множина LL стане порожньою, L буде містити прості ланцюги, які не мають точок перетину й накривають усі вершини графу.

Об'єднання ланцюгів з L утворює дерево T. За побудовою, як тільки два ланцюги мають спільну точку, вони збігаються від неї до вершини u. Отже, об'єднання ланцюгів з L є ациклічним зв'язним підграфом, що містить усі вершини графу. Відстань у дереві T від кожної вершини графу до вершини u не більше $R(G)$, оскільки відповідає мінімальному ланцюгу. Звідси: $R(T) = R(G)$ і $D(T) \leq \leq 2R(G) \leq 2D(G)$. ∎

Задачі

5.22. Довести, що будь-яке ребро зв'язного графу G є ребром деякого кістякового дерева графу G.

5.23. Довести, що довільне кістякове дерево T_1 графу G можна перетворити в будь-яке інше кістякове дерево T_2 графу G, послідовно замінюючи одне ребро з T_1 на ребро з T_2 так, що на кожному кроці отримуємо кістякове дерево графу G.

5.24. Для довільного k $(k > 2)$ побудувати граф, діаметр якого дорівнює k, а будь-яке його кістякове дерево має діаметр $2k$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

1. Довести, що будь-яке дерево з n вершинами $(n > 2)$ має принаймні дві кінцеві вершини.

2. Довести, що дерево має тільки дві кінцеві вершини тоді і тільки тоді, коли воно є простим ланцюгом.

3. Довести, що після вилучення в дереві будь-якої кінцевої вершини отримуємо дерево.

4. Описати всі дерева, які є самодоповнювальними графами.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

1. Які дерева є повними двочастковими графами?

2. Яку найбільшу та яку найменшу кількість кінцевих вершин може мати дерево з n вершинами? Яку структуру мають відповідні дерева?

3. Скільки ребер містить повний двочастковий граф $K_{n,m}$?

4. Який вигляд має доповнення графу $K_{n,m}$?

5. Чи для кожного натурального числа k існує повний двочастковий граф, кількість ребер якого дорівнює k $(k \geq 2)$?

6. Чому дорівнюють діаметр і радіус повного двочасткового графу $K_{n,m}$?

ТЕМА 6
РОЗФАРБОВУВАННЯ ГРАФІВ

6.1. Хроматичне число графу. Основні поняття

Нехай $G = (V,\ E)$ – довільний граф, а $N_k = \{1,2, \dots, k\}$. Будь-яке відображення $f : V \to N_k$, яке кожній вершині $v \in V$ ставить у відповідність деяке натуральне число $f(v) \in N_k$, називають *розфарбуванням графу* G. Число $f(v)$ називають *кольором* (*фарбою* або *номером фарби*) вершини v.

Розфарбування f графу G називається *правильним,* якщо $(v, w) \in E \Rightarrow f(v) \neq$ $\neq f(w)$, тобто довільні дві суміжні вершини мають різні кольори.

Мінімальним правильним розфарбуванням графу G називають правильне розфарбування для $k = \chi(G)$.

Відповідне розфарбування називається *мінімальним*. До побудови правильного розфарбування та хроматичного числа можуть бути зведені практичні задачі, як-от складання розкладу, розподілу устаткування, проєктування трансмісії та деякі інші.

Мінімальна кількість фарб, для якої існує правильне розфарбування графу G, називається *хроматичним* (*вершинним*) *числом* графу G й позначається $\chi(G)$.

Для певних типів графів визначити хроматичні числа нескладно. Наприклад, 1-хроматичними є порожні графи $G = (V, \emptyset)$ і тільки вони. Хроматичне число повного графу K_n дорівнює n, а хроматичне число довільного двочасткового графу – 2. 2-хроматичні графи часто називають *біхроматичними*.

Хроматичне число порожнього графу дорівнює 1. Якщо граф має хоча б одне ребро, його хроматичне число не менше 2. Очевидно, що для довільного підграфу H графу G справджується нерівність $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Неважко обґрунтувати такі твердження.

Якщо кожна зв'язна компонента графу G потребує для свого правильного розфарбування не більше k фарб, то $\chi(G) \leq k$.

Граф є біхроматичним тоді й тільки тоді, коли він двочастковий. Зокрема, усі дерева та прості цикли парної довжини C_{2k} біхроматичні. Водночас $\chi(C_{2k} + 1) = 3$.

Теорема 6.1. Хроматичне число графу дорівнює найбільшому з хроматичних чисел його зв'язних компонент.

Доведення. Якщо для розфарбування кожної зв'язної компоненти достатньо k фарб, то й для розфарбування всіх зв'язних компонент достатньо k фарб. ∎

Теорема 6.2. Якщо в графі G вершина v має степінь k і граф $G - v$ можна правильно розфарбувати в $k' > k$ кольорів, то граф G можна правильно розфарбувати в k' кольорів.

Доведення. Нехай вершини графу $G - v$ можна правильно розфарбувати в k' кольорів. Вершина v має k суміжних вершин, тому серед k' кольорів є хоча б один, у який не пофарбовано вершини, суміжні з v. Пофарбуємо її в цей колір і одержимо правильне розфарбування всього графу в k' фарб. ∎

Висновок 6.1. Якщо в графі G вершина v має степінь k і $\chi(G - v) > k$, то $\chi(G) = \chi(G - v)$.

Доведення. За теоремою $\chi(G) \leq \chi(G - v)$. Але $G - v \subseteq G$, тому $\chi(G - v) \leq$ $\leq \chi(G)$, і $\chi(G) = \chi(G - v)$. ∎

Висновок 6.2. Якщо $\Delta(G)$ – найбільший зі степенів вершин графу G, то $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$.

Доведення. Застосуємо індукцію за кількістю вершин. Якщо граф має одну чи дві вершини, твердження очевидне. Нехай для всіх графів, кількість вершин у яких дорівнює n $(n \geq 1)$, твердження справджується. Розглянемо граф G з $n + 1$ вершиною й вилучимо з нього довільну вершину v. Одержимо граф $G - v$, у якому $\Delta(G - v) \leq \Delta(G)$. Згідно з припущенням індукції, для його розфарбування достатньо $1 + \Delta(G)$ фарб. Оскільки $\delta(v) \leq \Delta(G) < 1 + \Delta(G)$, за теоремою граф G можна правильно розфарбувати не більш як $1 + \Delta(G)$ фарбами. За принципом математичної індукції твердження доведено. ∎

Задачі

6.1. Доведемо, що для довільного графу G виконується нерівність $\chi(G) \leq$ $\leq \Delta(G) + 1$, де $\Delta(G)$ – найбільший зі степенів вершин графу G.

Доведення. Доведення проведемо індукцією за кількістю n вершин графу G. Для тривіального графу $(n = 1)$ і графів із двома вершинами нерівність виконується. Нехай твердження теореми виконується для всіх графів із кількістю вершин t $(t \geq 2)$. Розглянемо довільний граф G із $t + 1$ вершиною. Вилучимо з нього деяку вершину v. Дістанемо граф G', степені всіх вершин якого не перевищують $\Delta(G)$. Отже, за припущенням індукції, для правильного розфарбування G' потрібно не більше ніж $\Delta(G) + 1$ фарб. Правильне розфарбування для G дістанемо з правильного розфарбування графу G', якщо пофарбуємо вершину v у колір, відмінний від кольорів усіх суміжних із v вершин. Оскільки таких вершин не більше ніж $\Delta(G)$, то для правильного розфарбування графу G достатньо $\Delta(G) + 1$ фарб. ∎

6.2. Визначити хроматичне число:

а) повного графу K_n;

б) повного двочасткового графу $K_{n,m}$;

в) довільного двочасткового графу;
г) простого циклу довжини $2k, k \in N$;
д) простого циклу довжини $2k+1, k \in N$;
е) дерева.

6.3. Довести, що для кожного неповного графу існує правильне розфарбування, за якого принаймні дві вершини графу пофарбовано в один колір.

6.4. Знайти графи, які мають різні хроматичні числа і в яких:
а) кількість вершин степеня k однакова для всіх $k \geq 0$;
б) кількість простих циклів довжини l однакова для всіх l;
в) виконуються обидві умови з пунктів *а* і *б*.

6.5. Довести, що хроматичне число непорожнього графу G дорівнює 2 тоді й тільки тоді, коли граф G не містить циклів непарної довжини.

6.2. Гіпотеза чотирьох фарб і теорема про п'ять фарб для планарних графів

Гіпотеза чотирьох фарб пов'язана з розфарбуванням політичних географічних карт. Вважається, що територія кожної країни є зв'язною областю, а суміжні країни мають спільну межу у вигляді лінії (а не однієї спільної точки). Території суміжних країн фарбуються в різні кольори. Так склалося історично, що окреме місце у теорії графів займають дослідження з розфарбування планарних графів. Це пов'язано зі відомою *проблемою (гіпотезою) чотирьох фарб.* Гіпотеза полягає в тому, що для будь-якої карти достатньо чотирьох фарб.

Ця гіпотеза має еквівалентне формулювання в термінах графів. Областям карти відповідають вершини графу, їх межам – ребра. Очевидно, що цей граф плоский. Отже, гіпотеза чотирьох фарб полягає в існуванні правильного розфарбування вершин довільного планарного графу не більш ніж у чотири кольори.

Грані плоскої карти назвемо *суміжними,* якщо їх межі мають принаймні одне спільне ребро.

Гіпотеза чотирьох фарб виникла у зв'язку з розфарбуванням друкованих географічних карт (звідси й термін «плоска карта») і була сформульована так: *грані довільної плоскої карти можна розфарбувати не більше ніж чотирма фарбами так, що будь- які суміжні грані матимуть різні кольори.*

Згодом з'явилось інше, рівносильне, формулювання гіпотези чотирьох фарб: для правильного розфарбування вершин довільного планарного графу потрібно не більше чотирьох фарб.

Ця гіпотеза виникла в середині XIX ст. Більше ста років дослідники намагалися її довести чи спростувати. Її непрямо підтверджує час (більше століття), протягом якого численні спроби побудувати контрприклади залишалися марними.

Гіпотезу чотирьох фарб доведено для окремих класів графів, наприклад, для графів, що мають не більше 41 вершини. В 1969 р. Х. Хеєш звів проблему чотирьох фарб до дослідження великої, але скінченної множини графів. Внаслідок багаторічних досліджень виявилось, що для розв'язання проблеми чотирьох фарб потрібно перевірити її справедливість для скінченної кількості графів певного вигляду. Кількість варіантів, які потрібно було перебрати, була настільки великою, що її можна було виконати тільки за допомогою ЕОМ. Пізніше кількість графів цієї множини було зведено до 1 482, і вже в 1976 р. (протягом більше двох місяців, застосовуючи ЕОМ, яка працювала неперервно, справедливість гіпотези чотирьох фарб було підтверджено) колективу математиків і програмістів під керівництвом К. Аппеля і В. Хейкена за допомогою ЕОМ вдалося розфарбувати всі ці графи. Однак такий фізичний, експериментальний спосіб доведення не зовсім влаштовує багатьох професіональних математиків, тому вони продовжують пошуки аналітичного доведення гіпотези. У 1996 р. Н. Робертсон, Д. Сендерс, П. Сеймур, Р. Томас запропонували нове, простіше доведення гіпотези чотирьох фарб, але знову з використанням комп'ютера. Проте з повною мірою математичної строгості її не доведено, оскільки, наприклад, не доведено коректність компілятора та коректність виконання побудованого програмного коду, за допомогою якого будувалося розфарбування; до того ж зведення загального випадку до перебору скінченної множини графів і розфарбування останніх складно повторити.

Обмежимося більш слабким результатом (його одержав Хейвуд у 1890 р.).

Набагато простіше можна отримати такі результати.

Теорема 6.1 (про 5 фарб). Для правильного розфарбування довільного планарного графу достатньо п'яти фарб.

Доведення. Оскільки ізоморфні графи мають однакові хроматичні числа, то твердження достатньо довести для плоских графів. Застосуємо індукцію за кількістю вершин. Будь-який плоский граф не більш ніж з 5 вершинами можна правильно розфарбувати у 5 фарб.

Припущення індукції: всі плоскі графи з n $(n \geq 5)$ вершинами можна розфарбувати у 5 фарб. Нехай $G = (V,\ E)$ – плоский граф з $n + 1$ вершиною. У будь-якому планарному графі існує вершина v степеня не більше 5 (задача: Довести, що в будь-якому планарному графі є принаймні одна вершина, степінь якої не більше 5). Граф $G - v$ має n вершин, тому його можна правильно розфарбувати фарбами 1, 2, 3, 4, 5. Нехай це розфарбування задається функцією $f : V\backslash\{v\} \to \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. Якщо деякий колір i (від 1 до 5) не застосовується для вершин, суміжних із v, візьмемо $f(v) = i$, що залишить розфарбування графу правильним.

Нехай $\delta(v) = 5$, і вершини v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, суміжні з v, пофарбовано в усі 5 кольорів, тобто $f(v_i) = i$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Нехай вершини розташовано на площині так, як указано на рис. 6.1.

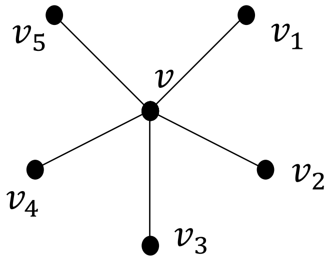


Рис. 6.1. Вершина v та п'ять суміжних із нею

Нехай $V_i = \{x | x \in V \backslash \{v\} \wedge f(x) = i\}$ – множина вершин, пофарбованих i-ю фарбою. Розглянемо $G_{13} = G(V_1 \cup V_3)$ – підграф графу G, визначений множиною вершин $V_1 \cup V_3$.

Якщо вершини v_1 і v_3 належать різним компонентам зв'язності графу G_{13}, то в компоненті, яка містить v_3, міняємо місцями кольори 1 і 3. Отримаємо нову функцію f_1 правильного розфарбування, для якої $f1(v_1) = f1(v_3) = 1, f_1(v_i) = = i, i = 2, 4, 5$. Покладемо $f_1(v) = 3$ і одержимо правильне розфарбування f_1 всього графу у 5 фарб.

Якщо вершини v_1 і v_3 зв'язані в G_{13}, то простий ланцюг, що їх з'єднує, складається лише з вершин кольорів 1 і 3. Цей ланцюг разом з ланцюгом (v_1, v, v_3) дає простий цикл, що обов'язково оточує одну з вершин v_2 чи v_4. В такому разі вершини v_2 і v_4 не можна з'єднати простим ланцюгом, що містить тільки вершини кольорів 2 і 4. Тоді в графі $G_{24} = G(V_2 \cup V_4)$ вершини v_2 і v_4 належать різним компонентам зв'язності. Тоді в компоненті графу G_{24}, що містить вершину v_4, міняємо місцями кольори 2 і 4, утворюючи нову функцію f_1 правильного фарбування, для якої $f_1(v_2) = f_1(v_4) = 2, f_1(v_i) = i, i = 1, 3, 5$. Покладемо $f_1(v) = 4$ і одержимо правильне розфарбування f_1 всього графу у 5 фарб. За принципом індукції твердження доведено. ∎

Задачі

6.6. Довести, що для правильного розфарбування довільного планарного графу потрібно не більше шести фарб.

Доведення. Доведення виконаємо індукцією за кількістю n вершин графу. Для $n \leq 6$ твердження очевидне. Припустимо, що хроматичне число всіх планарних графів із t вершинами не перевищує 6 $(t \geq 6)$. Розглянемо довільний планарний граф G із $t + 1$ вершиною. Згідно з умовою, що в будь-якому планарному графі є принаймні одна вершина, степінь якої не перевищує 5, у графі G існує вершина v, степінь якої не більше 5. Вилучимо вершину v із графу G. Отримаємо граф G', вершини якого, за припущенням індукції, можна правильно розфарбувати не більше ніж у шість кольорів. Тоді правильне розфарбування для G отримаємо з одержаного правильного розфарбування графу G', надаючи вершині v колір, відмінний від кольорів усіх суміжних із нею вершин. Оскільки таких вершин не більше п'яти, то для виконання цієї процедури достатньо шести фарб. Отже, $\chi(G) \leq 6$.

6.7. Довести, що для правильного розфарбування довільного кубічного графу достатньо чотирьох фарб.

6.3. Критичні графи

Граф G називається *критичним,* якщо внаслідок вилучення будь-якої вершини з G утворюється граф G', хроматичне число якого строго менше $\chi(G)$. Або граф G називають критичним, якщо хроматичне число підграфу G', отриманого внаслідок вилучення будь-якої вершини із G, строго менше, ніж хроматичне число графу G. Критичний граф G, для якого $\chi(G) = k$, називається k-*критичним.*

Задачі

6.8. Доведемо, що будь-який повний граф є критичним.

Доведення. $\chi(K_n) = n$, а після вилучення довільної вершини з K_n отримаємо повний граф $K_n - 1$, хроматичне число якого дорівнює $n - 1$. $\square$

6.9. Довести, що довільний критичний граф є зв'язним.

Доведення. Припустимо, що деякий критичний граф G є незв'язним і має кілька компонент зв'язності. Вилучимо довільну вершину з тієї компоненти зв'язності графу G, хроматичне число якої не перевищує хроматичні числа решти компонент зв'язності. Отримаємо суперечність, оскільки після такого вилучення хроматичне число графу G не зміниться. $\square$

Наостанок зауважимо, що існують планарні графи, хроматичне число яких дорівнює 4. Найпростішим таким графом є K_4. Отже, гіпотезу чотирьох фарб не можна вдосконалити, перетворивши на гіпотезу трьох фарб. Різноманітні алгоритми відшукання правильних розфарбувань графів можна знайти у підручниках з теорії графів.

6.10. Довести, що будь-який повний граф є критичним.

6.11. Довести, що простий цикл C_n є критичним графом тоді й тільки тоді, коли кількість його вершин n непарна.

6.12. Довести, що степені всіх вершин k-критичного графу G не менше $k - 1$.

6.13. Довести, що граф 3-критичний тоді й тільки тоді, коли він є простим циклом непарної довжини.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

1. Чому дорівнює хроматичне число повного графу K_n, з якого вилучено одне ребро?

ТЕМА 7
ОРІЄНТОВАНІ ГРАФИ

7.1. Модель орграфу: основні поняття.

7.1.1. Суміжність вершин, інцидентність вершин та ребер, степінь вершини, матриця суміжності.

7.1.2. Обернений граф. Принцип орієнтованої двоїстості.

7.2. Маршрути в орграфах.

7.2.1. Маршрути, шляхи, контури.

7.2.2. Досяжність вершин. Відстань між вершинами.

7.2.3. Класифікація вершин орграфу.

7.3. Нумерація орграфу.

7.4. Турніри.

7.1. Модель орграфу: основні поняття

Крім моделі, розглянутої у попередніх лекціях, у теорії графів досліджують також інші типи графів. Наприклад, *мультиграф* – граф, у якому дозволяються кратні ребра, тобто будь-які дві вершини можна з'єднати кількома ребрами. *Псевдограф* – це мультиграф, який може мати петлі, тобто ребра, що з'єднують вершину саму із собою. *Гіперграф* – граф, у якому ребрами можуть бути не лише двоелементні, але й довільні підмножини множини вершин. Нарешті, важливою для різноманітних практичних застосувань є модель, яку називають *орієнтованим графом* (або *орграфом*).

Для повноти викладу почнемо з означень, які вже були наведені раніше. Нехай V – непорожня скінченна множина, а E – довільна підмножина другого декартового степеня множини вершин, тобто $E \subseteq V \times V$. Пара $(V,\ E)$ називається *орієнтованим графом,* чи *орграфом,* елементи множини V – вершинами, або *вузлами,* а елементи множини E – *орієнтованими ребрами,* або *дугами.* Дуги (v, w) і (w, v) орграфу називаються *симетричними.* Орграф, що не має пар симетричних дуг, називається *направленим.* Кожну пару симетричних дуг між різними вершинами v та w можна розглядати як одне неорієнтоване ребро $\{v, w\}$. Дуга вигляду (v, v) називається *петлею.* Надалі під орграфом будемо розуміти орграф без петель. Отже, за означенням, в орієнтованому графі немає петель та кратних дуг. Отже, дуга – це впорядкована пара вершин; V називають *множиною вершин,* E – *множиною дуг* орграфу G.

Розглянемо наступний приклад турніру між чотирма футбольними командами, в якому кожні дві команди зіграли між собою не більше одного матчу. Так само цей турнір можна подати орграфом, вершинами якого є команди. Якщо дві команди зіграли між собою матч, з'єднаємо відповідні вершини дугою ребром, що веде від команди-переможця до команди, що програла. Якщо дві команди зіграли у нічию, проведемо дві симетричні дуги. Так у футбольному турнірі, представленому в графі на рис. 7.1, команди «Динамо» та «Шахтар» зіграли у нічию, а «Динамо» виграло у «Мілана».

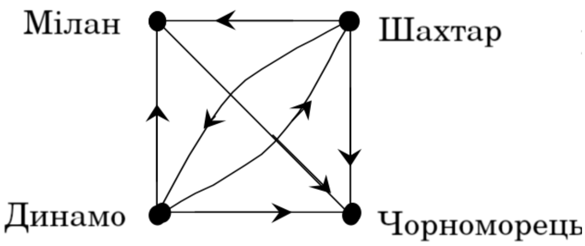


Рис. 7.1. Орграф для подання турніру

7.1.1. Суміжність вершин, інцидентність вершин та ребер, степінь вершини, матриця суміжності

Якщо $e = (v, w)$ – дуга, то вершину v називають *початком,* а вершину w – *кінцем* дуги e. Кажуть, що дуга e *веде* з вершини v у вершину w, або виходить із v і заходить у w. Дугу e та вершини v і w називають *інцидентними* між собою, а вершини v і w – *суміжними.*

Дугу (v, v), у якій початок і кінець збігаються, називають *петлею.* Надалі розглядатимемо тільки орграфи без петель.

Як і звичайний граф, орграф $G = (V, E)$ можна задавати переліком елементів скінченних множин V і E, діаграмою або за допомогою матриць.

Діаграма орграфу відрізняється від діаграми звичайного графу тим, що дуги орграфу зображають напрямленими лініями (відрізками чи кривими), які йдуть від початку до кінця дуги. Напрямок лінії позначають стрілкою.

Півстепенем виходу $\delta^+(v)$ вершини v називається кількість вершин, суміжних *із* v, тобто кількість ребер, що виходять з вершини v; *півстепенем входу* $\delta^-(v)$ – суміжних *до* v, тобто кількість ребер, які входять у v. *Степенем* вершини v називається кількість дуг, інцидентних v, і позначається $\delta(v)$. Оскільки розглядаються орграфи без петель, з цих означень випливає таке твердження.

Теорема 7.1. Для будь-якої вершини v орграфу справджується рівність $\delta(v) = \delta^+(v) + \delta^-(v)$.

В орграфі з n вершинами півстепінь вершини може мати значення від 0 до $n - 1$, а степінь – від 0 до $2(n - 1)$.

Нехай є орграф $G = (V, E)$, де $V = \{1,2,3,4,5,6,7\}, E = \{(1,2), (1,3), (3,4), (2,4), (2,7), (3,7), (4,6), (5,6), (6,7), (7,5)\}$. Його діаграму подано на рис. 7.2.

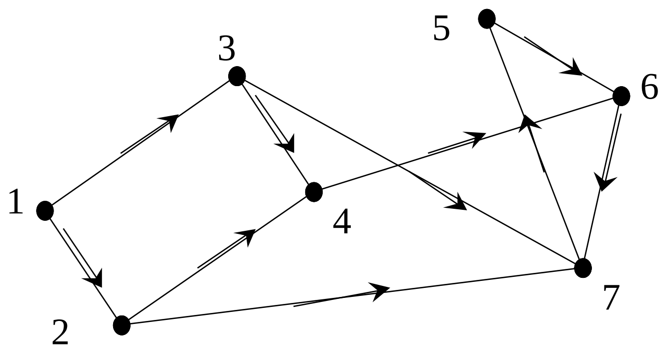


Рис. 7.2. Приклад орграфу для ілюстрації означень

Для цього графу вершина 2 є суміжною з вершиною 1 та суміжною до вершини 4. Обчислимо півстепені та степені вершин: $\delta^+(1) = 2, \delta^-(1) = 0, \delta^+(2) =$ $= 2, \delta^-(2) = 1, \delta^+(3) = 2, \delta^-(3) = 1, \delta^+(4) = 1, \delta^-(4) = 2, \delta^+(5) = 1, \delta^-(5) =$ $= 1, \delta^+(6) = 1, \delta^-(6) = 2, \delta^+(7) = 1, \delta^-(7) = 3; \delta(1) = 2, \delta(2) = 3, \delta(3) =$ $3, \delta(4) = 3, \delta(5) = 2, \delta(6) = 3, \delta(7) = 4.$

Поставимо у відповідність усім вершинам орграфу $G = (V, E)$ натуральні числа від 1 до n; дістанемо множину вершин V у вигляді $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. *Матрицею суміжності* A орграфу G називають квадратну матрицю порядку n, у якій елемент i-го рядка та j-го стовпчика a_{ij} дорівнює 1, якщо $(v_i, v_j) \in E$, і дорівнює 0 в іншому разі.

Занумеруємо всі вершини орграфу $G = (V, E)$ числами від 1 до n, а дуги – числами від 1 до m. *Матрицею інцидентності* B орграфу G називають $n \times m$-матрицю, у якій елемент i-го рядка та j-го стовпчика b_{ij} дорівнює 1, якщо вершина v_i є початком дуги e_j, b_{ij} дорівнює -1, якщо вершина v_i є кінцем дуги e_j, і b_{ij} дорівнює 0, якщо вершина v_i і дуга e_j неінцидентні.

Орграфи $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ називають *ізоморфними,* якщо існує таке взаємно однозначне відображення φ множини V_1 на множину V_2, що дуга $(v, w) \in E_1$ тоді й тільки тоді, коли дуга $(\varphi(v), \varphi(w)) \in E_2$.

Напівстепенем виходу вершини v (позначають $\delta^+(v)$) орграфу G називають кількість дуг орграфу G, початком яких є вершина v.

Напівстепенем заходу вершини v (позначають $\delta^-(v)$) орграфу G називають кількість дуг орграфу G, кінцем яких є вершина v.

Задачі

7.1. Довести, що для довільного орграфу $G = (V, E)$ виконується рівність $\sum_{v \epsilon V} \delta(v) = \sum_{v \epsilon V} \delta^-(v)$.

У будь-якому орграфі G кількість початків його дуг, очевидно, збігається з кількістю їх кінців.

7.2. Чи існує орграф із п’ятьма вершинами, напівстепені виходу вершин якого дорівнюють 4, 2, 1, 0, 1, а відповідні напівстепені заходу – 3, 2, 1, 1, 2?

Ні, адже не виконується рівність із попереднього пункту.

7.3. Чи існує орграф із чотирма вершинами, напівстепені виходу вершин якого дорівнюють 3, 1, 3, 0, а відповідні напівстепені заходу – 1, 2, 1, 3?

Так, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – його матриця суміжності.

7.4. Нехай A – матриця суміжності орграфу G. Довести, що елемент $a_{ij}^{(k)}$ i-го рядка та j-го стовпчика матриці A^k дорівнює кількості шляхів довжиною k, які ведуть в орграфі G з вершини з номером i у вершину з номером j.

Чималу частку властивостей і тверджень щодо звичайних графів можна без змін сформулювати й для орграфів. Зокрема, це стосується цілих розділів (наприклад, планарність або розфарбування графів), у яких властивість орієнтації ребер неістотна. Певні особливості в означеннях, постановках задач і методах їх розв’язання виникають під час дослідження проблем, пов’язаних із маршрутами, зв’язністю, обходами графів тощо.

7.1.2. Обернений граф. Принцип орієнтованої двоїстості

Орграфом, *оберненим* до даного орграфу $G = (V, E)$, називається орграф $G' = (V, E')$, де $E' = \{(w, v) | (v, w) \in E\}$. Інакше кажучи, орграф, обернений до орграфу G, одержується зміною орієнтації кожної дуги орграфу на протилежну (рис. 7.3). Для довільного орграфу G справджується очевидна рівність $G'' = G$, тобто орграф, обернений до оберненого, збігається з початковим орграфом.

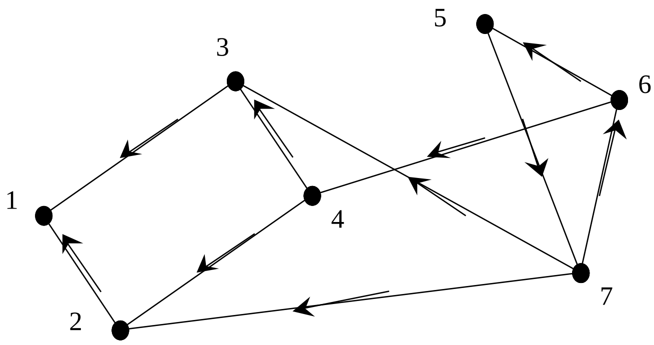


Рис. 7.3. Граф, обернений до графу на рис. 7.2

Нам уже знайомі такі «обернені» поняття, як півстепінь виходу та півстепінь входу. Відносно орієнтації всі поняття пов'язані між собою достатньо потужним принципом.

Принцип орієнтованої двоїстості. Для довільної теореми про орграфи можна сформулювати відповідну двоїсту теорему, замінивши кожне поняття на обернене до нього.

7.2. Маршрути в орграфах

7.2.1. Маршрути, шляхи, контури

Маршрутом, або *шляхом,* в орграфі $G = (V,\ E)$ називають таку послідовність його вершин і дуг $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_k, v_{k+1}$, що $e_i = (v_i, v_{i+1}), i = 1,2, \dots, k$. Кажуть, що цей маршрут *веде* з вершини v_1 у вершину v_{k+1}. Кількість k дуг у маршруті $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_k, v_{k+1}$ називають його *довжиною.*

Як і для графів, розглянутих вище, маршрут $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_k, v_{k+1}$ можна записувати лише як послідовність вершин, що входять до його складу, тобто $v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$.

Для орграфів маршрут означається аналогічно неорієнтованим графам. В орграфі $G = (V,\ E)$ послідовність вершин і дуг $(v_0, e_1, v_1, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n)$, де $v_0, \dots, v_n$ – вершини, $e_i = (v_{i-1}, v_i), 1 \le i \le n,$ – дуги, називається *(орієнтованим) маршрутом.* Дуги e_i та e_{i+1} $(1 \le i \le n-1)$ є *сусідніми* дугами маршруту й мають принаймні одну спільну вершину. Вказаний маршрут *веде* з v_0 у v_n. Цей маршрут можна позначити $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$, не вказуючи його дуги. Число n називається *довжиною маршруту.* Для систематичності міркувань вводиться *тривіальний,* або *нуль-маршрут,* – маршрут, що складається з єдиної вершини й має довжину 0. Інші маршрути вважаються нетривіальними.

Маршрут, у якому всі дуги попарно різні, називають *ланцюгом,* а маршрут, у якому всі вершини попарно різні, – *простим ланцюгом.* Маршрут $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_k, v_{k+1}$ називають *замкненим* (або *циклічним*), якщо $v_1 = v_{k+1}$. Замкнений ланцюг називають *циклом,* а замкнений простий ланцюг – *простим циклом,* або *контуром.*

Для замкненого маршруту його остання та перша дуги вважаються сусідніми. *Кістяковий маршрут* містить всі вершини орграфу. Нетривіальний замкнений ланцюг називається *циклом.* Цикл $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ називається *простим,* або контуром, якщо його вершини $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$ попарно різні. Зауважимо, що тривіальний маршрут є замкненим за означенням. На відміну від неорієнтованих графів, найменша можлива довжина контура дорівнює двом, наприклад, в орграфі $G = (\{1,2\}, \{(1,2), (2,1)\})$ існує контур $(1, 2, 1)$ довжини 2. Цикл, що містить усі дуги орграфу, називається *ейлеровим.* Ланцюг, що містить усі дуги орграфу, також називається *ейлеровим.*

Орграф називають ациклічним (або *безконтурним*), якщо він не має жодного циклу.

Кожен маршрут є орієнтованим від своєї першої вершини до останньої. Для орграфів вводиться також поняття півмаршруту, який не має орієнтації й є аналогічним маршруту в графі. *Півмаршрутом* в орграфі називається послідовність вершин і дуг $(v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n)$, де $v_0, \ldots, v_n$ – вершини, але дугою $e_i, 1 \leq i \leq n$, може бути як (v_{i-1}, v_i), так і (v_i, v_{i-1}) . *Півшлях, півконтур* та інші поняття означаються аналогічно.

У графі на рис. 7.2 існує контур $(5, 6, 7, 5)$, який одночасно є півконтуром, та півмаршрут $(6, 7, 3)$, який не є маршрутом. Також у цьому графі існують шляхи $(1, 3, 4, 6, 7)$ та $(1, 2, 7)$, що ведуть з вершини 1 в вершину 7.

Як і для неорієнтованих графів, якщо $Z_1 = (v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i)$ і $Z_2 = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ – маршрути (півмаршрути), то під $Z_1 \cdot Z_2$ розуміється маршрут (півмаршрут) $(v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$, а під Z_1^{-1} – півмаршрут $(v_i, v_{i-1}, \ldots, v_1, v_0)$.

Задачі

7.5. Чи існує орграф із трьома вершинами, напівстепені виходу вершин якого дорівнюють 2, 2 і 0, а відповідні напівстепені заходу – 2, 1 та 1?

7.6. Довести, що відношення досяжності на множині вершин орграфу транзитивне.

7.2.2. Досяжність вершин. Відстань між вершинами

Якщо існує шлях з вершини v у вершину w, то кажуть, що вершина w досяжна з вершини v; відстанню $d(v, w)$ від вершини v до вершини w називається довжина такого найкоротшого шляху. Кожна вершина вважається досяжною з самої себе. Якщо вершина w недосяжна з вершини v, то цей факт інколи позначають так: $d(v, w) = \infty$.

У графі на рис. 7.2 шлях $(1, 2, 7)$ веде з 1 у 7 і є найкоротшим таким шляхом, тому $d(1, 7) = 2$. Але жоден маршрут не веде з 7 у 1, тобто вершина 1 не є досяжною з вершини 7, і $d(7, 1) = \infty$. Звідси зрозуміло, що відношення на множині вершин орграфу «є досяжною з» у загальному випадку не є симетричним. До того ж $d(7{,}5) = 1$ і $d(5{,}7) = 2$. Отже, відстань між вершинами орграфу не задовольняє аксіому симетричності метрики і не є метрикою.

Вершини v і w називаються взаємно досяжними, якщо w досяжна з v, а v – з w.

Задачі

7.7. Нехай в орграфі вершина u є досяжною з вершини v, а w – з u. Довести, що w є досяжною з v.

7.8. Довести, що в орграфі вершини v і w є взаємно досяжними тоді й тільки тоді, коли вони обидві належать деякому замкненому маршруту орграфу.

7.9. Довести, що коли в орграфі вершина u є досяжною з вершини v, а w – з u, то $d(v,u) + d(u,w) \geq d(v,u)$.

7.2.3. Класифікація вершин орграфу

Якщо існує маршрут, який веде з вершини v у вершину w, то кажуть, що вершина w *досяжна* з вершини v. Тоді *відстанню* $d(v,w)$ від вершини v до вершини w називають довжину найкоротшого маршруту, що веде з v у w.

Вершину v орграфу G називають *джерелом,* якщо з неї досяжна будь-яка інша вершина орграфу G. Вершину w називають *стоком,* якщо вона досяжна з будь-якої іншої вершини орграфу G. Вершина v орграфу G називають *тупиковою,* якщо жодна із вершин орграфу G не досяжна з v. Згідно з означенням, з тупикової вершини не виходить жодного ребра, тому має місце наступна теорема.

Теорема 7.2. Вершина орграфу є тупиковою тоді й тільки тоді, коли вона має нульовий півстепінь виходу.

Вершина, яка не є досяжною з довільної іншої вершини орграфу, називається *недосяжною.* Поняття недосяжної та тупикової вершини також є оберненими поняттями. Згідно з принципом оберненої двоїстості, маємо теорему, аналогічну попередній.

Теорема 7.3. Вершина орграфу є недосяжною тоді й тільки тоді, коли вона має нульовий півстепінь входу.

У графі на рис. 7.2 вершина 1 є недосяжною, а на рис. 7.3 вершина 1 є тупиковою.

Існують типи вершин, протилежні до тупикових та недосяжних. *Сток* визначається двоїстим способом: *стоком* у орграфі називають вершину, яка досяжна з будь-якої вершини орграфу. Наприклад, у графі на рис. 7.2 вершина 1 є джерелом, а вершини 5, 6, 7 – стоками.

Задачі

7.10. Довести, що в повному орграфі може бути не більше однієї недосяжної й не більше однієї тупикової вершини.

7.11. Довести, що в будь-якому повному орграфі є принаймні один сток.

7.12. Довести, що якщо в орграфі з джерелом існує недосяжна вершина, то вона збігається з джерелом.

7.13. Довести, що якщо в орграфі зі стоком існує тупикова вершина, то вона збігається зі стоком.

7.14. Довести, що тупикові та недосяжні вершини орграфу не входять до складу жодного нетривіального замкненого маршруту.

7.3. Нумерація орграфу

Нумерацією орграфу $G = (V,\ E)$ з n вершинами називатимемо взаємно однозначне відображення $f: V \to N_n$, яке кожній вершині $v \in V$ ставить у відповідність натуральне число $f(v)$ із множини $N_n = \{1,2,\dots,n\}$.

Довести, що для ациклічного орграфу $G = (V, E)$ існує така нумерація f, що для будь-якої дуги $(v, w) \in E$ виконується $f(v) < f(w)$.

Цю нумерацію називають *правильною нумерацією,* або *топологічним сортуванням* вершин орграфу G.

Доведення. Неважко довести (методом від супротивного), що ациклічний орграф G завжди має принаймні один сток. Нехай u_1 – сток орграфу G. Покладемо $f(u_1) = n$ і вилучимо з G вершину u_1. Дістанемо ациклічний орграф G_1, у якому існуватиме сток u_2. Покладемо $f(u_2) = n - 1$ і вилучимо u_2 з G_1. Продовжуючи цю процедуру, отримаємо шукану правильну нумерацію. ∎

Послідовність $(v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_k, v_{k+1},$ якщо $e_i = (v_i, v_{i+1}), i = 1,2,\dots,k)$ називають *напівмаршрутом,* якщо кожна дуга e_i цієї послідовності є такою, що або $e_i = (v_i, v_{i+1})$, або $e_i = (v_{i+1}, v_i)$ (можна вважати, що під час побудови напівмаршруту ми ігноруємо орієнтацію дуг орграфу). Аналогічно означають *напівланцюг, напівцикл* і *півконтур.*

Орграф називають *сильно зв'язним,* якщо будь-які дві його вершини досяжні одна з одної. Орграф називають *однобічно зв'язним,* якщо для будь-яких двох його вершин принаймні одна досяжна з іншої. Орграф називають *слабко зв'язним,* якщо для будь-яких двох його вершин існує напівмаршрут, що веде з однієї вершини в іншу. Маршрут в орграфі G називають *кістяковим,* якщо він містить усі вершини орграфу G.

Орграф, у якому є джерело й немає жодного півконтуру, називають *кореневим деревом.*

Вхідне дерево – це орграф, який має сток і не має жодного півконтуру. Орграф називають *функціональним,* якщо напівстепінь виходу кожної його вершини дорівнює 1. Орграф називають *ін'єктивним,* якщо напівстепінь заходу кожної його вершини дорівнює 1.

Ейлеровим контуром в орграфі G називають контур, що містить усі дуги орграфу G. *Ейлеровим орграфом* називають орграф, у якому є ейлерів контур. *Ейлеровим ланцюгом* називають незамкнений ланцюг, що містить усі дуги орграфу.

Наведене нижче твердження можна довести так само, як і для звичайних графів.

Слабко зв'язний орграф $G = (V,\ E)$ є ейлеровим тоді й тільки тоді, коли напівстепінь виходу будь-якої його вершини дорівнює напівстепеню її заходу.

Гамільтоновим контуром називають контур, що містить усі вершини орграфу. Орграф, який має гамільтонів контур, називають *гамільтоновим орграфом.*

Простий незамкнений ланцюг, що містить усі вершини орграфу, називають *гамільтоновим.*

Повний орграф завжди гамільтонів.

Орграф $G = (V, E)$ називають *транзитивним,* якщо з $(v, w) \in \mathrm{E}$ і $(w, u) \in \mathrm{E}$ випливає $(v, u) \in \mathrm{E}$.

Існує взаємно однозначна відповідність між множиною всіх безконтурних транзитивних орграфів $G = (V, E)$ із множиною вершин $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ і петлями в кожній вершині та множиною всіх відношень часткового порядку на V. Ця бієкція встановлюється так: орграфу $G = (V, E)$ відповідає відношення R на V, таке, що $(v_i, v_j) \in R$ тоді й тільки тоді, коли $(v_i, v_j) \in E, v_i, v_j \in V$.

Задачі

7.15. Довести, що для транзитивного повного орграфу завжди існує правильна нумерація.

7.4. Турніри

Турніром, або *повним орграфом,* називається направлений орграф, у якому будь-які дві вершини інцидентні деякій дузі. Інакше кажучи, орграф є турніром тоді й тільки тоді, коли його основа є повним графом. Існує єдиний (з точністю до ізоморфізму) турнір з однією вершиною (рис. 7.4 *а*), єдиний турнір з двома вершинами (рис. 7.4 *б*) і два турніри з трьома вершинами (рис. 7.4 *в, г*). Турнір на рис. 7.4 *в* називається *транзитивною трійкою,* а турнір рис. 7.4 *г* – *циклічною трійкою.*

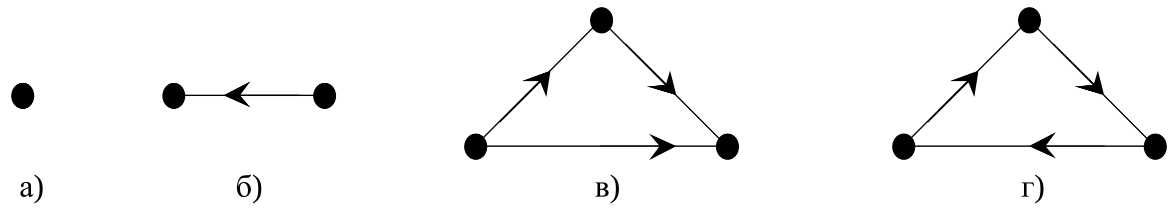


Рис. 7.4. Приклади турнірів

Зазначимо, що внаслідок вилучення довільної вершини нетривіального турніру одержується турнір.

Повним орграфом (або *турніром*) називають орграф, у якому будь-які дві вершини інцидентні одній і тільки одній його дузі.

Теорема 7.4. Для будь-якої вершини v n-вершинного турніру $\delta^+(v) + \delta^-(v) = n - 1$.

Доведення. За теоремою, для будь-якої вершини v орграфу справджується рівність $\delta(v) = \delta^+(v) + \delta^-(v))\delta^+(v) + \delta^-(v) = \delta(v)$. Кожна вершина з'єднана з довільною іншою вершиною турніру рівно однією дугою, тому $\delta(v) = n - 1$, звідси $\delta^+(v) + \delta^-(v) = n - 1$. ■

Зауважимо, що теорема 7.4 дає лише необхідну, але не достатню умову того, щоб орграф був турніром. Відповідний приклад наведено на рис. 7.5.

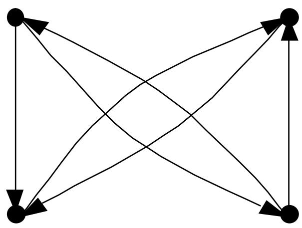


Рис. 7.5. Орграф, який не є турніром

Теорема 7.5. У турнірі існує шлях, який проходить через усі вершини орграфу.

Доведення. Доведемо це твердження індукцією за кількістю вершин. Для турнірів, що мають одну чи дві вершини, шлях, який проходить через усі вершини орграфу, існує. Нехай твердження виконується для всіх турнірів, що мають n $(n \geq 2)$ вершин. Розглянемо довільний турнір $G = (\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_n\}, E)$ з $n + 1$ вершиною. Орграф $G - v_0$ є n-вершинним турніром, тому за припущенням індукції, в ньому існує шлях, що проходить через усі його вершини. Без обмеження загальності можна вважати, що це шлях $(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Якщо для деякого натурального числа i, $1 \leq i \leq n - 1$, виконується $(v_i, v_0), (v_0, v_{i+1}) \in E$, то $(v_1, \dots,$ $v_{i-1},$ $v_i,$ $v_0, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_n)$ – шлях у G. Інакше, оскільки G є турніром, виконується або $(v_0, v_1) \in E$, або $(v_1, v_0) \in E$. У першому випадку маршрут $(v_0, v_1, v_2, \dots,$ $v_n)$ є шуканим шляхом. У другому випадку виконано $(v_2, v_0) \in E, (v_3, 0) \in E, \dots, (v_n, v_0) \in E$, але тоді маршрут $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_0)$ є шляхом в орграфі G. Згідно з принципом математичної індукції, твердження доведено. ■

Задачі

7.16. Для довільного повного орграфу $G = (V, E)$ з n вершинами $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ виконуються такі рівності:

а) $\sum_{i=1}^{n} \delta^+(v_i) = |E|$;

б) $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$;

в) $\sum_{i=1}^{n}(m - 1 - \delta^+(v_i)) = \sum_{i=1}^{n} \delta^+(v_i)$.

Розв'язання

а) У будь-якому орграфі G (зокрема повному) кількість дуг $|E|$ збігається з кількістю початків цих дуг (і, відповідно, з кількістю кінців усіх дуг).

б) Кількість дуг у повному орграфі G збігається з кількістю ребер у відповідному неорієнтованому повному графі G', тобто в графі, який отримаємо з G, замінивши в ньому всі орієнтовані дуги на неорієнтовані ребра (див. розв'язання наступної задачі. Скільки ребер містить повний граф із n вершинами? Оскільки в повному графі будь-які дві його вершини з'єднані ребром, то кількість його ребер становить $C(n, 2) = \frac{n(n-1)}{2}$).

в) У повному орграфі з n вершинами для всіх вершин виконуються рівності $n - 1 - \delta^+(vi) = \delta^-(vi), i = 1,2,3, \ldots, n$. Отже, сума в лівій частині рівності є кількістю кінців усіх дуг повного орграфу G, а сума в правій частині – кількістю початків усіх його дуг. Ці кількості, очевидно, збігаються.

7.17. Довести, що в будь-якому повному орграфі $G = (V, E)$ є принаймні одне джерело.

Доведення. Для доведення твердження застосуємо метод математичної індукції за кількістю вершин повного орграфу. База індукції: у повному орграфі з двома вершинами одна з них є джерелом, а інша – стоком. Припустимо, що будь-який повний орграф із n вершинами має джерело. Розглянемо довільний повний орграф $G = (V, E)$ з $n + 1$ вершиною. Вилучивши одну з його вершин v, отримаємо повний орграф із n вершинами, для якого справджується припущення індукції. Отже, у ньому є принаймні одне джерело. Нехай це буде вершина w. Повернемо на місце вилучену вершину v зі всіма відповідними дугами. Оскільки граф G повний, то його вершини v і w з'єднані дугою. Якщо ця дуга веде з v у w (тобто $(v, w) \in E$), то джерелом у графі G буде вершина v. В іншому разі, коли $(w, v) \in E$, джерелом залишиться вершина w. $\blacksquare$

7.18. Довести, що коли з турніру з n вершинами $(n \geq 4)$ вилучити будь-яку вершину, отримаємо або сильно зв'язний орграф, або орграф, який може бути перетворений у сильно зв'язний після додавання лише однієї відповідної дуги.

7.19. Довести, що коли в нетривіальному турнірі всі вершини мають попарно різні півстепені виходу, то орграф є безконтурним.

7.20. Довести, що коли в нетривіальному турнірі є принаймні дві вершини з однаковими півстепенями виходу, то в цьому орграфі знайдуться три вершини, які є вершинами трикутника.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

1. Які типи зв’язності ви знаєте?
2. Що таке безконтурні орграфи?
3. Що таке орієнтація графу?

ТЕМА 8
ГРАФ ЯК МОДЕЛЬ. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

8.1. Основні визначення.
8.2. Застосування графів

8.1. Основні поняття

У наш час відбувається бурхливий розвиток усіх областей науки та технологій, що зумовлює постійне дослідження тих чи інших актуальних проблем, які постають перед людством. Доволі часто вирішення певного завдання доцільно розв'язати його на мові графів, а потім результат інтерпретувати у необхідних вихідних термінах. Теорія графів стала нині простим, доступним і потужним засобом вирішення широкого кола питань із різних галузей. У вигляді графів можна, наприклад, інтерпретувати схеми доріг, електричні ланцюги, архітектурні задачі, географічні карти, молекули хімічних сполук, зв'язки між людьми і групами людей. Цю теорію застосовують під час проєктування інтегральних схем і схем управління, дослідження автоматів, логічних ланцюгів, блок-схем програм, в економіці і статистиці, хімії та біології, в теорії розкладів тощо.

У математиці теорія графів використовується для розв'язання геометричних задач і задач практичного змісту. Графи лежать в основі багатьох комп'ютерних проблем, які роблять можливими сучасну комунікацію та технологічні процеси. Отже, через графи відбувається проникнення математичних методів у сучасну науку та техніку.

Розглянемо деякі застосування графів. Граф є інструментом розв'язання багатьох задач топології. Саме розв'язання задачі Ейлера про кенігсбергські мости (рис. 8.1) за допомогою графу поклало формальний початок топології як розділу математики. Ейлер довів, що розв'язку цієї задачі не існує. Для доведення він позначив кожну ділянку суші точкою (вершиною), а кожен міст – лінією (ребром), що з'єднує відповідні точки, у такий спосіб отримавши граф (рис. 8.2).

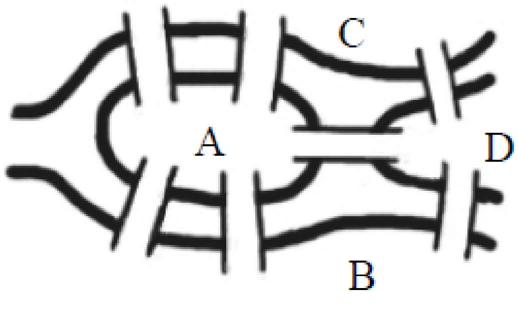


Рис. 8.1. Кенігсберзькі мости

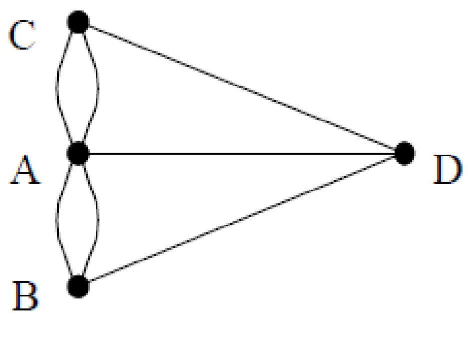


Рис. 8.2. Граф кенігсберзьких мостів

8.2 Застосування графів

Ще однією з найбільш відомих є знаменита топологічна проблема чотирьох фарб, яка також не має розв'язку. Виникла вона під час створення географічних карт.

Гіпотеза чотирьох фарб належить до проблем теорії графів, оскільки кожна карта породжує граф, у якому країни (включно з зовнішньою областю) – це вершини, і кожні дві вершини сполучаються ребром, якщо відповідні їм країни суміжні. Очевидно, що такий граф можна побудувати на площині без перетину ребер (в точках, відмінних від вершин графу).

Графи в хімії використовуються для розв'язання різноманітних теоретичних та практичних задач. Застосування теорії графів базується на побудові та аналізі різноманітних хімічних і хіміко-технологічних сполук у вигляді моделей, важливими для яких є лише характер зв'язку між вершинами. Ребра та вершини цих графів відображають хімічні поняття, явища, процеси та об'єкти і відповідно якісні та кількісні зв'язки або певні відношення між ними.

Молекулярні графи, які застосовуються в стереохімії, хімії кластерів та полімерів, являють собою неорієнтовані графи, які відображають будову молекул. Вершини цих графів відповідають атомам, а ребра – хімічним зв'язкам між ними.

Теорія графів також широко використовується в психології. Ще у 1936 р. психолог Курт Левін зобразивши життєве середовище індивіда за допомогою планарної карти, фактично мав справу з графами (рис. 8.3).

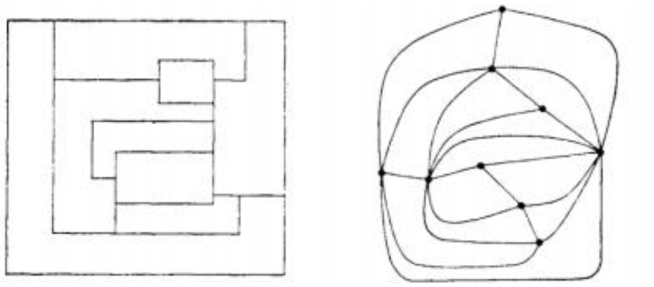


Рис. 8.3. Карта і відповідний їй граф

Розгляд цієї карти з погляду теорії графів привела психологів Науково-дослідницького центру групової динаміки до іншої психологічної інтерпретації графу, на якій люди представлені вершинами, а їх взаємини – ребрами.

Останнім часом графи й пов'язані з ними методи досліджень використовують практично в усіх розділах сучасної математики, зокрема в дискретній математиці. Граф – це математична модель найрізноманітніших об'єктів, явищ і процесів, досліджуваних і використовуваних у науці, техніці та на практиці. Коротко опишемо найвідоміші застосування теорії графів. Наприклад, у вигляді графу можна зображувати такі об'єкти:

- електричні та транспортні мережі;
- інформаційні й комп'ютерні мережі;

- карти автомобільних, залізничних і повітряних шляхів, газо- й нафтопроводів;
- моделі кристалів;
- структури молекул хімічних речовин;
- моделі ігор;
- різні математичні об'єкти (відношення, частково впорядковані множини, ґратки, автомати, ланцюги Маркова, алгоритми та програми);
- лабіринти;
- плани діяльності чи плани виконання певних робіт (розклади);
- генеалогічні дерева тощо.

Наведемо ще інші приклади застосування теорії графів:

- пошук зв'язних компонент у комунікаційних мережах;
- пошук найкоротших, найдешевших і найдорожчих шляхів у комунікаційних мережах;
- побудова кістякового дерева, тобто досягнення зв'язності з найменшою можливою кількістю ребер;
- пошук максимальної течії для транспортної мережі, у якій означено вхідні та вихідні вершини і пропускні спроможності ребер;
- ізоморфізм графів: ідентичність структур молекул (ізометрія);
- відшукання циклів графів: гамільтонів цикл: обійти всі вершини графу, побувавши в кожній з них лише один раз (задача комівояжера); ейлерів цикл: обійти всі ребра (здійснити контроль дієздатності всіх ланок мережі);
- розфарбування графів: розфарбування географічних карт, укладання розкладів, розміщення ресурсів тощо;
- планарність графів: проєктування друкованих електронних та електричних схем, транспортних розв'язок тощо;
- знаходження центрів графу – вершин, максимальна відстань від яких до решти вершин графу мінімальна (столиць) тощо.

Теорію графів широко застосовують у логістиці. Інтелектуальні транспортні системи можуть працювати, збираючи дані про місцезнаходження від навігаторів автомобілів, і передавати інформацію водіям, де і як швидко їздити, щоб зменшити загальне перевантаження. Теорія графів вже використовується авіакомпаніями, які хочуть з'єднати велику кількість міст найефективнішим способом, створити систему переміщення великої кількості пасажирів з найменшою кількістю можливих поїздок.

Ця проблема схожа за своєю суттю на задачу про комівояжера. Водночас авіадиспетчери повинні переконатися, що сотні літаків знаходяться в потрібному місці в потрібний час, і запобігти можливим аваріям. Вирішення цього завдання було б неможливим без комп'ютерів і теорії графів.

Теорія графів відіграє критичну роль у багатьох проблемах інформатики. Зокрема, теорія графів використовується для моделювання парних взаємозв'язків між об'єктами певної множини. Низку комп'ютерних підходів було розроблено для полегшення використання графів, наприклад, SPANTREE або GTP для передачі даних.

Одна з галузей, де швидкість і кращі сполучення мають вирішальне значення має розробка комп'ютерних чипів. Інтегральні схеми складаються з мільйонів транзисторів. Для поліпшення продуктивності чипа необхідно оптимізувати значну кількість зв'язків.

Теорія графів також грає важливу роль в аналізі та візуалізації еволюції тварин і мов, контролю натовпу і поширення захворювань.

В хімії графи використовують для прогнозування хімічних перетворень та візуального зображення залежностей, зв'язків, класифікацій та ієрархій. В кінці XIX ст. А. Келі вивів формулу кількості неорієнтованих дерев з n поміченими вершинами, яка розв'язувала задачу про можливі структури насичених (або граничних) вуглеводнів. Молекула кожного граничного вуглеводню може бути представлена у вигляді дерева (ациклічного графу). При видаленні атомів водню решта атомів також буде утворювати дерева з валентністю вершин не вище 4. Число можливих структур можливих вуглеводів є числом скінченим і дорівнює числу дерев з вершинами степеня не більше 4.

Дослідження ринків наркотиків і злочинних синдикатів груп, які працюють всередині них, важливо, щоб боротися з ними найбільш ефективними способами. Було досліджено ефективність чотирьох різних стратегій втручання, метою яких була ліквідація злочинних мереж: заходи щодо особистості, що ґрунтуються на високому рівні діяльності; заходи щодо особистості, засновані на ролях; втручання, що поєднує перші дві стратегії; і випадкове втручання. Результати дослідження показали, що найбільш ефективна стратегія щодо осіб з урахуванням високого рівня і ролі в мережах.

Сторінки в інтернеті можна представляти як вершини графу, а наявність зв'язку між сторінками як ребро, інцидентне відповідним вершинам. Перші пошукові машини в інтернеті виконували пошук за ключовим словом та створювали ієрархію сторінок за кількістю переглядів. Використовуючи таку систему, вони не могли визначити, чи відповідає сторінка запиту, чи є спамом.

Тобто графи – це метод візуальної ілюстрації даних та відношень між ними. Мета графів – представити занадто численні або складні дані для їх адекватного опису в тексті чи алгоритмі. Забезпечення чіткості та коректність опису даних у графах забезпечують ефективність використання графів. З розвитком та інтеграцією інтернет-мереж у різні сфери діяльності окремих людей та суспільства загалом для аналізу їх впливу на соціум доцільно використовувати вже існуючий опрацьований математичний апарат теорії графів.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

Основна література

1. Матвієнко М. П. Дискретна математика: підручник. Вид. 2-ге, перероб. і доп. Київ: Видавництво Ліра-К, 2017. 324 с.

2. Нікольський Ю. В., Пасічник В. В., Щербина Ю. М. Дискретна математика. Вид-во «Магнолія-2006», 2024. 432 с.

3. Дискретна математика. Практикум: навч. посіб. / О. С. Манзій, І. Є. Тесак, І. І. Кавалець, Н. В. Чарковська. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2016. 212 с.

4. Висоцька В. А., Литвин В. В., Лозинська О. В. Дискретна математика: практикум (збірник задач з дискретної математики): навч. посіб. Львів: Видавництво «Новий Світ-2000», 2020. 575 с.

Інформаційні ресурси в мережі Інтернет

1. Дискретна математика: Конспект лекцій (Частина 1): навч. посіб. для студ. спеціальності 113 «Прикладна математика», освітньої програми «Наука про дані та математичне моделювання» / О. Л. Темнікова; КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 154 с. URL: https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/990893b6-f853-408a-8476-d3dd7c89d2a1/content

2. Дискретна математика для здобувачів освітньо-професійного ступеня фаховий молодший бакалавр спеціальності 126 Інформаційні системи та технології денної форми навчання / Н. Стефська. URL: https://e-tk.lntu.edu.ua/course/view.php?id=647

3. Трохимчук Р. М., Нікітченко М. С. Дискретна математика у прикладах і задачах: навч. посіб. М-во освіти і науки України, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. Київ: Київський університет, 2017. 248 с. URL: https://csc.knu.ua/media/filer_public/89/10/89101127-5400-4d61-9840-7eab32caddab/discrete_ mathematics.pdf

4. Теорія графів. URL: https://org2.knuba.edu.ua/pluginfile.php/ 234993/ mod_folder/content/0/%D0%9D%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%B9%20%D0%BF%D0%BE%D1%81%D1%96%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA%20%D0%B7%20%D0%B4%D0%B8%D1%81%D0%BA%D1%80%D0%B5%D1%82%D0%BD%D0%BE%D1%97%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B8%20%D0%A7.2.pdf?forcedownload=1

Навчальне видання

Данильчук Оксана Миколаївна

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації для самостійної роботи
для здобувачів вищої освіти СО «Бакалавр»
спеціальностей E7 Математика, F5 Кібербезпека та захист інформації

Редактор О. А. Солдатова
Технічний редактор Т. О. Важеніна-Гопрак

Підписано до друку 17.12.2025.
Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Друк – цифровий. Умовн. друк. арк. 4,65.
Тираж 30. Зам. 11.

Донецький національний університет імені Василя Стуса
21021, м. Вінниця, 600-річчя, 21.
Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до Державного реєстру
серія ДК № 5945 від 15.01.2018